

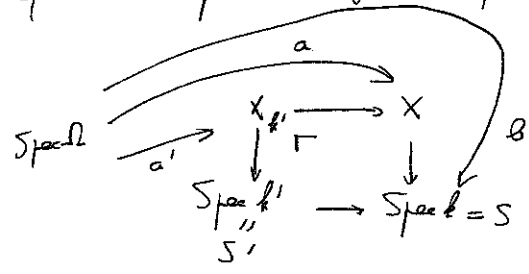
I Suite exacte courte fondamentale

1 énoncé

Thm SGA1 IX Thm 6.1

$X$  schéma quasi compact géométriquement connexe /  $k$   
 (quasi séparé ?)

$k' = k_{sep}$



La suite  $e \rightarrow \pi_1(X_{k'}, a') \rightarrow \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(S, b) \rightarrow e$   
 est exacte

rem 1 Valable aussi avec  $k' = \bar{k}$

2  $Im \subset Ker$  est évident

principe de la preuve

$k_i \subset k'$   $k_i / k$  galoisienne finie  $S_i = Spec k_i$

$$\begin{array}{ccccccc}
 e \rightarrow \pi_1(X_i, a_i) & \rightarrow & \pi_1(X, a) & \rightarrow & Aut_X(X_i) & \rightarrow & e \quad (2) \\
 \uparrow & & \parallel & & \uparrow & & \\
 e \rightarrow \pi_1(X', a') & \rightarrow & \pi_1(X, a) & \rightarrow & \pi_1(S, b) & \rightarrow & e \quad (1) \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & Aut_S(S_i) & & 
 \end{array}$$

point 0 le diag commute + (2) exacte

point 1  $Aut_S(S_i) \rightarrow Aut_X(X_i)$  iso

point 2  $\pi_1(X', a') \rightarrow \varprojlim_i \pi_1(X_i, a_i)$  iso

et ça suffit:

lemme  $I$  ensemble filtrant  $(e) \rightarrow (F_i) \xrightarrow{\varphi_i} (G_i) \xrightarrow{\psi_i} (H_i) \rightarrow (e)$   
 suite de morphismes de systèmes projectifs de groupes finis, exacte pour tout  $i \in I$ .  
 Alors la suite  $e \rightarrow \varprojlim F_i \rightarrow \varprojlim G_i \xrightarrow{\varphi} \varprojlim H_i \rightarrow e$  est exacte

preuve  $h = (h_i) \in \varprojlim H_i$   $\forall i \in I \varphi_i^{-1} h_i \neq \emptyset$  compact  
 donc  $\varphi^{-1} h = \varprojlim \varphi_i^{-1} h_i \neq \emptyset$

2 preux

point 1  $\text{Res } S \rightarrow \text{Res } X$  est fidèlement plein,  
 $s' \rightarrow s \mapsto s'_s X \rightarrow X$

vu que  $X$  est géométriquement connexe et :

Prop  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  foncteur exact entre catégories galoisiennes  
 $F$  fidèlement plein  $\iff F$  envoie objets connexes en objets connexes.

point 0  $X$  schéma connexe  $\bar{a}: \text{Spec } \Omega \rightarrow X$   $G$  groupe fini  
 $G$  torsions  $Y \rightarrow X$   $\xleftrightarrow{1-1}$   $\pi_1(X, \bar{a}) \rightarrow G$   
 muni de  $\bar{y} \rightarrow \bar{a}$

Comme  $S_i/S$  sont galoisiens muni de points géométriques  $\text{Spec } \Omega \rightarrow \text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$   
 $X_i/X$   $\text{Spec } \Omega \xrightarrow{a_i} X_i \rightarrow X$

on obtient  $\pi_1(X, a) \rightarrow \text{Aut}_X(X_i)$   
 $\pi_1(S, b) \rightarrow \text{Aut}_S(S_i)$  compatibles  $a_i$

(2) est exacte car :

