THÉORÈME DU CHANGEMENT DE BASE LISSE

ANNA CADORET

Contents

1. Introduction 1
2. Enoncés 2
2.1. Morphisme de changement de base 2
2.2. Interlude sur les morphismes de bord d'une suite spectrale cohomologique 2
2.3. Acyclicité 3
2.4. Théorème de changement de base 4
3. Preuve du théorème 2.4 5
3.1. Cas où $\pi : X' \to X$ est compactifiable 5
3.2. Cas général 6
4. Preuve du théorème 2.5 - esquisse 7
4.1. un critères d'acyclicité 7
4.2. Preuve du théorème 2.5 11
5. Applications 14
5.1. Invariance de la cohomolohie étale par extension de corps séparablement clos 14
5.2. Théorème de spécialisation de la cohomologie pour les morphismes propres et lisses 15
References 19

1. Introduction

Ces notes sont une version détaillée de mon exposé sur le théorème du 'changement de base lisse'. Je me suis essentiellement basée sur les trois tomes de SGA 4 et Etale Cohomology, de Milne. Comme on le verra, le théorème du 'changement de base lisse' est la conjonction de ce qu'on pourrait appeler le théorème du 'changement de base universellement localement acyclique' (théorème 2.4), qui est une conséquence du théorème du changement base propre et du fait que tout morphisme lisse est universellement localement acyclique (théorème 2.5) qui, lui, ne résulte pas du théorème de changement de base propre.

Etant donné un schéma X, on notera toujours X_{et} le petit site étale sur X et $\mathcal{S}(X_{et})$ la catégorie des faisceaux en $\mathbb{Z}$-modules sur X_{et}. On fera également l'hypothèse que tous les schémas sont localement noetheriens. En particulier, les morphismes sont automatiquement quasi-séparés. Cela permettra d'utiliser le lemme suivant.

Lemma 1.1. [SGA4, VII.5.11]('La cohomologie commute à certaines limites projectives') *Soit $(Y_j \to Y_i)_{j>i}$ et $(X_j \to X_i)_{j>i}$ deux systèmes projectifs de schémas sur X à morphismes de transition affines et $(f_i : Y_i \to X_i)_i$ un morphisme de systèmes projectifs de schémas sur X tel que les $f_i : Y_i \to X_i$ sont quasi-compacts et quasi-séparés. Notons*

$$f_\infty := \varprojlim f_i : Y_\infty := \varprojlim Y_i \to X_\infty := \varprojlim X_i$$

Pour tout i_0 et $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(Y_{i_0 et})$, notons $\mathcal{F}_i := \mathcal{F}|_{Y_i}$, $i > i_0$. Alors les morphismes canoniques

$$\varinjlim (R^n f_{i*}\mathcal{F}_i)|_{X_\infty} \tilde{\to} R^n f_{\infty *}(\mathcal{F}|_{X_\infty}),\ n \geq 0$$

Date: Rencontre ARIVAF 30 mai - 1er juin 2011, Paris.

sont des isomorphismes.

2. Enoncés

2.1. Morphisme de changement de base. A tout carré commutatif de schémas

$$\begin{tikzcd} Y & Y' \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, "\pi'"] \\ X & X' \arrow[l, "f"] \arrow[from=1-1, to=2-1, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

on peut associer des morphismes de foncteurs $\mathcal{S}(Y_{et}) \to \mathcal{S}(X'_{et})$

$$f^* R^i \pi_* \to R^i \pi'_* f'^*,\ i \geq 0$$

appelés *morphismes de changement de base* lorsque le carré ci-dessus est cartésien.
En degré i, ce morphisme est défini comme l'adjoint de la composée

$$R^i\pi_* \to R^i\pi_* f'_* f'^* \to R^i(\pi \circ f')_* f'^* = R^i(f \circ \pi')_* f'^* \to f_* R^i \pi'_* f'^*,$$

où la première flèche est le foncteur $R^i\pi_*$ appliqué au morphisme d'adjonction

$$Id \to f'_* f'^*,$$

la deuxième flèche est le morphisme de bord $E_2^{i,0} \to E^i$ de la suite spectrale de Leray

$$R^i\pi_* R^j f'_* \Rightarrow R^{i+j}(\pi \circ f')_*$$

et la dernière flèche est le morphisme de bord $E^i \to E_2^{0,i}$ de la suite spectrale de Leray

$$R^i f_* R^j \pi'_* \Rightarrow R^{i+j}(f \circ \pi')_*.$$

On voit donc qu'une condition suffisante pour que ces morphismes soient des isomorphismes est la combinaison de (1), (2), (3) et (4) ci-dessous.

1. Le morphisme d'adjonction $\mathcal{F} \to f'_* f'^* \mathcal{F}$ est un isomorphisme;
2. Le morphisme de bord $E_2^{i,0} \to E^i$ de $R^i\pi_* R^j f'_* \mathcal{F} \Rightarrow R^{i+j}(\pi \circ f')_* \mathcal{F}$ est un isomorphisme;
3. Le morphisme de bord $E^i \to E_2^{0,i}$ de $R^i f_* R^j \pi'_* \mathcal{F} \Rightarrow R^{i+j}(f \circ \pi')_* \mathcal{F}$ est un isomorphisme;
4. Le morphisme d'adjonction $f^* f_*(R^i\pi'_* f'^* \mathcal{F}) \to R^i \pi'_* f'^* \mathcal{F}$ est un isomorphisme.

2.2. Interlude sur les morphismes de bord d'une suite spectrale cohomologique. Soit

$$E_2^{i,j} \Rightarrow E^{i+j}$$

une suite spectrale cohomologique (*i.e.* $E_2^{i,j} = 0$ pour $i < 0$ ou $j < 0$). En calculant les feuilles successives en degré $(0, n)$ et $(n, 0)$, on obtient, respectivement

$$E_2^{0,n} \hookleftarrow E_3^{0,n} \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow E_\infty^{0,n} \twoheadleftarrow E^n$$

et

$$E_2^{n,0} \twoheadrightarrow E_3^{n,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_\infty^{n,0} \hookrightarrow E^n.$$

Ce sont ces composées $E^n \to E_2^{0,n}$ et $E_2^{n,0} \to E^n$ qu'on appelle les *morphismes de bords*. Par définition d'une suite spectrale cohomologique, on voit immédiatement que

$$\begin{array}{lll} E_2^{i,j} = 0,\ i+j \geq n,\ i \geq 1 & \Rightarrow & E_\infty^{0,n} \tilde{\to} E_2^{0,n} \\ E_2^{i,n-i} = 0,\ i \geq 1 & \Rightarrow & E^n \tilde{\to} E_\infty^{0,n} \\ E_2^{i,j} = 0,\ i+j \leq n,\ j \geq 1 & \Rightarrow & E_2^{n,0} \tilde{\to} E_\infty^{n,0} \\ E_2^{n-j,j} = 0,\ j \geq 1 & \Rightarrow & E_\infty^{n,0} \tilde{\to} E^n \end{array}$$

Les conditions suffisantes (1), (2), (3) et (4) du paragraphe précédent sont donc impliquées par

1. Le morphisme d'adjonction $\mathcal{F} \to f'_* f'^* \mathcal{F}$ est un isomorphisme;
2. $R^j f'_* \mathcal{F} = 0,\ j \geq 1$;
3. $R^i f_* \mathcal{F} = 0,\ i \geq 1$;

(4) Le morphisme d'adjonction $f^*f_*(R^i\pi'_*f'^*\mathcal{F}) \to R^i\pi'_*f'^*\mathcal{F}$ est un isomorphisme.

Les propriétés (1), (2), (3), lorsqu'on se restreint aux morphismes $\pi : Y \to X$ étales de présentation finie (ou quasi-finis), caractérisent la notion d'acyclicité, qui est la 'bonne' notion pour que les morphismes de changement de base soient des isomorphismes.

2.3. **Acyclicité.**

Proposition 2.1. *Soit Soit $\mathcal{P}$ un ensemble (éventuellement vide) de nombre premier et $f : Y \to X$ un morphisme de schémas. Pour tout $g : X' \to X$, on utilisera les notations suivantes*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ X & X' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

Les conditions (1) à (4) ci-dessous sont alors équivalentes.

(1) *Pour tout morphisme $g : X' \to X$ étale de présentation finie et pour tout faisceau $\mathcal{F}' \in \mathcal{S}(X'_{et})$ de torsion dont la torsion est première à $\mathcal{P}$, le morphisme d'adjonction*
$$\mathcal{F}' \to f'_*f'^*\mathcal{F}'$$
est un isomorphisme et $R^if'_*(f'^*\mathcal{F}') = 0$, $i \geq 1$.

(2) *Pour tout morphisme $g : X' \to X$ étale de présentation finie et pour tout faisceau $\mathcal{F}' \in \mathcal{S}(X'_{et})$ de torsion dont la torsion est première à $\mathcal{P}$, les morphismes canoniques*
$$\mathrm{H}^i(X', \mathcal{F}') \to \mathrm{H}^i(Y', f'^*\mathcal{F}'),\ i \geq 0$$
sont des isomorphismes.

(3) *Pour tout morphisme $g : X' \to X$ quasi-fini et pour tout faisceau $\mathcal{F}' \in \mathcal{S}(X'_{et})$ de torsion dont la torsion est première à $\mathcal{P}$, le morphisme d'adjonction*
$$\mathcal{F}' \to f'_*f'^*\mathcal{F}'$$
est un isomorphisme et $R^if'_*(f'^*\mathcal{F}') = 0$, $i \geq 1$.

(4) *Pour tout morphisme $g : X' \to X$ quasi-fini et pour tout faisceau $\mathcal{F}' \in \mathcal{S}(X'_{et})$ de torsion dont la torsion est première à $\mathcal{P}$, les morphismes canoniques*
$$\mathrm{H}^i(X', \mathcal{F}') \to \mathrm{H}^i(Y', f'^*\mathcal{F}'),\ i \geq 0$$
sont des isomorphismes.

