Rencontre ARIVAF 2

Exposé (6) : Cohomologie des courbes

Sylvain Maugeais

Ces notes s'inspirent de [Tam94], [Mil80] et [FK88] auxquels nous renvoyons pour des références plus précises.

1 Cohomologie et torseurs [Mil80] III.4

1.1 Torseurs sous un schéma en groupe

Soit $G \to X$ un schéma en groupes plat de type fini (automatiquement fppf grâce à la présence de la section unité). Un torseur sous G est un morphisme $S \to X$ muni d'une G-action $G \times_X S \to S$ pour lequel il existe un recouvrement plat $\cup_i U_i \to X$ tel que S_{U_i} est G_{U_i}-isomorphe à G_{U_i}, i.e. il existe des isomorphismes $\phi_i \colon S_{U_i} \to G_{U_i}$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} G_{U_i} \times_{U_i} S_{U_i} \arrow[r, "\text{action}"] \arrow[d, "(Id,\phi_i)"'] & S_{U_i} \arrow[d, "i", "\phi"'] \\ G_{U_i} \times_{U_i} G_{U_i} \arrow[r, "\text{multiplication}"] & G_{U_i} \end{tikzcd}$$

On montre en fait, par descente fppf, que cette propriété équivaut à demander que $S \to X$ est fidèlement plat et que le morphisme

$$\begin{array}{ccc} G \times_X S & \to & S \times_X S \\ (g, s) & \mapsto & (gs, s) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Remarque 1.1 Si $G \to X$ est lisse, alors tout torseur sous G est trivial pour la topologie étale car alors $S \to X$ est lisse par descente fppf, et un morphisme lisse possède des sections localement pour la topologie étale.

À partir de maintenant, les schémas en groupes seront lisses.

On souhaite classifier les G-torseurs à isomorphisme près, formant ainsi un ensemble que nous noterons $PHS(G/X)$. Si G est un groupe fini abstrait, on voit que les G-torseurs sont exactement les revêtements galoisiens de X et, choisissant un point géométrique $\bar{x} \to X$, on voit que $PHS(G/X) \cong \mathrm{Hom}_{cont}(\pi^1(X, \bar{x}), G)$, ce qui donne une classification.

Prenons un schéma en groupes lisse et *commutatif* sur X. D'après la remarque, il existe des morphismes étales $s_i \colon U_i \to S$ et des isomorphismes $\phi_i \colon S_{U_i} \to G_{U_i}$.

Notons $g_{ij} = \phi_j(s_j)|_{U_i \cap U_j}.(\phi_i(s_i)|_{U_i \cap U_j})^{-1}$. Par construction, on a alors sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ la relation $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$, c'est-à-dire que $(g_{i,j})$ définit un 1-cocycle.

De plus, si on change ϕ_i en $\phi'_i = h_i\phi_i$ pour un $h_i \in G(U_i)$ alors $g'_{ij} = h_i g_{ij} h_j^{-1}$ et donc (g_{ij}) et (g'_{ij}) sont cohomologues. Ils définissent ainsi la même classe dans $\check{\mathrm{H}}^1(\{U_i\}_i, G)$, et donc aussi dans $\check{\mathrm{H}}^1(X, G)$ en passant à la limite sur les raffinements du recouvrement $\{U_i\}$

Théorème 1.2 *Soit G un schéma en groupes commutatif lisse. Alors le morphisme $PHS(G/X) \to \check{\mathrm{H}}^1(X,G) \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X,G)$ est injectif et si G est affine, alors c'est un isomorphisme.*

L'injectivité est assez simple, la surjectivité demande par contre un argument de descente, et c'est là qu'est utile l'hypothèse que G est affine (il existe d'autres hypothèses sous lesquelles ce morphisme est un iso, cf. [Mil80]).

1.2 Exemple de $\mathbb{G}_m$

Soit $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ un faisceau inversible. Alors il existe un recouvrement $X = \cup_i U_i$ et des isomorphismes $\phi_i \colon \mathcal{L}|U_i \to \mathcal{O}_{U_i}$ et, pour tous i, j, on a un automorphisme $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ de $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{G}_m(U_i \cap U_j)$. On définit ainsi un morphisme $\mathrm{Pic}(X) \to \check{\mathrm{H}}^1_{zar}(X, \mathbb{G}_m)$, dont on montre aisément que c'est un isomorphisme.