Prop  $\mathcal{C}$  catégorie galoisienne  
 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}_{ms}$  foncteur fibre  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}/S$   $\mathcal{C}'$  objet connexe  
 i)  $\mathcal{C}'$  galoisienne et  $H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  exact  
 $x \mapsto X \times S$   
 ii)  $a \in F(S)$   $F' := \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{E}_{ms}$   

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{1} & F'(X') \rightarrow F(X) \\ \downarrow & \mapsto & \downarrow \Gamma \quad \downarrow \\ * & \xrightarrow{a} & F(S) \end{array}$$
  
 Alors  $F' = F' \circ H$   
 et  $\pi(\mathcal{C}', F') \rightarrow \pi(\mathcal{C}, F)$  identifie  $\pi(\mathcal{C}', F') \bar{a}$   $\text{Stab}_a$ .

point 2

lemme  $\varinjlim_i \text{Res}(X_i) \longrightarrow \text{Res } X'$  équivalence  
 $(i, \gamma_i \rightarrow X_i) \longmapsto (\gamma_i \otimes_{k_i} k' \rightarrow X')$

objets de  $\varinjlim_i \text{Res}(X_i)$  couples  $(i, \gamma_i \rightarrow X_i)$   $i \in I$   $\gamma_i \rightarrow X_i \in \text{Obj}_i \text{Res } X_i$

$$\text{Hom}((i, \gamma_i \rightarrow X_i), (j, \gamma_j \rightarrow X_j)) = \varinjlim_{e \geq i, j} \text{Hom}_{X_e}(\gamma_i \otimes_{k_i} k_e, \gamma_j \otimes_{k_j} k_e)$$

preuve

fidèlement plein

1<sup>er</sup> cas  $X = \text{Spec } R$   $X_i = \text{Spec } R_i$   $R_i = k_i \otimes_k R$   
 $Y_i = \text{Spec } A_i$   $A_i$   $R_i$  algèbre finie étale  
 $Z_j = \text{Spec } B_j$   $B_j$   $R_j$

$$\gamma_i \otimes_{k_i} k' \xrightarrow{f_i} \gamma_j \otimes_{k_j} k' \iff B_j \otimes_{k_j} k' \xrightarrow{g_i} A_i \otimes_{k_i} k'$$

$\downarrow$   $X$ -morphisme  $\downarrow$   $R$ -morphisme

donc  $f_l = g_l \otimes_{k_l} k'$  pour  $l \geq i, j, l \geq 0$ .

Si  $\gamma_i \otimes_{k_i} k \xrightarrow{f_e} \gamma_j \otimes_{k_j} k$ ,  $\dots$  vérifient  $f_e \otimes_{k_e} k' = g_e \otimes_{k_e} k'$

alors on que  $B_j \otimes_{k_j} k'_e \xrightarrow{g_e} A_i \otimes_{k_i} k'_e, f_e = g_e$

$$\begin{array}{ccc} B_j \otimes_{k_j} k'_e & \xrightarrow{g_e} & A_i \otimes_{k_i} k'_e \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_j \otimes_{k_j} k' & \xrightarrow{g'_e} & A_i \otimes_{k_i} k' \end{array}$$

2<sup>ème</sup> cas: cas général  $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$   $X_\alpha = \text{Spec } R_\alpha$

Si  $f'_e = g'_e$  comme ci dessus, alors  $\forall \alpha \in A$   $f_\alpha = g_\alpha$   
 et donc  $f_\alpha = g_\alpha \forall \alpha \in A$ , d'où  $f = g$ .

