I Suite exacte courte fondamentale

1 énoncé

Thm SGA 1 IX Thm 6.1

(quasi séparé ?)

X schéma quasi compact géométriquement connexe $/k$

$k' = k_{sep}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\,\Omega \arrow[r, "a'"'] \arrow[rr, bend left, "a"] \arrow[rrd, bend left=60, "b"] & X_{k'} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Gamma"] & X \arrow[d] \\ & \mathrm{Spec}\,k' = S' \arrow[r] & \mathrm{Spec}\,k = S \end{tikzcd}$$

La suite $e \to \pi_1(X_{k'}, a') \to \pi_1(X, a) \to \pi_1(S, b) \to e$ est exacte

rem 1 Valable aussi avec $k' = \bar{k}$

2 $\mathrm{Im} \subset \mathrm{Ker}$ est évident

principe de la preuve

$k_i \subset k'$ $\quad k_i / k$ galoisienne finie $\quad S_i = \mathrm{Spec}\, k_i$

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r] & \pi_1(X_i, a_i) \arrow[r] & \pi_1(X, a) \arrow[r] & \mathrm{Aut}_X(X_i) \arrow[r] & e & (2) \\ & & & \mathrm{Aut}_S(S_i) \arrow[u] & & \\ e \arrow[r] & \pi_1(X', a') \arrow[r] \arrow[uu] & \pi_1(X, a) \arrow[r] \arrow[uu, equal] & \pi_1(S, b) \arrow[r] \arrow[u] & e & (1) \end{tikzcd}$$

point 0 le diag commute + (2) exacte

point 1 $\mathrm{Aut}_S(S_i) \to \mathrm{Aut}_X(X_i)$ iso

point 2 $\pi_1(X', a') \to \varprojlim_i \pi_1(X_i, a_i)$ iso

et ça suffit :

lemme I ensemble filtrant $(e)_{i\in I} \to (F_i)_{i\in I} \to (G_i)_{i\in I} \xrightarrow{\varphi_i} (H_i)_{i\in I} \to (e)_{i\in I}$ suite de morphismes de systèmes projectifs de groupes profinis, exacte pour tout $i \in I$.
Alors la suite $e \to \varprojlim F_i \to \varprojlim G_i \xrightarrow{\varphi} \varprojlim H_i \to e$ est exacte

preuve $h = (h_i) \in \varprojlim H_i \quad \forall i \in I \quad \varphi_i^{-1} h_i \neq \emptyset$ compact

donc $\varphi^{-1} h = \varprojlim \varphi_i^{-1} h_i \neq \emptyset$

2 preuves

point 1 $\quad \mathrm{Rev}\, S \longrightarrow \mathrm{Rev}\, X$ est fidèlement plein,

$S' \to S \longmapsto S' \times_S X \to X$

vu que X est géométriquement connexe et :

Prop $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ foncteur exact entre catégories galoisiennes

F fidèlement plein $\Longleftrightarrow$ F envoie objets connexes sur objets connexes.

point 0 $\quad X$ schéma connexe $\quad \bar{x} : \mathrm{Spec}\, \Omega \to X \quad G$ groupe fini

$$\begin{matrix} G \text{ torseurs } Y \to X & \overset{1-1}{\longleftrightarrow} & \pi_1(X, \bar{x}) \longrightarrow G \\ \text{muni de } \bar{y} \longrightarrow \bar{x} & & \end{matrix}$$

Comme S_i / S, X_i / X sont galoisiens muni de points géométriques $\mathrm{Spec}\, \Omega \to \mathrm{Spec}\, k' \to \mathrm{Spec}$

$\mathrm{Spec}\, \Omega \xrightarrow{a'} X' \to X_i$, a_i

on obtient $\quad \pi_1(X, a) \longrightarrow \mathrm{Aut}_X(X_i)$

$\pi_1(S, b) \longrightarrow \mathrm{Aut}_S(S_i)$ compatibles

(2) est exacte car

Prop $\quad \mathcal{C}$ catégorie galoisienne

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ foncteur fibre $\quad \mathcal{C}' = \mathcal{C}/S$. $\quad S$ objet connexe

i) $\mathcal{C}'$ galoisienne et $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, $X \longmapsto X \times S$ exact

ii) $a \in F(S)$ $\quad F' := \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{E}ns$

$$\begin{matrix} X' \searrow S & \longmapsto & \begin{matrix} F'(X') & \longrightarrow & F(X') \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ * & \xrightarrow[a]{} & F(S) \end{matrix} \end{matrix}$$