On dit qu'un morphisme $f : Y \to X$ qui vérifie les conditions équivalentes (1), (2), (3), (4) ci-dessous est *$\mathcal{P}$-acyclique*. On dit qu'un morphisme $f : Y \to X$ est *localement $\mathcal{P}$-acyclique* si pour tout $y \in Y$ le morphisme induit $\mathrm{spec}(\mathcal{O}_{Y,\overline{y}}) \to \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{X,\overline{f(y)}})$ est $\mathcal{P}$-acyclique. Enfin, on dit qu'un morphisme $f : Y \to X$ est *universellement (localement) $\mathcal{P}$-acyclique* si pour tout morphisme $g : X' \to X$, le morphisme $f' : Y' \to X'$ est encore (localement) $\mathcal{P}$-acyclique.

Remark 2.2. Attention, un morphisme $\mathcal{P}$-acyclique n'est pas forcément localement $\mathcal{P}$-acyclique. Pour le lien, relativement subtil, entre acyclicité et acyclicité locale, *cf.* théorème 4.5.

Preuve de la proposition 2.1. (3) $\Rightarrow$ (1) et (4) $\Rightarrow$ (2) sont immédiats puisque tout morphisme étale de présentation finie est quasi-fini.

Montrons d'abord (1) $\Leftrightarrow$ (2). (2) implique que $R^iId_{X'*}\mathcal{F}' \tilde{\to} R^if'_*\mathcal{F}'$, $0 \leq i \leq n$ donc (1). Pour (1) $\Rightarrow$ (2), rappelons que le morphisme canonique $\mathrm{H}^i(X', \mathcal{F}') \to \mathrm{H}^i(Y', f'^*\mathcal{F}')$ est défini comme la composée
$$\mathrm{H}^i(X', \mathcal{F}') \overset{(a)}{\to} \mathrm{H}^i(X', f'_*f'^*\mathcal{F}') \overset{(b)}{\to} \mathrm{H}^i(Y', f'^*\mathcal{F}'),$$
où (a) est le foncteur sections globales appliqué au morphisme d'adjonction $\mathcal{F}' \to f'_*f'^*\mathcal{F}'$ et (b) est le bord de la suite spectrale de Leray
$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^q(X', R^pf'_*f'^*\mathcal{F}') \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X', f'^*\mathcal{F}')$$

(1) implique, d'une part, que (a) est un isomorphisme et, d'autre part, que $E_2^{p,q}=0$, $p\geq 1$, ce qui à son tour implique que (b) est un isomorphisme, $i\geq 0$. Notons que l'argument ci-dessus montre également (3) $\Leftrightarrow$ (4).

Montrons maintenant (1) $\Rightarrow$ (3). Comme (3) est locale sur X'_{et}, le lemme suivant permet de se ramener au cas où $g:X'\to X$ est *fini*.

Lemma 2.3. [M80, VI 6.4.7] (les morphismes quasi-finis sont finis localement pour la topologie étale) *Pour tout morphisme $g:X'\to X$ quasi-fini, il existe un recouvrement $u_i:X'_i\to X'$, $i\in I$ dans X'_{et} tel que, pour tout $i\in I$ on a un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[d, "u_i"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X'_i \arrow[l, "g_i"'] \arrow[d, "u'_i"] \\ X & X' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

avec $u_i:X_i\to X$ étale et $g_i:X'_i\to X_i$ fini.

Or, pour un morphisme $g:X'\to X$ fini, le foncteur $g_*:\mathcal{S}(X'_{et})\to\mathcal{S}(X_{et})$ est exact et commute à tout changement de base [M80, II 3.5.c, 3.6 et 3.8]. En particulier

$$g_*R^if'_*(f'^*\mathcal{F}')=R^ig_*f'_*(f'^*\mathcal{F}')=R^i(g\circ f')_*(f'^*\mathcal{F}')=R^i(f\circ g')_*(f'^*\mathcal{F}')=R^if_*g'_*(f'^*\mathcal{F}')=R^if_*(f^*g_*\mathcal{F}')$$

Comme $f:Y\to X$ est acyclique, le morphisme d'adjonction $g_*\mathcal{F}'\to f_*(f^*g_*\mathcal{F}')$ est un isomorphisme et $R^if_*(f^*\pi_*\mathcal{F}')=0$, $i\geq 1$. On en déduit (3) en passant aux germes et en utilisant que $g:Y\to X$ est fini donc surjectif. $\square$

2.4. **Théorème de changement de base.**

Theorem 2.4. (Changement de base universellement localement acyclique) *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers. Pour tout carré cartésien de schémas*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, "\pi'"] \\ X & X' \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

avec $f:X'\to X$ universellement localement acyclique pour $\mathcal{P}$ et $\pi:Y\to X$ quasi-compact et pour tout $\mathcal{F}\in\mathcal{S}(Y_{et})$ de torsion dont la torsion est première à $\mathcal{P}$, les morphismes de changement de base

$$f^*R^i\pi_*\mathcal{F}\to R^i\pi'_*f'^*\mathcal{F},\ i\geq 0$$

sont des isomorphismes.

Le théorème qu'on appelle classiquement le théorème du changement de base lisse est la combinaison du théorème 2.4 et de l'énoncé suivant.

Theorem 2.5. *Tout morphisme lisse $f:X'\to X$ est universellement localement acyclique pour char(X) (où char(X) désigne l'ensemble des caractéristiques résiduelles de X).*

Dans la suite de cet exposé je vais

- Donner la preuve du théorème 2.4;
- Esquisser la preuve du théorème 2.5;
- Enoncer et prouver deux applications classiques des théorèmes 2.4 et 2.5 à savoir
– L'invariance de la cohomologie étale par extension de corps séparablement clos;
– La spécialisation de la cohomologie étale pour un morphisme propre et universellement localement acyclique.

3. Preuve du théorème 2.4

3.1. **Cas où $\pi : X' \to X$ est compactifiable.** Soit

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \overline{Y} \arrow[dl, "\overline{\pi}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

une compactification de $\pi : Y \to X$ *i.e.* $\overline{\pi} : Y \to X$ est propre et $i : Y \hookrightarrow \overline{Y}$ est une immersion ouverte (pas forcément d'image dense). On considère les notations

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f"'] & \overline{Y}' \arrow[l, "\overline{\pi}'"'] \arrow[d, "\overline{f}'"] \arrow[dl, phantom, "\square(1)"] & Y' \arrow[l, "i'"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[dl, phantom, "\square(2)"] \\ X & \overline{Y} \arrow[l, "\overline{\pi}"] & Y \arrow[l, "i"] \end{tikzcd}$$

On va montrer que les morphismes de changement de base sont des isomorphismes dans les deux carrés cartésiens (1) et (2) et en déduire que les morphismes de changement de base sont des isomorphismes dans le carré cartésien $(1) - (2)$ en passant à la limite dans les suites spectrales de Leray associées aux composées des flèches horizontales. Le fait que les morphismes de changement de base sont des isomorphisme dans (1) résulte du théorème de changement de base propre et le fait que les morphismes de changement de base sont des isomorphisme dans (2) résulte de l'acyclicité locale de $f : X' \to X$.

Plus précisément, le théorème du changement de base propre (pour $\overline{\pi} : \overline{X}' \to X$ et $R^j i_* \mathcal{F}'$) implique que les morphismes de changement de base

$$f^* R^i \overline{\pi}_* (R^j i_* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} R^i \overline{\pi}'_* \overline{f}'^* (R^j i_* \mathcal{F}),\ i, j \geq 0$$

sont des isomorphismes. Par ailleurs, les morphismes de changement de base

$$\overline{f}'^* R^j i_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R^j i'_* f'^* \mathcal{F},\ j \geq 0$$

sont aussi des isomorphismes. En effet, pour tout $y' \in \overline{Y}'$ notons

$$\tilde{\overline{Y}}' := \operatorname{spec}(\mathcal{O}_{\overline{Y}', \overline{y}'}),\ \tilde{\overline{Y}} := \operatorname{spec}(\mathcal{O}_{\overline{Y}, \overline{f}'(\overline{y}')})$$

et considérons le cube commutatif suivant, dont les quatres faces latérales sont supposées cartésiennes.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{Y} \arrow[dl] \arrow[dd] & & \tilde{Y}' \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[dd] \\ Y \arrow[dd] & & Y' \arrow[ll] \arrow[dd] & \\ & \tilde{\overline{Y}} \arrow[dl] & & \tilde{\overline{Y}}' \arrow[ll] \arrow[dl] \\ \overline{Y} & & \overline{Y}' \arrow[ll] & \end{tikzcd}$$

Avec ces notations, on a

$$\mathrm{H}^j(\tilde{Y}, \mathcal{F}|_{\tilde{Y}}) = (R^j i_* \mathcal{F})_{\overline{f}(\overline{y}')} = (\overline{f}'^* R^j i_* \mathcal{F})_{\overline{y}'} \to R^j i'_* f'^* \mathcal{F}_{\overline{y}'} = \mathrm{H}^j(\tilde{Y}', f'^* \mathcal{F}|_{\tilde{Y}'})$$

Comme $f : X' \to X$ est universellement localement acyclique, il en est de même de $\overline{f}' : \overline{Y}' \to \overline{Y}$. Donc $\tilde{\overline{f}}' : \tilde{\overline{Y}}' \to \tilde{\overline{Y}}$ est acyclique et, par conséquent, $\mathrm{H}^j(\tilde{Y}, \mathcal{F}|_{\tilde{Y}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^j(\tilde{Y}', f'^* \mathcal{F}|_{\tilde{Y}'})$ est un isomorphisme. En appliquant les foncteurs $R^i \overline{\pi}'_*$ aux isomorphismes $\overline{f}'^* R^j i_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R^j i'_* f'^* \mathcal{F}$, on obtient des isomorphismes

$$f^* R^i \overline{\pi}_* (R^j i_* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} R^i \overline{\pi}'_* (\overline{f}'^* R^j i_* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} R^i \overline{\pi}'_* (R^j i'_* f'^* \mathcal{F}),\ i, j \geq 0.$$

ces isomorphismes forment un isomorphismes des suites spectrales de Leray

$$\begin{tikzcd} f^*R^i\overline{\pi}_*(R^j i_*\mathcal{F}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & f^*R^{i+j}\pi_*\mathcal{F} \\ R^i\overline{\pi}'_*(R^j i'_* f'^*\mathcal{F}) \arrow[r, Rightarrow] & R^{i+j}\pi'_* f'^*\mathcal{F} \end{tikzcd}$$

et on peut vérifier que l'isomorphisme induit sur les termes limites est bien le morphisme de changement de base.