Si  $\gamma'_i \xrightarrow{h} \gamma'_j$  et un  $X'$ -morphisme,  
 $\gamma'_{\alpha_i} \xrightarrow{h|_{X_\alpha}} \gamma'_{\alpha_j} \xrightarrow{\quad} X'_\alpha \xrightarrow{\quad} \quad$

donc  $h|_{X_\alpha} = f_\alpha$   
 pour  $\gamma_i \otimes_{k_i} k \xrightarrow{f_\alpha} \gamma_j \otimes_{k_j} k$

comme  $X$  quasi compact on peut supposer  $|A| < \infty$   
 et le  $\varinjlim$  même l'ordre pour tout les  $\alpha$ . Comme  $f_\alpha|_{X_\beta} = f_\beta|_{X_\alpha}$   
 (d'après la fidélité), les  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  se recollent en  $\gamma_i \otimes_{k_i} k \xrightarrow{f} \gamma_j \otimes_{k_j} k$

essentiellement surjectif

1<sup>er</sup> cas :  $X = \text{Spec } R \quad \text{Spec } A' = Y' \rightarrow X' = \text{Spec } R' \in \text{ob } \text{Res } X'$   
 $A', R'$  algèbres finies étale, donc de

présentation finie :  $A' = R'[\frac{x_1, \dots, x_m}{(P_1, \dots, P_n)}]$   $P_i \in R'[x_1, \dots, x_m]$

en choisissant  $i \gg 0 \quad P_{i,j} \in R_i[x_1, \dots, x_m]$ ,

d'où  $A' = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$   $A_i = R_i[\frac{x_1, \dots, x_m}{(P_{i,1}, \dots, P_{i,n})}]$

$A_i/R_i$  est non ramifié car ses fibres géométriques sont celles de  $A'/R'$   
 et plat [vérification facile]

donc est étale. Et quitte à changer de  $i$ ,  $A_i$  est finie sur  $R_i$ .

2<sup>ème</sup> cas : cas général.

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \quad X_\alpha = \text{Spec } R_\alpha \quad |A| < \infty$$

Si  $Y' \rightarrow X' \in \text{Res } X$ , alors  $Y'_{|X'_\alpha} \rightarrow X'_\alpha \in \text{Res}(X'_\alpha)$ , d'après le premier cas

$$Y'_{|X'_\alpha} = (Y_{\alpha i})' \quad Y_{\alpha i} \rightarrow X_{\alpha i} \in \text{Res}(X_{\alpha i})$$

De plus on dispose de  $(Y_{\alpha i}|_{X_{\beta i}})' \simeq Y'_{|X'_\alpha \cap X'_\beta} \simeq (Y_{\beta i}|_{X_{\alpha i}})'$

Comme  $X_\alpha \cap X_\beta$  quasi compact (si  $X$  quasi séparé) le caractère plein

donne  $Y_{\alpha i}|_{X_{\beta i}} \simeq Y_{\beta i}|_{X_{\alpha i}}$  et le caractère fidèle  $\Psi_{i \alpha \beta} = \Psi_{i \beta \alpha} \circ \Psi_{i \alpha \beta}$

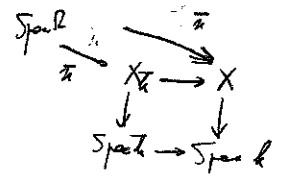
donc les  $Y_{\alpha i} \rightarrow X_{\alpha i}$  se recollent en  $Y_i \rightarrow X_i$ .

## II La conjecture des sections

1 L'application  $s_x$

$X/k$  schéma comme au I  $k$  corps

$\bar{a} : \text{Spec } \bar{k} \rightarrow X$  point géométrique



$$1 \rightarrow \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{a}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{a}) \rightarrow G_k \rightarrow 1$$

Si  $a \in X(k)$

$$1 \rightarrow \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{a}) \rightarrow \pi_1(X, a) \xrightarrow{\sigma_a} G_k \rightarrow 1$$