Alors $F \simeq F' \circ H$

et $\pi(\mathcal{C}', F') \longrightarrow \pi(\mathcal{C}, F)$ identifie $\pi(\mathcal{C}', F')$ à Stab_a.

point 2

$$\boxed{\text{lemme} \quad \varinjlim_i \mathrm{Rev}(X_i) \longrightarrow \mathrm{Rev}\, X' \quad \text{équivalence} \\ (i, Y_i \to X_i) \longmapsto (Y_i \otimes_{k_i} k' \to X')}$$

objets de $\varinjlim_i \mathrm{Rev}(X_i)$ couples $(i, Y_i \to X_i)$ $i \in I$ $Y_i \to X_i \in \mathrm{ob}_j \mathrm{Rev} X_i$

$$\mathrm{Hom}\left((i, Y_i \to X_i), (j, Z_j \to X_j)\right) = \varinjlim_{\ell \geq i, j} \mathrm{Hom}_{X_\ell}(Y_i \otimes_{k_i} k_\ell, Z_j \otimes_{k_j} k_\ell)$$

preuve

fidèlement plein

1er cas $X = \mathrm{Spec}\, R$ $X_i = \mathrm{Spec}\, R_i$ $R_i = k_i \otimes_k R$

$Y_i = \mathrm{Spec}\, A_i$ A_i R_i algèbre finie étale

$Z_j = \mathrm{Spec}\, B_j$ B_j R_j ——

$Y_i \otimes_{k_i} k' \xrightarrow{h} Z_j \otimes_{k_j} k'$ $\longleftrightarrow$ $B_j \otimes_{k_j} k' \xrightarrow{h^\#} A_i \otimes_{k_i} k'$

X' morphisme $\qquad$ R' morphisme

donc $h = f_\ell \otimes_{k_\ell} k'$ pour $\ell \geq i, j$, $\ell \gg 0$.

Si $Y_i \otimes_{k_i} k_\ell \underset{g_\ell}{\overset{f_\ell}{\rightrightarrows}} Z_j \otimes_{k_j} k_\ell$, vérifient $f_\ell \otimes_{k_\ell} k' = g_\ell \otimes_{k_\ell} k'$

alors vu que

$$\begin{array}{ccc} B_j \otimes_{k_j} k_\ell & \underset{g_\ell^\#}{\overset{f_\ell^\#}{\rightrightarrows}} & A_i \otimes_{k_i} k_\ell \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_j \otimes_{k_j} k' & \underset{g_\ell'^\#}{\overset{f_\ell'^\#}{\underset{=}{\rightrightarrows}}} & A_i \otimes_{k_i} k' \end{array}$$

, $f_\ell = g_\ell$.

2ème cas : cas général $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, $X_\alpha = \mathrm{Spec}\, R_\alpha$

Si $f'_\ell = g'_\ell$ comme ci dessus, alors $\forall \alpha \in A$ $f'_{\alpha \ell} = g'_{\alpha \ell}$

et donc $f_{\alpha \ell} = g_{\alpha \ell}$ $\forall \alpha \in A$, d'où $f_\ell = g_\ell$.

Si $Y'_i \xrightarrow{h} Z'_j$ est un X'-morphisme,

$Y'_{\alpha i} \xrightarrow{h|X_\alpha} Z'_{\alpha j}$ —— X'_α ——, donc $h_{|X_\alpha} = f_\alpha'$

pour $Y_i \otimes_{k_i} k_\ell \xrightarrow{f_\alpha} Z_j \otimes_{k_j} k_\ell$

comme X quasi compact on peut supposer $|A| < \infty$

et le même ℓ marche pour tout les α. Comme $f_{\ell\alpha}|X_\beta = f_{\ell\beta}|X_\alpha$