D'autre part $\mathcal{L}$ définit aussi un faisceau pour la topologie fppf (et également la topologie étale), on peut donc construire comme ci-dessus des morphismes $\mathrm{Pic}(X) \to \check{\mathrm{H}}^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ et $\mathrm{Pic}(X) \to \check{\mathrm{H}}^1_{fppf}(X, \mathbb{G}_m)$. On montre alors qu'un élément de $\check{\mathrm{H}}^1_{fppf}(X, \mathbb{G}_m)$ définit en fait un faisceau inversible pour la topologie fppf, puis que ce faisceau fppf provient en fait d'un module cohérent sur X (et donc forcément inversible). En résumé, on a le théorème suivant.

Théorème 1.3 (90 de Hilbert) *On a des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{Pic}(X) \cong \check{\mathrm{H}}^1_{zar}(X, \mathbb{G}_m) \cong \check{\mathrm{H}}^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m) = \check{\mathrm{H}}^1_{fppf}(X, \mathbb{G}_m).$$

2 Cohomologie des corps

2.1 cohomologie étale et cohomologie galoisienne [Tam94] II.2

Soit k un corps, $\bar{k}$ sa clôture séparable et G son groupe de Galois absolu (avec sa structure profinie). Pour tout k-schéma X de type fini sur k, l'ensemble $X(\bar{k}) = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}\, \bar{k}, X)$ est muni d'une action de G à gauche, et si $H \subset G$ est un sous-groupe ouvert alors $X(\bar{k})^H = X(\bar{k}^H)$.

L'ensemble $X(\bar{k})$ étant muni de la topologie discrète, cette action est continue. En effet, cela équivaut à dire que le stabilisateur de chaque point est ouvert, ou encore que le corps résiduel de chaque point image de $X(\bar{k})$ est fini sur k (d'où la nécessité de prendre des schémas de type fini !).

Notons T_G la catégorie des ensembles munis d'une action continue de G, et munissons la de sa topologie canonique. L'association $X \mapsto X(\bar{k})$ induit alors un foncteur $(\mathrm{Spec}\, k)_{\text{ét}} \to T_G$ qui est une équivalence bicontinue de catégorie.

Le fait que ce soit une équivalence de catégorie se montre à l'aide de la construction suivante : soit E un objet de T_G. Cet objet est la réunion de ses orbites :

$$E = \coprod_{\bar{x} \in E/G} \bar{x}.$$

D'autre part, le stabilisateur H_x de tout $x \in E$ est ouvert. On associe alors à E le schéma

$$\coprod_{\bar{x}\in E/G} \operatorname{Spec}(\bar{k}^{H_x}).$$

(je ne vois pas pourquoi cette construction est fonctorielle car elle impose le choix d'un x dans chaque classe, et donc d'un H_x (qu'il faut conjuguer en général si on change de x), on ne définit donc pas vraiment un foncteur inverse de $X \mapsto X(\bar{k})$, sauf à choisir un système cohérent de x (?). Par contre, on montre aisément l'équivalence de catégorie grâce à cette construction !).

Reste à montrer la bicontinuité, mais celle-ci est vraie car elle équivaut à la propriété suivante : $\forall X \to Y$ morphisme étale de k-schémas, on a l'équivalence entre les propriétés $X \to Y$ épimorphisme $\Leftrightarrow X(\bar{k}) \to Y(\bar{k})$ épimorphisme (on prendra garde au fait que cette propriété n'est pas vraie pour des morphismes de k-schémas quelconques !).

D'autre part, on a une équivalence de catégories entre les G-modules et les faisceaux abéliens sur T_G *via*

$$\begin{array}{ccc} (Ab/T_G) & \to & (G-\text{modules}) \\ F & \mapsto & \varinjlim_{H\subset G \text{ ouvert}} F(G/H) \\ (E \mapsto \operatorname{Hom}_{G-\text{ens}}(E,A)) & \leftarrow & A \end{array}$$

l'idée étant ici que si on connaît un faisceau F sur les G-ensembles de la forme G/H, alors on connaît F.

De plus, comme c'est une équivalence de catégorie, en particulier elle envoit les injectifs sur les injectifs !

Théorème 2.1 *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} (Ab/(\operatorname{Spec} k)_{\text{ét}}) & \to & (G-\textit{modules}) \\ F & \mapsto & \varinjlim_{k'/k} F(\operatorname{Spec} k') \end{array}$$

est une équivalence de catégorie.