Remark 3.1. Rappelons que, d'après Nagata, tout morphisme $\pi : Y \to X$ séparé de type fini entre schémas quasi-compacts et quasi-séparés est compactifiable [C07].

3.2. **Cas général.** Dans le cas où $\pi : Y \to X$ n'est pas compactifiable, on se ramène au cas compactifiable par des recouvrements ouverts Zariski. Comme la question est locale sur X_{et} donc *a fortiori* sur X_{zar}, on peut supposer que $X = \mathrm{spec}(A)$ est affine. Fixons également un ouvert affine $V = \mathrm{spec}(B)$ de Y et écrivons

$$B = \varinjlim C$$

où C parcourt l'ensemble des sous A-algèbres de type fini de B. Alors

$$V = \varprojlim (W := \mathrm{spec}(C))$$

et chaque morphisme $W \to X$ est séparé de type fini donc compactifiable. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[l, "\pi'"'] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & W' \arrow[l] \arrow[d, "f'_W"'] \arrow[ll, bend right, "\pi'_{W'}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & V' \arrow[l] \arrow[d, "f'_V"] \arrow[lll, bend right, "\pi'_{V'}"'] \\ X & Y \arrow[l, "\pi"'] & W \arrow[l] \arrow[ll, bend left, "\pi_W"] & V \arrow[l] \arrow[lll, bend left, "\pi_V"] \end{tikzcd}$$

D'après 3.1, les morphismes de changement de base

$$f^*R^i\pi_{W*}(\mathcal{F}|_W) \tilde{\to} R^i\pi'_{W'*}f'^*_W(\mathcal{F}|_W),\ i \geq 0$$

sont des isomorphismes. D'après le lemme 1.1, on en déduit que les morphismes de changement de base

$$f'^*R^i\pi_{V*}(\mathcal{F}|_V) \tilde{\to} R^i\pi'_{V'*}f'^*_V(\mathcal{F}|_V),\ i \geq 0$$

sont aussi des isomorphismes.
Comme X est affine donc quasi-compact et $\pi : Y \to X$ est quasi-compact, Y est aussi quasi-compact. La conclusion résulte du lemme suivant par récurrence sur le nombre d'ouverts affines couvrant Y (noter que si $V \hookrightarrow Y$ est une immersion ouverte et $Y \to X$ est compactifiable alors $V \hookrightarrow Y \to X$ est automatiquement compactifiable).

Lemma 3.2. *Étant donné un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[l, "\pi'"'] \arrow[d, "f'"] \\ X & X' \arrow[l, "\pi"] \end{tikzcd}$$

et deux ouverts Y_i, $i = 1, 2$ de Y tels que $Y = Y_1 \cup Y_2$. Notons $Y_{1,2} := Y_1' \times_Y Y_2$ et

$$\begin{tikzcd}
X' & Y' \arrow[l, "\pi'"'] \arrow[d, "f'"] & Y_i' \arrow[l] \arrow[d, "f_i'"] \arrow[ll, bend right, "\pi_i'"'] & Y_{1,2}' \arrow[l] \arrow[d, "f_{1,2}'"] \arrow[lll, bend right, "\pi_{1,2}'"'] \\
X \arrow[u, phantom] & Y \arrow[l, "\pi"] \arrow[ul, phantom, "\square"] & Y_i \arrow[l] \arrow[ll, bend left, "\pi_i"] \arrow[ul, phantom, "\square"] & Y_{1,2} \arrow[l] \arrow[lll, bend left, "\pi_{1,2}"] \arrow[ul, phantom, "\square"]
\end{tikzcd}$$

avec $f : X' \to X$.

Si le morphisme de changement de base est un isomorphisme pour $\pi_i : Y_i \to X$, $\mathcal{F}|_{Y_i}$, $i = 1, 2$ et $\pi_{1,2} : Y_{1,2} \to X$, $\mathcal{F}|_{Y_{1,2}}$ alors c'est aussi un isomorphisme pour $\pi : Y \to X$, $\mathcal{F}$

Preuve. On considère les suites exactes longues de Mayer-Vietoris[1] pour $\mathcal{F}$ et le recouvrement $\{Y_1, Y_2\}$ (resp. $f'^*\mathcal{F}$ et le recouvrement $\{Y_1', Y_2'\}$).

$$\cdots \to R^{i-1}\pi_{1,2*}\mathcal{F}|_{Y_{1,2}} \to R^i\pi_*\mathcal{F} \to R^i\pi_{1*}\mathcal{F}|_{Y_1} \oplus R^i\pi_{2*}\mathcal{F}|_{Y_2} \to \dots$$

$$\cdots \to R^{i-1}\pi'_{1,2*}f'^*_{1,2}\mathcal{F}|_{Y_{1,2}} \to R^i\pi'_*f'^*\mathcal{F} \to R^i\pi'_{1*}f_1'^*\mathcal{F}|_{Y_1} \oplus R^i\pi'_{2*}f_2'^*\mathcal{F}|_{Y_2} \to \dots$$

En appliquant le foncteur exact f^* à la première, on obtient un morphisme de suite exacte longue

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & f^*R^{i-1}\pi_{1,2*}\mathcal{F}|_{Y_{1,2}'} \arrow[r] \arrow[d, "(b_{i-1})"'] & f^*R^i\pi_*\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & f^*R^i\pi_{1*}\mathcal{F}|_{Y_1} \oplus f^*R^i\pi_{2*}\mathcal{F}|_{Y_2} \arrow[r] \arrow[d, "(a_i)"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & R^{i-1}\pi'_{1,2*}f'^*_{1,2}\mathcal{F}|_{Y_{1,2}} \arrow[r] & f^*R^i\pi_*\mathcal{F} \arrow[r] & R^i\pi'_{1*}f_1'^*\mathcal{F}|_{Y_1} \oplus R^i\pi'_{2*}f_2'^*\mathcal{F}|_{Y_2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

où les flèches (b_{i-1}) et (a_i) sont les morphismes de changement de base donc des isomorphismes. On conlut par récurrence sur i. $\square$

4. Preuve du théorème 2.5 - esquisse

4.1. **un critères d'acyclicité.** On va utiliser le critère d'acyclicité ci-dessous (théorème 4.5) pour montrer que tout morphisme lisse est universellement localement acyclique. Commençons par montrer qu'un morphisme est localement acyclique si et seulement si, après tout changement de base étale de présentation finie, il vérifie le théorème 2.4 pour les changements de base quasi-fini.

Lemma 4.1. *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers. Un morphisme $f : Y \to X$ est localement $\mathcal{P}$-acyclique si et seulement si pour tout diagramme*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[dl, phantom, "\square"] & Y'' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f''"] \arrow[dl, phantom, "\square"] \\
X & X' \arrow[l, "j"] & X'' \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

où $j : X' \to X$ est un morphisme étale de présentation finie et $g : X'' \to X'$ un morphisme quasi-fini et pour tout $\mathcal{F}'' \in \mathcal{S}(X''_{et})$ de torsion dont la torsion est première à $\mathcal{P}$, les morphismes de changement de base

$$f'^*R^ig_*\mathcal{F}'' \to R^ig'_*f''^*\mathcal{F}'',\ i \geq 0$$

sont des isomorphismes.

[1]Etant donné un morphisme $\pi : Y \to X$ et et un recouvrement $\mathcal{U} := \{Y_1, Y_2\}$ dans Y_{zar}, la suite exacte longue de Mayer-Vietoris se déduit de la suite spectrale de Cech

$$E_2^{p,q} = \check{\mathrm{H}}_{et}(\mathcal{U}/Y, \mathcal{F}) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(Y, \mathcal{F})$$

en observant que $E_2^{p,q} = 0$ pour $p > 1$ et en faisceautisant.

Preuve. Pour montrer que la condition est nécessaire, il suffit de vérifier que les morphismes de changement de base sont des isomorphismes sur les germes. Pour tout $y' \in Y'$ notons $x' := f'(y')$, $y := j'(y')$, $x := j(x')$, $\tilde{Y}' := \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{Y',\overline{y}'}) = \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{Y,\overline{y}}) = \tilde{Y}$, $\tilde{X}' := \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{X',\overline{x}'}) = \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{X,\overline{x}}) = \tilde{X}$, $\tilde{Y}'' := \tilde{Y}' \times_{Y'} Y''$, $\tilde{X}'' := \tilde{X}' \times_{X'} X''$ et

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y}' \arrow[d, "\tilde{f}'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \tilde{Y}'' \arrow[l, "\tilde{g}'"'] \arrow[d, "\tilde{f}''"] \\ \tilde{X}' & \tilde{X}'' \arrow[l, "\tilde{g}"] \end{tikzcd}$$

Alors on a

$$\mathrm{H}^i(\tilde{X}'', \mathcal{F}''|_{\tilde{X}''}) = (R^i g_* \mathcal{F}'')_{\overline{f'(y')}} = (f'^* R^i g_* \mathcal{F}''))_{\overline{y}'} \to (R^i g'_* f''^* \mathcal{F}'')_{\overline{y}'} = \mathrm{H}^i(\tilde{Y}'', \tilde{f}''^* \mathcal{F}''|_{\tilde{Y}''})$$

Par hypothèse, $f : Y \to X$ est localement acyclique donc $\tilde{f} = \tilde{f}' : \tilde{Y}' \to \tilde{X}'$ est acyclique et la conclusion résulte directement de la caractérisation (4) des morphismes acycliques puisque $\tilde{g} : \tilde{X}'' \to \tilde{X}'$ est quasi-fini.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. La question étant locale sur X_{et} donc *a fortiori* sur X_{zar}, on peut supposer que X est affine donc, en particulier, quasi-compact . Fixons $y \in Y$, notons $x := f(y)$, $\tilde{Y} := \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{Y,\overline{y}})$, $\tilde{X} := \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{X,\overline{x}})$ et $\tilde{f} : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ le morphisme induit. Considérons enfin

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[d, "\tilde{f}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \tilde{Y}' \arrow[l, "\tilde{g}'"'] \arrow[d, "\tilde{f}'"] \\ \tilde{X} & \tilde{X}', \arrow[l, "\tilde{g}"] \end{tikzcd}$$

où $\tilde{g} : \tilde{X}' \to \tilde{X}$ est étale de présentation finie.