(d'après la fidélité), les $(f_{\ell\alpha})_{\alpha \in A}$ se recollent en $Y_i \otimes_{k_i} k_\ell \xrightarrow{f_\ell} Z_j \otimes_{k_j} k_\ell$

essentiellement surjectif

1er cas : $X = \operatorname{Spec} R$ $\quad \operatorname{Spec} A' = Y' \to X' = \operatorname{Spec} R' \in \operatorname{ob} \operatorname{Rev} X'$

A' R' algèbre finie étale, donc de

présentation finie $A' = \dfrac{R'[x_1, \dots, x_m]}{(P_1, \dots, P_r)}$ $\quad P_h \in R'[x_1, \dots, x_m]$

en choisissant $i \gg 0$ $\quad P_h \in R_i[x_1, \dots, x_m]$,

d'où $A' = k' \otimes_{k_i} A_i$ $\quad A_i = \dfrac{R_i[x_1, \dots, x_m]}{(P_1, \dots, P_m)}$

A_i / R_i est non ramifié car ses fibres géométriques sont celles de A'/R'

et plat [vérification facile]

donc est étale. ~~Et~~ quitte à changer de i, A_i est finie$/R_i$.

2ème cas : cas général.

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \qquad X_\alpha = \operatorname{Spec}(R_\alpha) \qquad |A| < \infty$$

Si $Y' \to X' \in \operatorname{Rev} X$, alors $Y'_{|X'_\alpha} \to X'_\alpha \in \operatorname{Rev}(X'_\alpha)$, d'après le premier cas

$Y'_{|X'_\alpha} = (Y_{\alpha i})'$ $\qquad Y_{\alpha i} \longrightarrow X_{\alpha i} \in \operatorname{Rev}(X_{\alpha i})$

De plus on dispose de $\quad (Y_{\alpha i \,|\, X_{\beta i}})' \simeq Y'_{|X'_\alpha \cap X'_\beta} \simeq (Y_{\beta i \,|\, X_{\alpha i}})'$

Comme $X_\alpha \cap X_\beta$ quasi compact (si X quasi séparé) le caractère plein

donne $Y_{\alpha i \,|\, X_{\beta i}} \underset{\psi_{i\alpha\beta}}{\simeq} Y_{\beta i \,|\, X_{\alpha i}}$ et le caractère fidèle $\psi_{i\alpha\gamma} = \psi_{i\beta\gamma} \circ \psi_{i\alpha\beta}$

donc les $Y_{\alpha i} \longrightarrow X_{\alpha i}$ se recollent en $Y_i \longrightarrow X_i$.

II La conjecture des sections

1 L'application s_X

X/k schéma comme au I k corps

$\bar{x} : \operatorname{Spec} \Omega \to X$ point géométrique

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}\Omega \arrow[r, "\bar{x}"] \arrow[rr, bend left, "\bar{x}"] & X_{\bar{k}} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec}\bar{k} \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

$$1 \to \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x}) \to \pi_1(X, \bar{x}) \to G_k \to 1$$

Si $a \in X(k)$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{a}) \arrow[r] & \pi_1(X, \bar{a}) \arrow[r, shift right] & G_k \arrow[l, shift right, "\sigma_a"'] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Un chemin étale $\quad \operatorname{Rev} X_{\bar{k}} \begin{tikzcd} {} \arrow[r, bend left, "\bar{a}^*"] \arrow[r, bend right, "\bar{x}^*"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow c"] & {} \end{tikzcd} \mathcal{E}ns$

induit

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma \mapsto c\gamma c^{-1}"] & \pi_1(X, \bar{a}) \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\gamma \mapsto c\gamma c^{-1}"] & G_k \arrow[l, shift right, "\sigma_a"'] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x}) \arrow[r] & \pi_1(X, \bar{x}) \arrow[r] & G_k \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

on pose $\quad s_a(g) = c\, \sigma_a(g)\, c^{-1} \quad \forall g \in G_k$

$[s_a]$ bien définie dans $\operatorname{Hom\,Ext}_{G_k}(G_k, \pi_1(X, \bar{x}))$

$$\operatorname{Hom\,Ext}_{G_k}(G_k, \pi_1(X, \bar{x})) = \{ s : G_k \to \pi_1(X, \bar{x}) \quad p \circ s = \mathrm{id} \} / \sim$$