De plus, pour tout faisceau F sur $(\operatorname{Spec} k)_{\text{ét}}$ il existe un isomorphisme ∂-fonctoriel

$$\mathrm{H}^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} k, F) \to \mathrm{H}^q(G, \varinjlim_{k'/k} F(\operatorname{Spec} k')).$$

2.2 Cohomologie à valeur dans $\mathbb{G}_m$ [FK88] I.1, page 14

Pour un corps k, on a $\mathrm{H}^1(k, \mathbb{G}_m) = 0$ d'après le théorème 90 de Hilbert (car les faisceaux inversibles sur un corps sont triviaux !) mais les groupes supérieurs sont compliqués en général.

Le groupe $\mathrm{H}^2(k, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(k)$ est appelé le groupe de Brauer et peut être décrit en termes d'algèbre d'Azumaya (algèbres non commutatives qui deviennent isomorphes à $M_n(k')$ après une extension étale k'/k) et également en termes d'algèbres centrales simples...

Lorsque k est un corps de fonction au-dessus d'un corps algébriquement clos, Tsen à démontré que $\mathrm{H}^q(k, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $q \geq 2$.

Si le corps de base n'est pas algébriquement clos mais seulement séparablement clos, le groupe de Brauer n'est pas nul en général, mais c'est un groupe de p-torsion !

3 Cohomologie des courbes [FK88] I.5

Le but est ici de calculer aussi complètement que possible la cohomologie des courbes propres et lisses sur des corps algébriquement clos pour différents faisceaux.

3.1 Cohomologie à valeur dans $\mathbb{G}_m$ pour une courbe lisse

Notons η le point générique de X, schéma régulier, intègre et $j\colon \eta \to X$ l'inclusion. On a alors un morphisme injectif de faisceaux sur X

$$\mathbb{G}_m \to j_*\mathbb{G}_m.$$

De plus, pour tout $x \in X$ de codimension 1, notons i_x : $\mathrm{Spec}\, k(x) \to X$ et $\mathcal{D} = \bigoplus_{\substack{x \in X \\ \text{codim } x = 1}} i_{x*}\mathbb{Z}$. On a alors un morphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} j_*\mathbb{G}_m & \to & \mathcal{D} \\ f & \mapsto & (v_x(f))_x \end{array}$$

où v_x désigne la valuation normalisée sur l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{X,x}$.

On voit alors que ce morphisme est un épimorphisme pour la topologie étale (déjà pour la topologie de Zariski) puis, comme X est normal, qu'on a une suite exacte

$$0 \to \mathbb{G}_m \to j_*\mathbb{G}_m \to \mathcal{D} \to 0.$$

On a donc une suite exacte longue de cohomologie

$$\mathcal{O}_X(X)^* \to \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_X) \to \bigoplus_x \mathbb{Z} \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1(X, j_*\mathbb{G}_m).$$

Or la suite spectrale de Leray $\mathrm{H}^p(X, \mathrm{R}^q j_*\mathbb{G}_m) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\eta, \mathbb{G}_m)$ donne une injection

$$\mathrm{H}^1(X, j_*\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1(\eta, \mathbb{G}_m),$$

ce dernier groupe étant nul par Hilbert 90.

En particulier

$$\mathcal{O}_X(X)^* \to \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_X) \to \bigoplus_x \mathbb{Z} \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m) \to 0$$

et on voit que $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m)$ s'identifie au groupe des diviseurs de Weil modulo équivalence rationnelle.

Par suite, si X est une courbe sur un corps algrébriquement clos k, alors x est fermé et $k(x) = k$, donc sa cohomologie supérieure s'annule. Pour tout q on a $\mathrm{H}^q(X,\mathcal{D}) = \bigoplus_x \mathrm{H}^q(x,\mathbb{Z})$ car les i_x sont des immersions fermées, donc les i_{x*} sont exactes, et donc ces groupes sont nuls si $q > 0$ car $k = \bar{k}$.

En particulier, on trouve une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^0(X,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^0(\eta,\mathbb{G}_m) \to \bigoplus \mathbb{Z} \to \mathrm{H}^1(X,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1(X,j_*\mathbb{G}_m) \to 0$$

et également des isomorphismes pour tout $q \geq 2$

$$\mathrm{H}^q(X,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^q(X,j_*\mathbb{G}_m).$$

Reprenant la suite spectrale de Leray déjà citée, on peut calculer $\mathrm{H}^p(X,\mathbb{G}_m)$ pour $p > 0$ car on a $\mathrm{R}^q j_*\mathbb{G}_m = 0$ pour $q \geq 1$.