Un chemin étal  $\text{Res } X_{\bar{k}} \xrightarrow[\bar{a}^*]{\bar{a}^*} E_{\bar{a}}$

induit

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{a}) & \rightarrow & \pi_1(X, \bar{a}) & \xrightarrow{\sigma_a} & G_k \rightarrow 1 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \parallel \\ 1 & \rightarrow & \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{a}) & \xrightarrow{c \gamma c^{-1}} & \pi_1(X, \bar{a}) & \xrightarrow{\quad} & G_k \rightarrow 1 \end{array}$$

on pose  $\tau_a(g) = c \sigma_a(g) c^{-1} \quad \forall g \in G_k$

$[\tau_a]$  bien définie dans  $\text{Hom } \text{Emb}_{G_k}(G_k, \pi_1(X, \bar{a}))$

$\left\{ \tau : G_k \rightarrow \pi_1(X, \bar{a}) \mid \tau \circ \sigma = \text{id} \right\}$   
 $\tau$  : conjugaison des sections

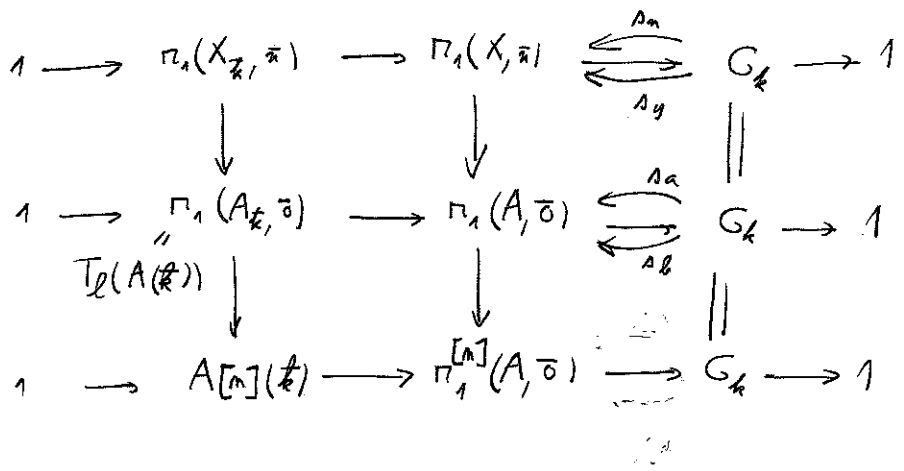
Conjecture Si  $X$  est une courbe de genre  $\geq 2$   $k$  de type fini /  $\mathbb{Q}$  propre

alors  $s_x : X(k) \rightarrow \text{Hom } \text{Emb}_{G_k}(G_k, \pi_1(X, \bar{a}))$  est une bijection

2 l'injectivité

$x, y \in X(k) \quad / \quad [x] = [y]$

$\alpha$  définit  $i: X \hookrightarrow A = \text{Pic}_{X/k}^0$  immersion fermée



$\Delta_{A,i}: A(k) \longrightarrow H^1(G_k, A^{[n]}(\bar{k})) \simeq H^1(\text{Spec } k)_{\text{ét}}, A^{[n]}$

Kummer  $\partial_m: A(k) \longrightarrow H^1(\text{Spec } k)_{\text{ét}}, A^{[m]}$

$\text{Ker } \partial_m = m A(k)$

Lemme  $\partial_m = \Delta_{A,m}$  preuve ...

Conséquence :  $\forall m \geq 1 \implies a-b \in \text{Ker } (\Delta_{A,m}) = \text{Ker } (\partial_m) = m A(k)$

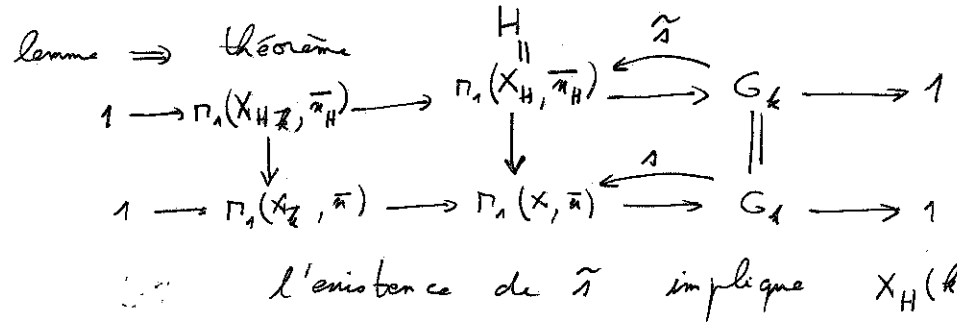
Comme (Modell Weil)  $A(k)$  est de type fini  $a-b=0$ .