D'après les lemmes 4.2 et 4.3 ci-dessous, on voit qu'il suffit de faire la preuve pour $\tilde{\mathcal{F}}' \in \mathcal{S}(\tilde{X}')$ constructible de torsion dont la torsion est première à $\mathcal{P}$.

Lemma 4.2. [A73, IV (4.2)] *Soit X un schéma. Tout faisceau de torsion sur X_{et} est limite inductive de faisceaux constructibles sur X_{et}.*

Lemma 4.3. ([M80, III 3.6.d] - la cohomologie commute aux limites inductives) *Pour tout schéma X quasi-compact et système inductif filtrant $(\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_j)_{j>I}$ dans $\mathcal{S}(X_{et})$, les morphismes canoniques*

$$\varinjlim \mathrm{H}^m(X, \mathcal{F}_i) \tilde{\to} \mathrm{H}^m(X, \varinjlim \mathcal{F}_i), \ m \geq 0$$

sont des isomorphismes.

Ecrivons $\tilde{X}$ comme limite projective

$$\tilde{X} = \varprojlim (X_\nu, \overline{x}_\nu),$$

des voisinages étales géométriques de x. D'après [EGA4-3, 8.10.5 (xi)] il existe ν et un morphisme $X'_\nu \to X_\nu$ de présentation finie tels que

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}' \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X'_\nu \arrow[l] \arrow[d] \\ X & X_\nu \arrow[l] \end{tikzcd}$$

En notant $X'_\xi := X'_\nu \times_{X_\nu} X_\xi$, $\xi \geq \nu$, on a

$$\tilde{X}' = \varprojlim X'_\xi.$$

D'après [EGA4-3, 8.10.5 (xi)], on peut de plus supposer $X'_\nu \to X_\nu$ quasi-fini.

Comme $\tilde{\mathcal{F}}'$ est constructible de torsion, il est représentable par une espace algébrique étale de présentation finie $\tilde{F}' \to \tilde{X}'$ donc, d'après [Trouver la version EA de [EGA4-3, 8.10.5 (xi)]] il existe ν, un faisceau constructible $\mathcal{F}'_\nu \in \mathcal{S}(X'_\nu)$ tel que

$$\tilde{\mathcal{F}}' = \mathcal{F}'_\nu|_{\tilde{X}'}$$

On applique alors l'hypothèse à la situation suivante

$$\begin{tikzcd} Y & Y_\nu \arrow[l, "j'_\nu"'] & Y'_\nu \arrow[l, "g'_\nu"'] \\ X \arrow[from=u, "f"'] & X_\nu \arrow[l, "j_\nu"] \arrow[from=u, "f_\nu"'] \arrow[ul, phantom, "\square"] & X'_\nu \arrow[l, "g_\nu"] \arrow[from=u, "f'_\nu"'] \arrow[ul, phantom, "\square"] \end{tikzcd}$$

pour obtenir que les morphismes de changement de base

$$f_\nu^* R^i g_{\nu *} \mathcal{F}'_\nu \tilde{\to} R^i g'_{\nu *} f_\nu^{'*} \mathcal{F}'_\nu,\ i \geq 0$$

sont des isomorphismes.

Notons $\alpha_\nu : \tilde{X} \to X_\nu$, $\beta_\nu : \tilde{Y} \to Y_\nu$ et $\alpha'_\nu : \tilde{X}' \to X'_\nu$, $\beta'_\nu : \tilde{Y}' \to Y'_\nu$ les morphismes canoniques. Alors, en appliquant α_ν^*, qui est exact, on obtient que les morphismes

$$\alpha_\nu^* f_\nu^* R^i g_{\nu *} \mathcal{F}'_\nu \tilde{\to} \alpha_\nu^* R^i g'_{\nu *} f_\nu^{'*} \mathcal{F}'_\nu,\ i \geq 0$$

sont des isomorphismes. Calculons maintenant chaque terme.

$$\begin{aligned} \alpha_\nu^* f_\nu^* R^i g_{\nu *} \mathcal{F}'_\nu &= f^* \beta_\nu^* R^i g_{\nu *} \mathcal{F}'_\nu \\ &\overset{(1)}{=} f^* R^i (\beta_\nu^* \circ g_{\nu *}) \mathcal{F}'_\nu \\ &\overset{(2)}{=} f^* R^i (\tilde{g}_* \circ \beta_\nu^{'*}) \mathcal{F}'_\nu \\ &\overset{(3)}{=} f^* (R^i \tilde{g}_*) \beta_\nu^{'*} \mathcal{F}'_\nu = f^* R^i \tilde{g}_* \tilde{\mathcal{F}}'. \end{aligned}$$

Les égalités (1) et (3) résultent de l'exactitude de β_ν^* et $\beta_\nu^{'*}$ respectivement, l'égalité (2) vient du théorème de changement de base pour les morphismes finis en observant qu'on peut se ramener au cas où $g_\nu : X'_\nu \to X_\nu$ est fini par le lemme 2.3.

$$\begin{aligned} \alpha_\nu^* R^i g'_{\nu *} f_\nu^{'*} \mathcal{F}'_\nu &\overset{(1)}{=} R^i \alpha_\nu^* g'_{\nu *} f_\nu^{'*} \mathcal{F}'_\nu \\ &\overset{(2)}{=} R^i (\tilde{g}_* \circ \alpha_\nu^{'*}) f_\nu^{'*} \mathcal{F}'_\nu \\ &\overset{(3)}{=} (R^i \tilde{g}_*) \circ \alpha_\nu^{'*} f_\nu^{'*} \mathcal{F}'_\nu \\ &= (R^i \tilde{g}_*) \circ \tilde{f}^{'*} \beta_\nu^{'*} \mathcal{F}'_\nu = (R^i \tilde{g}_*) \circ \tilde{f}^{'*} \tilde{\mathcal{F}}'. \end{aligned}$$

Là encore, les égalités (1) et (3) résultent de l'exactitude de α_ν^* et $\alpha_\nu^{'*}$ respectivement et l'égalité (2) vient du théorème de changement de base pour les morphismes finis. □

Remark 4.4. (Schémas de Jacobson) On dit qu'un schéma X est *de Jacobson* si pour tout ouvert U de X le fermé $X \setminus U$ est l'adhérence de Zariski de ses points fermés. Si $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(X_{et})$ est constructible, son support est ouvert donc, si X est de Jacobson, on a $\mathcal{F} = 0$ si et seulement si $\mathcal{F}_{\overline{x}} = 0$ pour tout point *fermé* $x \in X$. Les exemples type de schémas de Jacobson sont $\mathrm{spec}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{spec}(k)$ (avec k un corps) et tout schéma localement de type fini sur un schéma de Jacobson. On déduit de ces remarques et de la preuve du lemme 4.1 qu'un morphisme localement de type fini $f : Y \to X$ est localement acyclique si et seulement si pour tout $y \in Y$ *fermé* dans $Y_{f(y)}$, le morphisme $\tilde{f} : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ est acyclique.

Theorem 4.5. (Critère d'acyclicité locale) *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers et $f : Y \to X$ un morphisme de schémas.*

(1) *Si $f : Y \to X$ est quasi-compact, localement $\mathcal{P}$-acyclique et si pour tout $x \in X$ la fibre géométrique $f_{\overline{x}} : Y_{\overline{x}} \to \mathrm{spec}(k(x)^{sep})$ est $\mathcal{P}$-acyclique alors $f : Y \to X$ est $\mathcal{P}$-acyclique.*

(2) *Si pour tout $y \in Y$ et pour tout $x \in \tilde{X}$ la fibre géométrique $\tilde{f}_{\overline{x}} : \tilde{Y}_{\overline{x}} \to \mathrm{spec}(k(x)^{sep})$ est $\mathcal{P}$-acyclique alors $f : Y \to X$ est localement $\mathcal{P}$-acyclique.*

Preuve. Prouvons (1). Comme être $\mathcal{P}$-acyclique est une propriété locale sur X_{et} donc *a fortiori* sur X_{zar}, quitte à remplacer X par un ouvert affine, on peut supposer X quasi-compact. Soit $g : X' \to X$ un morphisme étale de présentation fini et $x' \in X'$. Considérons le point géométrique $\overline{x}' : \mathrm{spec}(k(x')^{sep}) \to X'$ et les notations suivantes

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & & Y'_{\overline{x}'} \arrow[ll, "\rho'"'] \arrow[d, "f'_{\overline{x}'}"] \\ X & X' \arrow[l, "g"] & & \mathrm{spec}(k(x')^{sep}) \arrow[ll, "\overline{x}':=\rho"] \end{tikzcd}$$

Notons d'abord que, comme $k(x')^{sep}$ est séparablement clos, $R^i\rho_* = 0$, $i \geq 1$. Notons aussi que comme $g : X' \to X$ est étale de présentation finie, on a $k(x')^{sep} = k(\pi(x'))^{sep}$ donc $f'_{\overline{x}'} = f_{\overline{\pi(x')}}$, qui est acyclique par hypothèse. En particulier

(1) (acyclicité locale de $f : Y \to X$).
En écrivant
$$k(x)^{sep} = \varinjlim K_i,$$
où $K_i \hookrightarrow k(x')^{sep}$ décrit l'ensemble des sous-$k(x')$-extensions finies de $k(x') \hookrightarrow k(x')^{sep}$, on déduit des lemmes 1.1 et 4.1 que pour tout faisceau $\mathcal{F}' \in \mathcal{S}(X'_{et})$ de torsion dont la torsion est première à $\mathcal{P}$ les morphismes de changement de base
$$f'^*R^i\rho_*(\rho^*\mathcal{F}') \to R^i\rho'_*f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}',\ i \geq 1$$
sont des isomorphismes.