$\sim$: conjugaison des sections

Conjecture Si X est une courbe propre de genre ≥ 2 k de type fini$/\mathbb{Q}$ alors $s_X : X(k) \to \operatorname{Hom\,Ext}_{G_k}(G_k, \pi_1(X, \bar{x}))$ est une bijection

2 l'injectivité

$x, y \in X(k) \quad / \quad [s_x] = [s_y]$

x définit $\quad i : X \hookrightarrow A := \underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{X/k}$ immersion fermée

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(X_{\bar k}, \bar x) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X, \bar x) \arrow[r] \arrow[d] & G_k \arrow[r] \arrow[l, bend right, "s_x"'] \arrow[l, bend left, "s_y"] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(A_{\bar k}, \bar o) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(A, \bar o) \arrow[r] \arrow[d] & G_k \arrow[r] \arrow[l, bend right, "s_a"'] \arrow[l, bend left, "s_b"] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & A[n](\bar k) \arrow[r] & \pi_1^{[n]}(A, \bar o) \arrow[r] & G_k \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

$\pi_1(A_{\bar k}, \bar o) = T_\ell(A(\bar k))$

$a = i(x)$
$b = i(y)$

$$s_{A,n} \quad A(k) \longrightarrow H^1(G_k, A[n](\bar k)) \simeq H^1((\mathrm{Spec}\, k)_{et}, A[n])$$

Kummer $\quad \partial_n : \quad A(k) \longrightarrow H^1(\mathrm{Spec}(k)_{et}, A[n])$

$\mathrm{Ker}\, \partial_n = n\, A(k)$.

$\boxed{\text{lemme} \quad \partial_n = s_{A,n}}$ preuve ...

Conséquence : $\quad \forall n \geq 1 \quad a - b \in \mathrm{Ker}(s_{A,n}) = \mathrm{Ker}(\partial_n) = n\, A(k)$

Comme (Mordell Weil) $A(k)$ est de type fini $\quad a - b = 0$.

3 Conjecture faible

<u>énoncé</u> $\mathrm{Hom\,Ext}_{G_k}(G_k, \pi_1(X,\bar{x})) \neq \emptyset \implies X(k) \neq \emptyset$

Théorème (Tamagawa)
Conjecture faible $\implies$ conjecture forte

lemme $1 \to \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x}) \to \pi_1(X,\bar{x}) \underset{\longleftarrow s}{\rightleftarrows} G_k \to 1$

$\exists a \in X(k) \;/\; s = s_a \iff \forall H < \pi_1(X,\bar{x})$ ouvert $s(G_k) < H$ $\quad X_H(k) \neq \emptyset$

lemme $\implies$ théorème

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(X_{H\bar{k}}, \bar{x}_H) \arrow[r] \arrow[d] & \overset{H}{\pi_1(X_H, \bar{x}_H)} \arrow[r] \arrow[d] & G_k \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\tilde{s}"'] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x}) \arrow[r] & \pi_1(X,\bar{x}) \arrow[r] & G_k \arrow[r] \arrow[l, bend right, "s"'] & 1
\end{tikzcd}$$

rem on doit montrer la conjecture faible pour toute cou

l'existence de $\tilde{s}$ implique $X_H(k) \neq \emptyset$.

<u>preuve du lemme</u> $\Longleftarrow$ $s(G_k) \underset{\text{fermé}}{<} \pi_1(X,\bar{x})$ $\qquad s(G_k) = \bigcap_{\substack{s(G_k) < H < \pi_1(X,\bar{x}) \\ \text{ouvert}}} H$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_{\bar{x}} \arrow[d, dash] \\
X_s \arrow[d, dash] \\
X_H \arrow[d, dash] \\
X
\end{tikzcd}$$

$s(G_k)$ $\quad$ H

$(X_s, \bar{x}_s) = \varprojlim_H (X_H, \bar{x}_H)$

$X_s(k) = \varprojlim_H X_H(k) \neq \emptyset$

car $X_H(k)$ fini (Faltings – Mordell) $\neq \emptyset$ par hypothèse
la limite est sur un ensemble filtrant