### 3 Conjecture faible

enonc Hom Ent  $G_k(G_k, \pi_1(X, \bar{\pi})) \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$

Théorème (Tamagawa)  
 Conjecture faible  $\Rightarrow$  conjecture forte

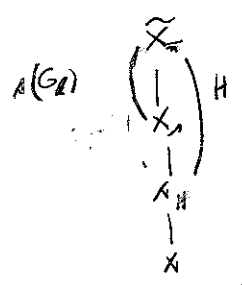
lemme  $1 \rightarrow \pi_1(X_k, \bar{\pi}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{\pi}) \xleftarrow{\lambda} G_k \rightarrow 1$   
 $\exists a \in X(k) \mid \lambda = \lambda_a \iff \forall H < \pi_1(X, \bar{\pi})$  Howart  $\lambda(G_k) < H$   $X_H(k) \neq \emptyset$



rem on doit montrer la conjecture faible pour toute courbe

$\therefore$  l'existence de  $\tilde{\lambda}$  implique  $X_H(k) \neq \emptyset$ .

preuve du lemme  $\Leftarrow \lambda(G_k) < \pi_1(X, \bar{\pi})$  fermé  $\lambda(G_k) = \bigcap H$   $\lambda(G_k) < H < \pi_1(X, \bar{\pi})$  ouvert

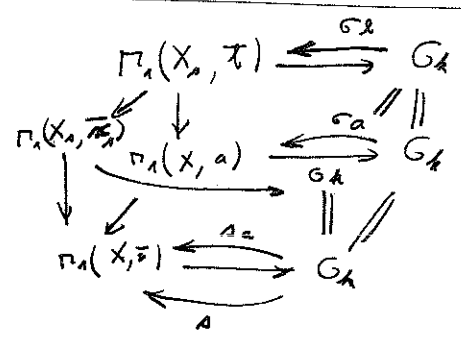
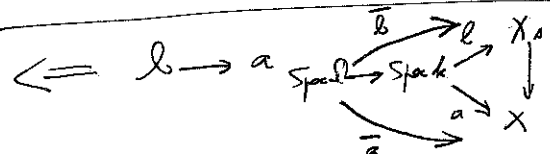


$(X_n, \bar{\pi}_n) = \varprojlim_H (X_H, \bar{\pi}_H)$   
 $X_n(k) = \varprojlim_H X_H(k) \neq \emptyset$

car  $X_H(k)$  fini (Faltings - Mordell)  $\neq \emptyset$  par hypothèse  
 la limite est sur un ensemble filtrant

On conclut grâce à

lemme  $\lambda = \lambda_a$  pour  $a \in X(k) \iff a \in \text{Im}(X_n(k) \rightarrow X(k))$



le choix de  $d : \text{Res}(X_n, \bar{\pi}) \xrightarrow{\bar{b}^*} \mathcal{E}_{ns}$  induit  
 $\lambda_a(G_k) = \pi_1(X_n, \bar{\pi}_n) = \lambda(G_k)$   
 donc  $\lambda = \lambda_a$

# 4. Variantes

a) pro  $\uparrow$

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{\omega}) & \rightarrow & \pi_1(X, \bar{\omega}) & \rightarrow & G_k \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 1 & \rightarrow & \pi_1^{(\uparrow)}(X_{\bar{k}}, \bar{\omega}) & \rightarrow & \pi_1^{(\uparrow)}(X, \bar{\omega}) & \rightarrow & G_k \rightarrow 1
 \end{array}$$

Thm (Mochizuki 1999)  $X/k$   $X$  courbe hyperbolique  $k$  sans racine  
 $s_X: X(k) \rightarrow \text{Hom}_{G_k}(G_k, \pi_1^{(\uparrow)}(X, \bar{\omega}))$  est injective

rem résulte de la caractérisation anabélienne des courbes hyperboliques de M. (beaucoup plus difficile que l'injectivité).