(2) (acyclicité de $f'_{\overline{x}'} : Y_{\overline{x}'} \to \mathrm{spec}(k(x')^{sep})$)).
Pour tout faisceau $\mathcal{F}' \in \mathcal{S}(X'_{et})$ de torsion dont la torsion est première à $\mathcal{P}$ le morphisme d'adjonction
$$\rho^*\mathcal{F}' \tilde{\to} f'_{\overline{x}'*}f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}'$$
est un isomorphisme et $R^if'_{\overline{x}'*}f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}' = 0$, $i \geq 1$.

<u>Cas 1</u>: $\mathcal{F}' = \rho_*\rho^*\mathcal{F}'$. Le morphisme d'adjonction s'écrit
$$\rho_*\rho^*\mathcal{F}' = \mathcal{F}' \to f'_*f'^*\mathcal{F}' = f'_*(f'^*\rho_*\rho^*\mathcal{F}') \simeq f'_*(\rho'_*f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}') = (f'_*\rho'_*)f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}' = (\rho_*f'_{\overline{x}'*})f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}'$$
et l'on reconnait le foncteur ρ_* appliqué à l'isomorphisme (2) $\rho^*\mathcal{F}' \tilde{\to} f'_{\overline{x}'*}f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}'$ ci-dessus. Par ailleurs, d'après (1) ci-dessus, la suite spectrale de Leray
$$E_2^{p,q} = R^pf'_*R^q\rho'_*(f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}') \Rightarrow R^{p+q}(f' \circ \rho')f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}')$$
vérifie $E_2^{p,q} = 0$ pour $p \geq 0$ et $q \geq 1$. Donc les morphismes de bord
$$R^if'_*\rho'_*(f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}') \to R^i(f' \circ \rho')(f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}'),\ i \geq 0$$
sont des isomorphismes. D'après (1) ci-dessus (pour $i = 0$), le terme de gauche s'identifie à
$$R^if'_*f'^*\mathcal{F}' = R^if'_*f'^*(\rho_*\rho^*\mathcal{F}') \simeq R^if'_*\rho'_*(f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}').$$
Il suffit donc de montrer que le terme de droite est nul pour $i \geq 1$. Mais, d'après (2) ci-dessus, la suite spectrale de Leray
$$E_2^{p,q} = R^p\rho_*R^qf'_{\overline{x}'*}(f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}') \Rightarrow R^{p+q}(\rho \circ f'_{\overline{x}'})(f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}')$$
vérifie $E_2^{p,q} = 0$ pour $q \geq 1$. Donc les morphismes de bord
$$R^i\rho_*f'_{\overline{x}'*}(f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}') \to R^i(\rho \circ f'_{\overline{x}'})(f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}') = R^i(f' \circ \rho')(f'^*_{\overline{x}'}\rho^*\mathcal{F}'),\ i \geq 0$$
sont des isomorphismes. Et comme $R^i\rho_* = 0$ pour $i \geq 1$, on en déduit que le terme de droite est nul pour $i \geq 1$.

Cas 2: Supposons maintenant que $\mathcal{F}' \in \mathcal{S}(X'_{et})$ est de torsion de torsion première à $\mathcal{P}$. La conclusion va résulter formellement du lemme suivant et des lemmes 4.2 et 4.3.

Lemma 4.6. *Soit X un schéma quasi-compact. Alors tout faisceau constructible $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(X_{et})$ se plonge dans une somme directe finie*

$$E(\mathcal{F}) := \bigoplus_{1\leq h\leq r} \overline{x}_{h*}\overline{x}_h^*\mathcal{F}.$$

Preuve. Résulte immédiatement des définitions. □

D'après les lemmes 4.2 et 4.3, on peut supposer que $\mathcal{F}'$ est constructible donc se plonge dans une somme directe finie

$$E(\mathcal{F}') := \bigoplus_{1\leq h\leq r} \overline{x}_{h*}\overline{x}_h^*\mathcal{F}'$$

Considérons la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{F}' \to E(\mathcal{F}') \to Q(\mathcal{F}') \to 0.$$

Comme le foncteur f'^* est exact, on a encore une suite exacte courte

$$0 \to f'^*\mathcal{F}' \to f'^*E(\mathcal{F}') \to f'^*Q(\mathcal{F}') \to 0$$

et la suite exacte longue de cohomologie pour f'_* donne un morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d] & E(\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d] & Q(\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & \\
0 \arrow[r] & f'_*f'^*\mathcal{F}' \arrow[r] & f'_*f'^*E(\mathcal{F}') \arrow[r] & f'_*f'^*Q(\mathcal{F}') \arrow[r] & R^1f'_*f'^*\mathcal{F}' \arrow[r] & R^1f'_*f'^*E(\mathcal{F}') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les morphismes d'adjonction. D'après le cas 1, la flèche du milieu est un isomorphisme donc celle de gauche aussi. Cela montre que pour tout $\mathcal{F}' \in \mathcal{S}(X'_{et})$ de torsion dont la torsion est première à $\mathcal{P}$ le morphisme d'adjonction est un isomorphisme. En appliquant cela à $Q(\mathcal{F}')$, et en utilisant que, toujours d'après le cas 1 $R^1f'_*f'^*E(\mathcal{F}') = 0$, on obtient que $R^1f'_*f'^*\mathcal{F}' = 0$. Cela montre que pour tout $\mathcal{F}' \in \mathcal{S}(X'_{et})$ de torsion dont la torsion est première à $\mathcal{P}$ on a $R^1f'_*f'^*\mathcal{F}' = 0$. On conclut par récurrence sur i.

(2) se montre comme (1) en procédant par récurrence sur i. □

Remark 4.7. D'après la remarque 4.4, si on suppose de plus que $f : Y \to X$ est localement de type fini alors il suffit de vérifier le critère du théorème 4.5 (2) pour les point $y \in Y$ qui sont fermés dans $Y_{f(y)}$.

4.2. **Preuve du théorème 2.5.** La lissité étant stable par changement de base arbitraire, il suffit de montrer qu'un morphisme lisse est localement acyclique. Pour cela, on va appliquer le critère du théorème 4.5 (2). Par une série de réductions (4.2.1 - 4.2.3), on montre d'abord qu'il suffit de considérer le cas où X est le spectre d'un anneau local strictement hensélien, Y la droite affine sur X et y la section 0.

4.2.1. *Théorème de structure locale des morphismes lisses.* Rappelons qu'un morphisme $f : Y \to X$ est lisse si pour tout $y \in Y$ il existe un voisinage ouvert de Zariski V de y dans Y, un ouvert de Zariski U de X et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f"'] & V \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{A}^n_U \arrow[d] \\
X & & U, \arrow[ll, hook']
\end{tikzcd}$$

avec $\pi : V \to \mathbb{A}^n_U$ étale. Au niveau des hensélisés stricts, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Y,\overline{y}} \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{O}_{V,\overline{y}} & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_U,\pi(\overline{y})} \arrow[l, "\simeq"'] \\
\mathcal{O}_{X,f(\overline{y})} \arrow[u] \arrow[rr, "\simeq"] & & \mathcal{O}_{U,\overline{f(y)}}, \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes puisque provenant de morphismes étales. On peut donc supposer que $f : Y \to X$ est un espace affine $f : \mathbb{A}^n_X \to X$. Puis en écrivant

$$\mathbb{A}^n_X \to \mathbb{A}^{n-1}_X \to \cdots \to \mathbb{A}^1_X \to X$$

et en utilisant que la composée de deux morphismes localement acycliques est localement acyclique, on voit qu'il suffit de traiter le cas de la droite affine

$$f : Y = \mathbb{A}^1_X \to X.$$

4.2.2. *Application du critère du théorème 4.5 (2).* Comme les morphismes lisses sont localement de présentation finie, on déduit du théorème 4.5 (2) et de la remarque 4.7 qu'il suffit de traiter le cas où X est le spectre d'un anneau local A strictement hensélien de point fermé x_0 et $y \in \mathbb{A}_{k(x_0)}$ est un point fermé. En particulier, comme $k(x_0)$ est séparablement clos, l'extension $k(x_0) \hookrightarrow k(y)$ est finie purement inséparable.

4.2.3. *On peut supposer $k(x_0) = k(y)$ et $y = 0 \in \mathbb{A}^1_X$.* Cela résulte essentiellement du lemme suivant.

Lemma 4.8. *Pour tout diagramme de morphismes locaux d'anneaux locaux intègre*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & A' \\
B &
\end{tikzcd}$$

où (i) $K_A \hookrightarrow K_B$ est purement inséparable (ici K_A et K_B désignent les corps de fractions de A et B respectivement);
(ii) $A \to A'$ est fini;
l'anneau $A' \otimes_A B$ est encore un anneau local. Si, de plus B est hensélien, alors $A' \otimes_A B$ est également hensélien. En particulier, le morphisme 'canonique'

$$B^{sh} \otimes_B (B \otimes_A A') \to (B \otimes_A A')^{sh}$$

est un isomorphisme.