On conclut grâce à

lemme $s = s_a$ pour $a \in X(k) \iff a \in \mathrm{Im}(X_s(k) \to X(k))$

$\Longleftarrow$ $b \mapsto a$

$$\begin{tikzcd}
 & & X_s \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}\Omega \arrow[r] \arrow[urr, bend left, "\bar{b}"] \arrow[drr, bend right, "\bar{a}"'] & \operatorname{Spec}k \arrow[ur, "b"] \arrow[r, "a"] & X
\end{tikzcd}$$

le choix de $\bar{b}$ induit

$d : \mathrm{Rev}(X_s)_{\bar{\pi}} \underset{\bar{x}_s^*}{\overset{\bar{b}^*}{\rightrightarrows}} \mathcal{E}ns$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_s, \bar{b}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & G_k \arrow[l, bend right, "\sigma_b"'] \arrow[d, equal] \\
\pi_1(X_s, \bar{x}_s) \arrow[d] \arrow[dr] & \pi_1(X, a) \arrow[r] \arrow[d] & G_k \arrow[l, bend right, "\sigma_a"'] \arrow[d, equal] \\
& \pi_1(X,\bar{x}) \arrow[r] & G_k \arrow[l, bend right, "s_a"'] \arrow[l, bend left, "s"]
\end{tikzcd}$$

$s_a(G_k) = \pi_1(X_s, \bar{x}_s) = s(G_k)$

donc $s = s_a$;

4. Variantes

a) pro-ℓ

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \pi_1(X_{\bar k}, \bar x) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X, \bar x) \arrow[r] \arrow[d] & G_k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \pi_1^{(\ell)}(X_{\bar k}, \bar x) \arrow[r] & \pi_1^{"\ell"}(X, \bar x) \arrow[r] & G_k \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Thm (Mochizuki 1999) X/k X courbe hyperbolique k sous p-adique
$s_X : X(k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_k}(G_k, \pi_1^{"\ell"}(X, \bar x))$ est injective

rem résulte de la caractérisation anabélienne des courbes hyperboliques de M. (beaucoup plus difficile que l'injectivité).

Thm (Hoshi 2010) s_X n'est pas toujours injective
(k corps de nombres, X hyperbolique) ⟶ exp Anna

b) abélienne

$$1 \to \pi_1^{ab}(X_{\bar k}, \bar x) \longrightarrow \pi_1^{"ab"}(X, \bar x) \longrightarrow G_k \longrightarrow 1$$

def (Stix) X/k satisfait la conjecture des sections faibles pour les 0-cycles si
$CH_0(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \iff$ la suite se scinde

Thm var. La suite se scinde $\iff [\underline{\mathrm{Alb}}^1_{X/k}]$ est dans le sous groupe divisible maximal de $H^1(G_k, \underline{\mathrm{Alb}}^0_{X/k})$
X/k lisse projective géom. intégrale/k parfait
(Harari–Szamuely 2009)

rem (2) H.S construisent un exemple de courbe de genre 2 où ce sous-groupe est nul

(1) $CH_0(X_{\bar k})^{G_k} \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \iff [\underline{\mathrm{Alb}}^1_{X/k}] = 0$ dans $H^1(G_k, \underline{\mathrm{Alb}}^0_{X/k})$

c) birationnelle

X courbe propre lisse géo connexe $g \geq 2$ $/k$ de type fini sur $\mathbb{Q}$

$$\begin{tikzcd} x \in |X| & I_x \arrow[r] \arrow[d] & D_x \arrow[r] \arrow[d] & G_{k(x)} \arrow[r] \arrow[d] & 1 & (2) \\ 1 \arrow[r] & G_{K(X_{\bar k})} \arrow[r] & G_{K(X)} \arrow[r] & G_k \arrow[r] & 1 & (1) \end{tikzcd}$$

sections de (1) : sections birationnelles
(1) provenant de sections de (2) avec $k(x) = k$: sections cuspidales

Conjecture birationnelle : toute section birationnelle est cuspidale
" " faible : (1) se scinde $\Longrightarrow X(k) \neq \emptyset$

rem plus précisément un point rationnel tangentiel fournit une section

lien avec SC

$$\begin{tikzcd} BSC \arrow[r, Rightarrow] & WBSC \\ SC \arrow[r, Rightarrow] & WSC \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \forall x \ BSC \arrow[r, Leftrightarrow] & \forall x \ WBSC \\ \forall x \ SC \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & \forall x \ WSC \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

historique

1) Koenigsmann 2005
formulation de WBSC, BSC
preuve pour k local de car 0 (sauf $\mathbb{C}$) via la théorie des modèles
$k/\mathbb{Q}_p$ finie
preuve algébrique (Pop 2010).