Thm (Hoshi 2010)  $s_X$  n'est pas toujours surjective  
 ( $k$  corps de nombres,  $X$  hyperbolique)  $\rightarrow$  voir Anna

b) abélienne

$$1 \rightarrow \pi_1^{ab}(X_{\bar{k}}, \bar{\omega}) \xrightarrow{\text{"ab"}} \pi_1(X, \bar{\omega}) \rightarrow G_k \rightarrow 1$$

def (Stin)  $X/k$  satisfait la conjecture de sections faible pour les 0-cycles si  
 $CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z} \iff$  la suite se scinde

Thm La suite se scinde  $\iff [Alb'_{X/k}]$  est dans le sous groupe divisible maximal de  $H^1(G_k, \underline{Alb}^{\circ}_{X/k})$   
 ( $X/k$  line projective géom. intégrale/k parfait) (Harari - Izumida 2009)

rem  $\text{Th. 9}$  contient un ensemble de courbe de genre 2 où ce sous-groupe est nul

$$CH_0(X_{\bar{k}})^{G_k} \rightarrow \mathbb{Z} \iff [Alb'_{X/k}] = 0 \text{ dans } H^1(G_k, \underline{Alb}^{\circ}_{X/k})$$

c) birationnelle

$X$  courbe propre lisse géo connexe  $g \geq 2$   $k$  de type fini sur  $\mathbb{Q}$

$$n \in |X| \xrightarrow{1} I_n \rightarrow D_n \rightarrow G_{k(n)} \rightarrow 1 \quad (2)$$

$$1 \rightarrow G_R(X_{\bar{k}}) \rightarrow G_{R(X)} \rightarrow G_k \rightarrow 1 \quad (1)$$

sections de (1): sections birationnelle  
 (1) provient de sections de (2) avec  $k(n) = k$ : sections cuspidales

Conjecture birationnelle: toute section birationnelle est cuspidale  
" " faible: (1) se scinde  $\implies X(k) \neq \emptyset$

rem plus précisément un point rationnel tangentiel fournit une section



lien avec SC

$$\begin{array}{ccc} \text{BSC} & \Rightarrow & \text{WBSC} \\ & \Uparrow & \\ \text{SC} & \Rightarrow & \text{WSC} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \forall X \text{ BSC} & \Leftrightarrow & \forall X \text{ WBSC} \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \forall X \text{ SC} & \Leftrightarrow & \forall X \text{ WSC} \end{array}$$

historique

1) Koenigsmann 2005

formulation de WBSC, BSC  
 preuve pour  $k$  local de car 0 (sauf  $\mathbb{F}$ ) via la théorie des modèles  
 $k/\mathbb{Q}_p$  finie  
 preuve algébrique (Pop 2010).

2)  $k$  corps de nombres  $X/k$  courbe propre lisse géom. connexe  $H^1(k, \mathbb{P}_{1,1}^0) < \infty$

Esnault-  
Wittenberg  
2010

Alors  $\exists$  une section birationnelle abélienne  $\Leftrightarrow CH_0^1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$

3) Stoll, Kani - Stein 2010

$k$  corps de nombres  $X/k$  courbe propre lisse géom. connexe  
 si  $\exists X \rightarrow A$  non constant  $A/k$  var. ab.  
 $\# A(k) < \infty \iff \# H^1(k, A) < \infty$   
 Alors WSC est vrai.