Preuve. Notons $\mathfrak{M}_A$ et $\mathfrak{M}_B$ les idéaux maximaux de A et B respectivement. Comme $B \to A' \otimes_A B$ est fini, les idéaux maximaux de $A' \otimes_A B$ sont exactement les idéaux premiers de $A' \otimes_A B$ au-dessus de $\mathfrak{M}_B$; ce sont aussi les idéaux maximaux de

$$k(B) \otimes_B (A' \otimes_A B) = (B/\mathfrak{M}_B) \otimes_A A' \tilde{\to} (B/\mathfrak{M}_B) \otimes_{(A/\mathfrak{M}_A)} (A'/\mathfrak{M}_A A') = k(B) \otimes_{k(A)} (A'/\mathfrak{M}_A A').$$

Mais comme $k(A) \hookrightarrow k(B)$ est purement inséparable, le morphisme

$$\mathrm{spec}(k(B) \otimes_{k(A)} (A'/\mathfrak{M}_A A')) \to \mathrm{spec}(A'/\mathfrak{M}_A A')$$

est un homéomorphisme universel. On en déduit donc que $A' \otimes_A B$ est un anneau local. La seconde assertion résulte alors du fait que toute algèbre locale finie sur un anneau local hensélien est encore un anneau local hensélien. □

Donc, si on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X' := \mathrm{spec}(A') \arrow[d] & Y' \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\square"] \\
X & Y \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

D'après la première partie du lemme 4.8, le schéma

$$Y' \times_Y \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$$

est local. Notons $y' \in Y'$ l'image de son point fermé. D'après la seconde partie du lemme 4.8, le carré de droite dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} X' := \mathrm{spec}(A') \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[l] \arrow[d] & \tilde{Y}' := \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{Y',\overline{y'}}) \arrow[l] \arrow[d] \\ X & Y \arrow[l] & \tilde{Y} := \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{Y,\overline{y}}) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

est automatiquement cartésien. Cela montre que les fibres géométriques de $\tilde{Y}' \to X'$ au-dessus des points de X'_{x_0} sont de la forme

$$\tilde{Y} \times_{k(x_0)} k' \to \mathrm{spec}(k')$$

avec $k(x_0) \hookrightarrow k'$ purement inséparable. D'après le lemme 5.2, on peut donc remplacer X par X'. Si $\overline{y} \in \mathbb{A}^1_{k(A)}$ correspond à un polynôme unitaire irréductible inséparable $\overline{P} \in k(A)[T]$ et si $P \in A[T]$ est un polynôme irréductible unitaire relevant $\overline{P}$, on peut poser $A' := A[T]/\langle P \rangle$ (qui est local, par construction) et donc supposer que $k(x_0) = k(y)$. Mais alors $\overline{y} \in \mathbb{A}^1_{k(x_0)}$ correspond à un polynôme de la forme $\overline{P} := T - \overline{a} \in k(x)[T]$ et quitte à remplacer y par son translaté par un élément $a \in \mathbb{A}^1_A$ relevant $\overline{a}$, on peut supposer que $\overline{y} = 0$ donc que $y = \langle T, \mathfrak{M}_A \rangle$ et $\tilde{Y} = \mathrm{spec}(A\{\{T\}\})$, où $A\{\{T\}\}$ est l'hensélisé du localisé de $A[T]$ en $\langle T, \mathfrak{M}_A \rangle$.

Le problème revient finalement à montrer que

Theorem 4.9. *Si A est un anneau local hensélien, les fibres géométriques de*

$$Y := \mathrm{spec}(A\{\{T\}\}) \to X := \mathrm{spec}(A)$$

sont $car(X)$-acycliques.

4.2.4. *Preuve du théorème 4.9 (esquisse).* Ecrivons

$$\mathrm{spec}(A\{\{T\}\}) = \varprojlim (Y', y')$$

comme la limite projective des voisinages étales géométriques de $\langle T, \mathfrak{M}_A \rangle$. Comme le produit tensoriel commute aux limites inductives, on a également

$$Y_{\overline{x}} = \varprojlim Y'_{\overline{x}}.$$

Notons que chaque Y' est étale sur $Y = \mathbb{A}^1_X$ donc lisse sur X; en particulier, les $Y'_{\overline{x}}$ sont des courbes affines lisses sur $k(x)^{sep}$ donc de dimension cohomologique 1 ([M80, VI 7.2] - le cas des courbes est plus facile). En utilisant à nouveau que la cohomologie commute à certaines limites projectives, on obtient que les morphismes canoniques

$$\varinjlim \mathrm{H}^i(Y'_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{Y'_{\overline{x}}}) \tilde{\to} \mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}}}),\ i \geq 0$$

sont des isomorphismes donc $\mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}}}) = 0$ pour $i \geq 2$. En définitive, il faut montrer

Lemma 4.10. *Pour tout groupe abélien fini M d'ordre premier à $car(X)$, on a*

(1) $\mathrm{H}^0(Y_{\overline{x}}, \underline{M}_{Y_{\overline{x}}}) = \mathrm{H}^0(\mathrm{spec}(k(x)^{sep}), \underline{M}) = M$
(2) $\mathrm{H}^1(Y_{\overline{x}}, \underline{M}_{Y_{\overline{x}}}) = 0$

preuve La première assertion équivaut au fait que $Y_{\overline{x}}$ est connexe et non vide et la seconde au fait que tout revêtement étale de $Y_{\overline{x}}$, galoisien de groupe M est trivial.

Preuve de (1): Comme $Y \to \mathbb{A}^1_X$ et $\mathbb{A}^1_X \to X$ sont fidèlement plats, $Y \to X$ est fidèlement plat donc, en particulier, $Y_x \neq \emptyset$. Il reste à voir que Y_x est connexe. Tout d'abord, d'après le lemme 4.8, pour toute A-algèbre locale finie $A \to A'$ le morphisme canonique $A\{\{T\}\} \otimes_A A' \tilde{\to} A'\{\{T\}\}$ est un isomorphisme. En particulier, pour tout $\mathcal{P} \in \mathrm{spec}(A)$,

$$A\{\{T\}\} \otimes_A A/\mathcal{P} \tilde{\to} A/\mathcal{P}\{\{T\}\}.$$

On peut donc supposer que A est intègre et que x est le point générique de X. Le problème revient alors à montrer que pour toute extension $K_A := Frac(A) \hookrightarrow K'$ séparable finie $Y_{K'}$ est connexe. Notons A' la clôture intégrale de A dans K'. Alors $A \to A'$ est une A-algèbre locale finie donc, d'après le lemme 4.8, on a $A\{\{T\}\} \otimes_A A' = A'\{\{T\}\}$ (et $A\{\{T\}\} \otimes_A K' = A'\{\{T\}\} \otimes_{A'} K'$). On peut donc supposer que A est normal, ce qui implique que $A[T]$ et $A\{\{T\}\}$ sont aussi normaux. En outre, on peut également supposer que A est noethérien (*cf.* [SGA4, Exp. XV, p.28] pour l'argument précis), ce qui implique encore que $A[T]$ et $A\{\{T\}\}$ sont noethériens. Donc $A\{\{T\}\} \otimes_A K_A$ est normal noetherien; d'après [EGA4-2, 6.7.4. (c)], on en déduit que $A\{\{T\}\} \otimes_A K'$ est normal donc *a fortiori* connexe.

Preuve de (2) (esquisse - pour les détails, *cf.* [SGA4, Exp. XV, 3 pp. 30-35]): Soit $Z \to Y_{\overline{x}}$ un revêtement étale, galoisien de groupe M. L'idée consiste à montrer que, quitte à remplacer A par une A-algèbre locale finie $A \to A'$, le revêtement $Z \to Y_{\overline{x}}$ provient par changement de base d'un revêtement étale $\tilde{Z} \to Y$ (qui est automatiquement trivial puisque Y est le spectre d'un anneau local strictement hensélien).

(1) Notons $\mathfrak{P} \in \mathrm{spec}(A)$ l'idéal correspondant à x. Quitte à remplacer A par la cloture intégrale de $A/\mathfrak{P}$ dans son corps des fractions, on peut supposer que X est intègre, normal de point générique x.
(2) Le revêtement $Z \to Y_{\overline{x}}$ provient par changement de base d'un revêtement étale galoisien de $Y_x \times_{k(x)} K$, où $k(x) \hookrightarrow K$ est une extension séparable finie. Donc, quitte à remplacer A par sa cloture intégrale dans K, on peut supposer que $Z \to Y_{\overline{x}}$ provient par changement de base d'un revêtement étale galoisien $Z_x \to Y_x$.
(3) En écrivant
$$\mathrm{spec}(k(x)) := \varprojlim U,$$
où U décrit l'ensemble des ouverts non vide de X et en utilisant que Y est limite inductive de schémas de présentation finie sur X, on peut montrer que le revêtement $Z_x \to Y_x$ provient par changement de base d'un revêtement étale $Z_U \to Y_U := Y \times_X U$.
(4) On montre d'abord que l'ensemble des $x' \in X \setminus U$ de codimension 1 est fini. Puis, grâce au lemme 4.11 appliqué aux anneaux de valutation discrète (on utilise ici que X est normal...) $\mathcal{O}_{X,x'}$, $x' \in X$ de codimension 1, on en déduit que, quitte à remplacer A par sa cloture intégrale dans une extension séparable finie de $k(x)$, on peut supposer que $X \setminus U$ est de codimension ≥ 2 dans X.

Lemma 4.11. (Abhyankar [SGA41/2, Arcata V - (2.3.2)]) *Soit A un anneau de valuation discrète d'uniformisante π. Notons $S := \mathrm{spec}(A)$ et η le point générique de S. Soit $T \to S$ un morphisme lisse avec T irréductible de dimension relative* 1, *soit $Y \to X_\eta$ un revêtement galoisien, étale de degré n premier à $char(S)$. Alors, en notant $S_1 := \mathrm{spec}(A[\pi^{1/n}])$, η_1 le point générique de S_1 et $X_1 := X \times_S S_1$, le revêtement $Y \times_{X_\eta} X_{1\eta_1} \to X_{1\eta_1}$ provient par changement de base d'un revêtement étale de X_1.*

***C'est ici, et ici seulement, semble-t-il, qu'intervient l'hypothèse $\mathcal{P} = char(X)$*.**

(5) Quitte à remplacer encore A par sa cloture intégrale dans une extension séparable finie de $k(x)$, on peut supposer que $Z_U \to Y_U$ est trivial au-dessus de $T = 0$. En travaillant encore un peu, on montre qu'alors $Z_U \to Y_U$ est trivial. *Cf.* [SGA41/2, Arcata V - (2.3.4)]

5. Applications

5.1. **Invariance de la cohomolohie étale par extension de corps séparablement clos.**

Theorem 5.1. *Soit $k \hookrightarrow K$ une extension de corps séparablement clos et X un schéma sur k, quasi-compact. Alors pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(X_{et})$ de torsion dont la torsion est première à $car(k)$, les morphismes* *canoniques*

$$\mathrm{H}^i(X,\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^i(X_K,\mathcal{F}|_{X_K}),\ i \geq 0$$

sont des isomorphismes.

Preuve. Tout d'abord, d'après le lemme suivant, on peut supposer k et K *algébriquement clos.*

Lemma 5.2. ([SGA4, Exp. VIII, 1.1]) *Si $f : Y \to X$ est un homéomorphisme universel*[2] *les foncteurs*

$$f_* : \mathcal{S}(Y_{et}) \to \mathcal{S}(X_{et})$$

et

$$f^* : \mathcal{S}(X_{et}) \to \mathcal{S}(Y_{et})$$

sont des équivalences de catégories pseudoinverses l'une de l'autre.