2) k corps de nombres X/k courbe propre lisse géo connexe $Ш^1(k, \mathrm{Pic}^0_{X/k}) < \infty$
Esnault–Wittenberg 2010: Alors $\exists$ une section birationnelle abélienne $\Longleftrightarrow$ $CH^1_0(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$

3) Stix 2010 Harari–Stix 2010
k corps de nombres X/k courbe propre lisse géom. connexe
si $\exists X \longrightarrow A$ non constant A/k var. ab.
$\# A(k) < \infty$ $\# Ш^1(k, A) < \infty$
Alors WSC est vrai.

III Représentation extérieure

1 définition

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X, \bar{x}) \arrow[r] \arrow[d] & G_k \arrow[r] \arrow[d, "\rho_X"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathrm{Inn}(\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x})) \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x})) \arrow[r] & \mathrm{Out}(\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x})) \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

> **Thm** (Matsumoto 1996) k corps de nombres, X courbe affine [...]
> Si $\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x})$ non commutatif ρ_X est injectif.

rem 1) cas $(g,n) = (0,3)$ Belyi 1979 → exp de Léo

2) Hoshi - Mochizuki 2009 Vrai aussi pour X propre de genre g

2 Conjecture principale anabélienne

a) Motivation

Neukirch 69 K, K' finie galoisienne $/\mathbb{Q}$ $G_K \simeq G_{K'} \Longrightarrow K \simeq K'$

Uchida 77 k corps fini X, Y courbes $/k$

$$\mathrm{Gal}_{k(X)} \simeq \mathrm{Gal}_{k(Y)} \Longrightarrow X \simeq Y$$

Conj de Tate (thm Faltings 83)

A, B var. abélienne, K corps global
$$\mathrm{Hom}_K(A,B) \otimes \hat{\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{Hom}_{G_k}(H_1(A_{\bar{k}}, \hat{\mathbb{Z}}), H_1(B_{\bar{k}}, \hat{\mathbb{Z}}))$$

b) énoncé

La conjecture Hom (Grothendieck 83)

X, Y courbes algébriques hyperboliques $/k$ de t.f $/\mathbb{Q}$

$$GC2 : \mathrm{Hom}^{dom}_k(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{open}_{G_k}(\pi_1(X), \pi_1(Y)) / \sim$$

est une bijection

$\sim$: pour l'action de conjugaison de $\pi_1(Y_{\bar{k}})$

3 Résultats

reconstruction sur des corps de nombres

Ihara genre 0 Nakamura genre 0, 1

~~Thm~~ (Tamagawa 1997)
X, Y courbes affine / k de t.f. / $\mathbb{Q}$

$$\mathrm{hom}_k(X, Y) \longrightarrow \mathrm{hom}_{G_k}(\pi_1(X), \pi_1(Y))/\sim \quad \text{bijective}$$

(en particulier $\pi_1(X) \underset{G_k}{\simeq} \pi_1(Y) \Longrightarrow X \underset{k}{\simeq} Y$)

rem 1 version extérieure (équivalente)

2 basé sur une version pour les corps finis suivant Uchida

3 Généralisé par Mochizuki 1996 aux courbes propre (basé sur ℓ. + techniques log).

4 Version birationnelle (Pop 2000)

5 Version pour les corps de fonctions (Stix 2002)

Thm (Mochizuki 1999)
k sous p-adique S var. alg. lisse X courbe hyperbolique

$$\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{dom}}(S, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_k}^{\mathrm{open}}(\pi_1(S), \pi_1(X))/\sim \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_k}^{\mathrm{open}}(\pi_1^{(p)}(S), \pi_1^{(p)}(X))$$

bijections

rem via la théorie de Hodge p-adique

Corollaire L, M corps de fonction de dim arbitraire / K sous p-adique

$$\mathrm{Hom}_K(M, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(G_L, G_M) \quad \text{Bijective}$$

rem 1 pour K de type fini / $\mathbb{Q}$ prouvé d'abord par Pop 2000

2 Généralise le thm de Neukirch