### III Représentation arithmétique

#### 1 définition

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x}) & \rightarrow & \pi_1(X, \bar{x}) & \rightarrow & G_k \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \rho_x \\
 1 & \rightarrow & \text{Inn}(\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x})) & \rightarrow & \text{Aut}(\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x})) & \rightarrow & \text{Out}(\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x})) \rightarrow 1
 \end{array}$$

Thm (Matsuno 1996)  $k$  corps de nombres,  $X$  courbe affine [...]   
 Si  $\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x})$  non commutatif  $\rho_x$  est injectif.

- Rem 1) cas  $(g, n) = (0, 3)$  Belyi 1979  $\rightarrow$  sur de Léo   
 2) Hosaki - Mochizuki 2009 Vrai aussi pour  $X$  propre de genre  $g$ .

#### 2 Conjecture principale arithmétique

##### a) Motivation

Neukirch 69  $K, K'$  finie galoisienne  $\mathbb{Q}$   $G_K = G_{K'} \Rightarrow K \simeq K'$    
 Uchida 77  $k$  corps fini  $X, Y$  courbes  $k$   $\text{Gal}_{\mathbb{R}(X)} = \text{Gal}_{\mathbb{R}(Y)} \Rightarrow X \simeq Y$

Conj de Tate (thm Faltings 83)

$A, B$  var. abélienne  $K$  corps global  $\text{Hom}_K(A, B) \otimes \hat{\mathbb{Z}} \simeq \text{Hom}_{G_k}(H_1(A_{\bar{k}}, \hat{\mathbb{Z}}), H_1(B_{\bar{k}}, \hat{\mathbb{Z}}))$

##### b) énoncé

La conjecture Néron (Grothendieck 83)   
 $X, Y$  courbes algébriques hyperboliques  $k$  de t.f  $\mathbb{Q}$

GC2 :  $\text{Hom}_k^{\text{den}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{G_k}^{\text{den}}(\pi_1(X), \pi_1(Y)) / \sim$

est une bijection

$\sim$  : pour l'action de conjugaison de  $\pi_1(Y_{\bar{k}})$

GC1 :  $\text{Hom}_k^{\text{den}}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{G_k}^{\text{den}}(\pi_1(X), \pi_1(Y))$

### 3 Résultats reconstruction sur des corps de nombres

Thara genre 0 Nakamura genre 0, 1

Thm (Tamagawa 1997)

$X, Y$  courbes affine /  $k$  de t. f. /  $\mathbb{Q}$

$$\text{hom}_k(X, Y) \longrightarrow \text{hom}_{G_k}(\pi_1(X), \pi_1(Y)) / \sim \quad \text{bijective}$$

(en particulier  $\pi_1(X) \cong_{G_k} \pi_1(Y) \implies X \cong_k Y$ )

rem 1 version entière (équivalente)

2 basé sur une version pour les corps finis suivant Uchida

3 généralisé par Mochizuki 1996 aux courbes propre (basé sur  $\ell$  + techniques log).

4 Version birationnelle (Pop 2000)

5 Version pour les corps de fonctions (Stin 2002)

Thm (Mochizuki 1999)

$k$  sous  $p$ -adique  $S$  var. alg. line  $X$  courbe hyperbolique

$$\text{Hom}_k^{\text{dom}}(S, X) \longrightarrow \text{Hom}_{G_k}^{\text{open}}(\pi_1(S), \pi_1(X)) / \sim \longrightarrow \text{Hom}_{G_k}^{\text{open}(p)}(\pi_1(S), \pi_1(X))$$

bijectives

rem via la théorie de Hodge  $p$ -adique

Corollaire  $L, M$  corps de fonction de dim arbitraire /  $K$  sous  $p$ -adique

$$\text{Hom}_K(M, L) \longrightarrow \text{Hom}_{G_K}^{\text{open}}(G_L, G_M) \quad \text{bijective}$$

rem 1 pour  $K$  de type fini /  $\mathbb{Q}$  par prouvé d'abord par Pop 2000

2 Généralise le thm de Neukirch