Ecrivons alors K comme limite inductive de ses sous-extensions de type fini sur k

$$K = \varinjlim K_m.$$

Les morphismes $\mathrm{spec}(K_m) \to \mathrm{spec}(k)$ sont alors lisses (comme k est déjà algébriquement clos, être lisse sur k est équivalent à être de type fini sur k et régulier). En appliquant le théorème 2.4 aux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} \mathrm{spec}(K_m) \arrow[d, "f_m"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_{K_m} \arrow[l, "\pi'_m"'] \arrow[d, "f'_m"] \\ \mathrm{spec}(k) & X \arrow[l, "\pi"] \end{tikzcd}$$

on obtient que les morphismes de changement de base

$$f_m^* R^i\pi_*\mathcal{F} \tilde{\to} R^i\pi'_{m*}f_m'^*\mathcal{F},\ i \geq 0$$

sont des isomorphismes.

En passant à la limite sur les K_m grâce au lemme 1.1, on obtient donc que les morphismes de changement de base

$$(R^i\pi_*\mathcal{F})|_{\mathrm{spec}(K)} \tilde{\to} R^i\pi_{K*}(\mathcal{F}|_{X_K}),\ i \geq 0$$

sont des isomorphismes.

Pour conclure, notons $\overline{x}_K$ et $\overline{x}_k$ les points géométriques définis par l'identité sur $\mathrm{spec}(K)$ et $\mathrm{spec}(k)$ respectivement. Alors $\overline{x}_k \circ f = x_K$. En prenant le germe en $\overline{x}_K$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^i(X,\mathcal{F}) = (R^i\pi_*\mathcal{F})_{\overline{x}_k} &= ((R^i\pi_*\mathcal{F})|_{\mathrm{spec}(K)})_{\overline{x}_K} \text{ (les germes ne dépendent pas du point géométrique)} \\ &= R^i\pi_{K*}(\mathcal{F}|_{X_K})_{\overline{x}_K} \\ &= \mathrm{H}^i(X_K,\mathcal{F}|_{X_K}). \end{aligned}$$

□

Remark 5.3. L'hypothèse 'de torsion première à $\mathrm{char}(k)$' est ici essentielle comme le montre l'exemple classique de la droite affine sur un corps k séparablement clos de caractéristique $p > 0$

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{A}^1_k, \mathbb{Z}/p) = k[T]/(Fr_p - Id)(k[T]).$$

5.2. **Théorème de spécialisation de la cohomologie pour les morphismes propres et lisses.**

[2] *I.e.* un morphisme surjectif, entier et radiciel. Par exemple, si $k \hookrightarrow K$ est une extension de corps purement inséparable et X est un schéma sur k, le morphisme $X_K \to X$ est un homéomorphisme universel.

5.2.1. *Morphisme de spécialisation.* Soit X un schéma et $x_0,\ x_1 \in X$ tels que $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$. On a donc,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{X,\overline{x}_1}) \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "u_{x_1}"] & \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{X,\overline{x}_0}) \arrow[r, "u_{x_0}"] & X \end{tikzcd}$$

Pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(X_{et})$, en appliquant le foncteur sections globales au morphisme d'adjonction

$$u_{x_0}^*\mathcal{F} \to u_*u^*u_{x_0}^*\mathcal{F} = u_*u_{x_1}^*\mathcal{F}$$

on obtient un *morphisme de (co)spécialisation*

$$\mathcal{F}_{\overline{x}_0} = \Gamma(\mathrm{spec}(\mathcal{O}_{X,\overline{x}_0}), u_{x_0}^*\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathrm{spec}(\mathcal{O}_{X,\overline{x}_0}), u_*u_{x_1}^*\mathcal{F}) = \Gamma(\mathrm{spec}(\mathcal{O}_{X,\overline{x}_1}), u_{x_1}^*\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{\overline{x}_1}.$$

Soit maintenant $f : Y \to X$ un morphisme et $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(Y_{et})$. D'après ce qui précède, on dispose d'un morphisme de spécialisation

$$(R^if_*\mathcal{F})_{\overline{x}_0} \to (R^if_*\mathcal{F})_{\overline{x}_1}.$$

Si, de plus, $f : Y \to X$ est propre et $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(Y_{et})$ est de torsion, le théorème du changement de base propre [M80, VI.2.5] montre qu'on a des isomorphismes canoniques

$$(R^if_*\mathcal{F})_{\overline{x}_0} \tilde{\to} \mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}_0}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}_0}}),\ \ (R^if_*\mathcal{F})_{\overline{x}_1} \tilde{\to} \mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}_1}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}_1}}).$$

On obtient ainsi le morphisme de spécialisation de la cohomologie pour les morphismes propres

$$\mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}_0}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}_0}}) \to \mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}_1}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}_1}})$$

Theorem 5.4. *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers, $f : Y \to X$ un morphisme propre et universellement localement $\mathcal{P}$-acyclique et $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(Y_{et})$ un faisceau constructible, localement constant dont la torsion est première à $\mathcal{P}$. Alors,*

(1) *pour tout $i \geq 0$, le morphisme de spécialisation*

$$\mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}_0}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}_0}}) \tilde{\to} \mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}_1}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}_1}})$$

est un isomorphisme;

(2) *en particulier, le faisceau $R^if_*\mathcal{F}$ est encore constructible, localement constant.*

Remark 5.5. Le point (2) du théorème 2.5 montre que, si $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(Y_{et})$ est un faisceau constructible, localement constant dont la torsion est première à $\mathcal{P}$, le groupe fondamental $\pi_1(X;x)$ agit naturellement sur $\mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}}})$. En effet, puisque $R^if_*\mathcal{F}$ est localement constant constructible, il est représentable par un revêtement étale $F_i \to X$ et $(R^if_*\mathcal{F})_{\overline{x}}(= \mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}}})$ (par le théorème du changement de base propre) s'identifie à $F_{i\overline{x}}$.

5.2.2. *Preuve de (2).* D'après le théorème du changement de base propre, on sait déjà que les $R^if_*\mathcal{F}$, $i \geq 0$ sont constructibles. Si l'on suppose (1), l'assertion (2) résulte alors directement du lemme suivant

Lemma 5.6. *Un faisceau $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(X_{et})$ à fibres finies est constructible localement constant si et seulement si pour tout $x_0,\ x_1 \in X$ tels que $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$ le morphisme de spécialisation*

$$sp_{x_0,x_1} : \mathcal{F}_{\overline{x}_0} \tilde{\to} \mathcal{F}_{\overline{x}_1}$$

est un isomorphisme.

Preuve. Un faisceau constructible localement constant étant représentable par un revêtement étale, la condition suffisante est claire. Pour la condition nécessaire, comme $\mathcal{F}_{\overline{x}_0}$ est fini, il existe un voisinage étale $U_0 \to X$ de $x_0 \in X$ tel que le morphisme canonique $\mathcal{F}(U_0) \tilde{\to} \mathcal{F}_{\overline{x}_0}$ est un isomorphisme. Notons M le groupe abélien fini $\mathcal{F}_{\overline{x}_0}$ et définissons un morphisme $\underline{M}_{U_0} \to \mathcal{F}|_{U_0}$ comme suit. Pour tout $V \to U_0$ étale le morphisme de restriction $M = \mathcal{F}(U_0) \to \mathcal{F}(V)$ définit un morphisme de préfaisceaux $M \to \mathcal{F}|_{U_0}$ donc un morphisme de faisceaux $\underline{M}_{U_0} \to \mathcal{F}|_{U_0}$. Pour tout $x \in U_0$, le morphisme de spécialisation $sp_{x_0,x_1} : \mathcal{F}_{\overline{x}_0} \to \mathcal{F}_{\overline{x}_1}$ se décompose en

$$sp_{x_0,x_1} : \underline{M}_{\overline{x}} = M = \mathcal{F}_{\overline{x}_0} \to \mathcal{F}_{\overline{x}} \to \mathcal{F}_{\overline{x}_1}.$$

Comme $sp_{x_0,x_1} : \mathcal{F}_{\overline{x}_0} \to \mathcal{F}_{\overline{x}_1}$ et $sp_{x,x_1} : \mathcal{F}_{\overline{x}} \to \mathcal{F}_{\overline{x}_1}$ sont des isomorphismes; on en déduit que $\mathcal{F}|_{U_0}$ est constant. $\square$

5.2.3. *Preuve de (1).*
5.2.3.1. Réduction au cas où $X = \mathrm{spec}(A)$ avec A anneau local strictement hensélien normal de corps de fraction séparablement clos.

Lemma 5.7. *Il existe un anneau local A strictement hensélien normal de corps de fraction séparablement clos et un morphisme $\pi : \mathrm{spec}(A) \to X$ tels que $f(s_0) = x_0$ et $f(s_1) = x_1$, où s_0 et s_1 désignent le point fermé et le point générique de A respectivement.*

Preuve. Prendre

$$\mathrm{spec}(A) \to \mathrm{spec}(A_1) \to \mathrm{spec}(A_2) \to X,$$

où, en notant $\phi : A_2 := \mathcal{O}_{X,\overline{x}_0} \to \mathcal{O}_{X,\overline{x}_1}$ le morphisme canonique et $\mathfrak{M}_{X,\overline{x}_1}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,\overline{x}_1}$, on pose

$$A_2 \to A_1 := \mathcal{O}_{X,\overline{x}_1}/\mathfrak{M}_{X,\overline{x}_1} \to A := \tilde{A}_1,$$

où $\tilde{A}_1$ est la clôture intégrale de A_1 dans la clôture séparable du corps des fractions de A_1. $\square$

Notons $X' := \mathrm{spec}(A) \to X$ et

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[l, "\pi'"'] \arrow[d, "f'"] \\ X & X' \arrow[l, "\pi"] \end{tikzcd}$$

D'après le théorème du changement de base propre [M80, VI.2.3] , les morphismes de changement de base

$$\pi^* R^i f_* \mathcal{F} \tilde{\to} R^i f'_* \pi'^* \mathcal{F},\ i \geq 0$$

sont des isomorphismes. Donc, en prenant les germes en $\overline{s}_0$ et $\overline{s}_1$, on obtient

$$(R^i f'_* \pi'^* \mathcal{F})_{\overline{s}_0} = (\pi^* R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{s}_0} = (R^i f_* \mathcal{F})_{\pi(\overline{s}_0)} = (R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{x}_0}$$

$$(R^i f'_* \pi'^* \mathcal{F})_{\overline{s}_1} = (\pi^* R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{s}_1} = (R^i f_* \mathcal{F})_{\pi(\overline{s}_1)} = (R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{x}_1}.$$

On peut donc remplacer $f : Y \to X$ par $f' : X' \to X'$ et $\mathcal{F}$ par $\pi'^* \mathcal{F}$.

On suppose donc maintenant que $X = \mathrm{spec}(A)$ avec A anneau local strictement hensélien normal de corps de fraction séparablement clos et que x_0 et x_1 sont les points fermé et générique de X respectivement. Notons que, par hypothèse, $x_0 = \overline{x}_0$ et $x_1 = \overline{x}_1$.

5.2.3.2. Suite spectrale de Leray. Considèrons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & & (R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{x}_0} \arrow[dd] \\ \mathrm{H}^i(Y, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[urr, "s_{x_0}"] \arrow[drr, "s_{x_1}"'] & \Gamma(X, R^i f_* \mathcal{F}) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & (R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{x}_1} \end{tikzcd}$$

où le morphisme vertical est le morphisme de spécialisation et, toujours d'après le théorème du changement de base propre [M80, VI.2.7], le morphisme $s_{x_0} : \mathrm{H}^i(Y, \mathcal{F}) \tilde{\to} (R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{x}_0}$ est un isomorphisme. Donc le morphisme de spécialisation $(R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{x}_0} \to (R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{x}_1}$ est un isomorphisme si et seulement si le morphisme

$$s_{x_1} : \mathrm{H}^i(Y, \mathcal{F}) \tilde{\to} (R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{x}_1} = \mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}_1}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}_1}})$$

est un isomorphisme.
Mais, avec les notations

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] & Y_{\overline{x}_1} \arrow[l, "u'_{x_1}"'] \arrow[d, "f_{x_1}"] \\ X & k(x_1) \arrow[l, "u_{x_1}:=x_1"] \arrow[ul, phantom, "\Box"] \end{tikzcd}$$

le morphisme $s_{x_1} : \mathrm{H}^i(Y, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}_1}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}_1}})$ apparaît comme la composée

$$\mathrm{H}^i(Y, \mathcal{F}) \overset{(a)}{\to} \mathrm{H}^i(Y, u'_{x_1*}(\mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}_1}})) \overset{(b)}{\to} \mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}_1}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}_1}}),$$

où la flèche (a) est le foncteur sections globales appliqué au morphisme d'adjonction

$$\mathcal{F} \to u'_{x_1*}u'^{*}_{x_1}\mathcal{F}$$

et la flèche (b) est le morphisme de bord

$$E^{0,i} \to E^i$$

de la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^q(Y, R^p u'_{x_1*}(\mathcal{F}|_{Y_{x_1}})) \Rightarrow E^{p+q} = \mathrm{H}^{p+q}(Y_{\overline{x}_1}, \mathcal{F}|_{Y_{x_1}}).$$

Pour montrer que $s_{x_1} : \mathrm{H}^i(Y, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^i(Y_{\overline{x}_1}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}_1}})$ est un isomorphisme, il suffit donc de montrer que

(a) Le morphisme d'adjonction $\mathcal{F} \tilde{\to} u'_{x_1*}u'^{*}_{x_1}\mathcal{F}$ est un isomorphisme;
(b) $R^p u'_{x_1*}(\mathcal{F}|_{Y_{x_1}}) = 0$, $p \geq 1$ (donc $E_2^{p,q} = 0$, $p \geq 1$).

5.2.3.3. Réduction au cas où $\mathcal{F}$ est constant. Comme (a) et (b) sont locales sur Y_{et} et que $\mathcal{F}$ est localement constant, quitte à remplacer $f : Y \to X$ par

$$U \overset{\text{étale}}{\to} Y \to X$$

et à *perdre la propreté (mais pas la lissité) de* $f : Y \to X$, on peut supposer que $\mathcal{F} = \underline{M}_Y$ est un faisceau constant sur Y.

Supposer $\mathcal{F} = \underline{M}_Y$ va permettre d'exploiter le fait que $u'^{*}_{x_1}\underline{M}_Y = \underline{M}_{Y_{x_1}} = f'^{*}_{x_1}\underline{M}_{k(x_1)}$.

5.2.3.4. Conclusion - preuve de (a) et (b). Pour chaque ouvert affine $U \hookrightarrow X$, on peut considérer le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] & Y_U \arrow[l, "\pi'_U"'] \arrow[d, "f_U"] \\ X & U \arrow[l, "\pi_U"] \arrow[ul, phantom, "\Box"] \end{tikzcd}$$

D'après le théorème 2.4, les morphismes de changement de base

$$f^* R^i \pi_{U*}(\underline{M}_U) \tilde{\to} R^i \pi'_{U*} f_U^*(\underline{M}_U),\ i \geq 0$$

sont des isomorphismes. Le lemme 1.1 permet alors de passer à la limite sur les voisinage affine du points générique x_1 pour obtenir des isomorphismes canoniques

$$f^* R^i u_{x_1*}(\underline{M}_{k(x_1)}) \tilde{\to} \varinjlim f^* R^i \pi_{U*}(\underline{M}_U) \tilde{\to} \varinjlim R^i \pi'_{U*} f_U^*(\underline{M}_U) \tilde{\to} R^i u'_{x_1*}\underline{M}_{Y_{x_1}} \tilde{\to} R^i u'_{x_1*}u'^{*}_{x_1}\underline{M}_Y,\ i \geq 0$$

Fin de la preuve de (a) ($i = 0$): Le diagramme

$$\begin{tikzcd} f^*\underline{M}_X \arrow[r] \arrow[d] & \underline{M}_Y \arrow[d] \\ f^* u_{x_1*}(\underline{M}_{k(x_1)}) \arrow[r] & u'_{x_1*}u'^{*}_{x_1}\underline{M}_Y, \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont déduites des morphismes d'adjonction et les flèches horizontales ont des isomorphismes, est commutatif. il suffit donc de montrer que le morphisme d'adjonction $\underline{M}_X \tilde{\to} u_{x_1 *}\underline{M}_{k(x_1)}$ est un isomorphisme. On peut le voir comme une conséquence du lemme suivant.

Lemma 5.8. *Soit A un anneau local noetherien intègre, $A \to A^{sh}$ son hensélisé strict et $A \to K_A$ son corps des fractions. Alors A^{sh} est encore noetherien et réduit. En particulier, A^{sh} n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers $P_1, \dots, P_r$ et $A^{sh} \hookrightarrow \prod_{1 \leq i \leq r} A^{sh}/P_i$. Enfin, le morphisme canonique*

$$K_A \otimes_A A^{sh} \tilde{\to} \prod_{1 \leq i \leq r} K_{A,i}$$

(où $K_{A,i}$ désigne le corps des fractions de A^{sh}/P_i, $i = 1, \dots, r$) est un isomorphisme.

Preuve. Cf. [R11, Lemme 2]. □

En effet, pour tout $x \in X$, notons $\tilde{X} := \mathrm{spec}(\mathcal{O}_{X,\overline{x}})$ et

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \tilde{X} \arrow[d] \\ \mathrm{spec}(k(x_1)) \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Alors

$$(u_{x_1 *}\underline{M}_{k(x_1)})_{\overline{x}} = \mathrm{H}^0(\tilde{Y}, \underline{M}_{k(x_1)}|_{\tilde{Y}}) = \mathrm{H}^0(\tilde{Y}, \underline{M}_{\tilde{Y}}).$$

Mais, dans notre cas, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local *normal* donc $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}$ est encore normal et, en particulier, intègre. Le lemme 5.8 montre donc que $\tilde{Y} \to \tilde{X}$ est le point générique de $\tilde{X}$. En particulier, $\mathrm{H}^0(\tilde{Y}, \underline{M}_{\tilde{Y}}) = M$.

Fin de la preuve de (b) ($i > 0$): Il suffit d'observer que le faisceau $R^i u_{x_1 *}(\underline{M}_{k(x_1)})$ est le faisceau constant associé à $\mathrm{H}^i(k(x_1), \underline{M}_{k(x_1)})$ et que $\mathrm{H}^i(k(x_1), \underline{M}_{k(x_1)}) = \mathrm{H}^i(\Gamma_{k(x_1)}, M) = 0$ puisque $k(x_1)$ *est séparablement clos.*

References

[A73] M. Artin, *Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques*, Séminaires de Mathématiques supérieures 1970, Presses de l'Université de Montréal 1973.

[BLR90] S. Bosch, W. Lutkebohmert et M. Raynaud, *Néron models*, E.M.G. vol. **21**, Springer-Verlag, 1990.

[CE56] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.

[C07] B. Conrad, *Deligne's notes on Nagata compactications*, Journal of the Ramanujan Math. Soc. **22**, 2007, p. 205–257.

[EGA4-2] A. Grothendieck *Eléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Etude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie.* Publications Mathématiques de l'IHES, **24**, 1965.

[EGA4-3] A. Grothendieck *Eléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Etude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie.* Publications Mathématiques de l'IHES, **28**, 1966.

[SGA4] A. Grothendieck et al, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA4)*, Lecture Notes in Mathematics **269**, **270** et **305**, Springer-Verlag, 1972.

[SGA41/2] P. Deligne et al, *Cohomologie étale (SGA41/2)*, Lecture Notes in Mathematics **569**, Springer-Verlag, 1977.

[M80] J. Milne, *Etale cohomology*, Princeton University Press, 1980.

[R11] M. Romagny, *Dimension cohomologique et images directes supérieures à support compact en cohomologie étale*, Notes pour le workshop ARIVAF 2 disponible sur http://www.math.u-bordeaux1.fr/~cadoret/ARIVAF.html.