En effet $\mathrm{R}^q j_*\mathbb{G}_m$ est le faisceautisé de $U \mapsto \mathrm{H}^q(\eta \times_X U, \mathbb{G}_m)$ mais $\eta \times U$ est étale sur η, c'est donc la réunion disjointe de spectres de corps de fonctions sur un corps algébriquement clos, i.e. $\mathrm{R}^q j_*\mathbb{G}_m = 0$ pour $q > 0$.

La dégénérescence de la suite de Leray permet alors de voir que pour tout p on a $\mathrm{H}^p(X,j_*\mathbb{G}_m) = \mathrm{H}^p(\eta,\mathbb{G}_m)$ qui donc est nul pour $p > 0$ d'après le calcul dans le cas d'un corps.

On en déduit que $\mathrm{H}^p(X,\mathbb{G}_m) = 0$ pour $p > 1$ et qu'on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^0(X,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^0(\eta,\mathbb{G}_m) \to \bigoplus \mathbb{Z} \to \mathrm{H}^1(X,\mathbb{G}_m) \to 0$$

Si, de plus, la courbe est propre alors on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) = \mathrm{H}^1(X,\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$$

où $\mathrm{Pic}^0(X)$ désigne le groupe de faisceaux inversibles de degré 0 ou, de manière équivalente, l'ensemble des points k-rationnels de la jacobienne de X.

3.2 Cohomologie à valeurs dans $\boldsymbol{\mu}_n$ pour les courbes propres et lisses

L'outil principal est ici la suite exacte de Kummer. Pour tout schéma X et tout entier n inversible dans $\mathcal{O}_X$ on a un morphisme $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ définit par $\alpha \mapsto \alpha^n$ qui est étale car localement donné par

$$\begin{array}{ccc} A[x,\frac{1}{x}] & \to & A[y,\frac{1}{y}] \\ x & \mapsto & y^n. \end{array}$$

En particulier au niveau différentiel on a $dx \mapsto ny^{n-1}dy$ et donc est surjectif car ny^{n-1} est inversible.

D'autre part, $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ est surjectif (il suffit pour le voir de regarder les points à coefficients dans un corps), c'est donc un épimorphisme pour la topologie étale.

Le noyau de ce morphisme de schéma en groupes est appelé $\boldsymbol{\mu}_n$. C'est un schéma en groupe fini plat sur X et on a une suite exacte

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_n \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0. \tag{3.1}$$

Dans le cas d'une courbe sur un corps algébriquement clos k on a donc une suite exacte longue

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_n(k) \to k^* \to k^* \to \mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{\mu}_n) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m) \to \\ \mathrm{H}^2(X, \boldsymbol{\mu}_n) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m) = 0$$

et également que $\mathrm{H}^q(X, \boldsymbol{\mu}_n) = 0$ pour tout $q \geq 3$.

Comme k est algébriquement clos, $\alpha \to \alpha^n$ est surjectif en tant qu'endomorphisme de k^* et donc on a

$$\mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{\mu}_n) = \mathrm{Pic}(X)[n] = \mathrm{Pic}^0(X)[n]$$

(points de n-torsions de la jacobienne) et on sait que $\mathrm{Pic}(X)[n] \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ où g désigne le genre de X.

D'autre part, le morphisme d'élévation à la puissance n sur la jacobienne est une isogénie, donc induit une surjection sur les points k-rationnel. On voit alors que

$$\mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m) = \mathrm{coker}\left(\mathrm{Pic}(X) \overset{\alpha \to \alpha^n}{\to} \mathrm{Pic}(X)\right) = \mathrm{coker}\left(\mathbb{Z} \overset{\alpha \mapsto n\alpha}{\to} \mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

3.3 Cohomologie à valeurs dans $\boldsymbol{\mu}_n$ pour les courbes affines et lisses

Prenant la suite exacte longue associée à la suite de Kummer, on trouve

$$\mathbb{G}_m(X) \to \mathbb{G}_m(X) \to \mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{\mu}_n) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{H}^2(X, \boldsymbol{\mu}_n) \to 0$$

car $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m) = 0$. De même, on voit que $\mathrm{H}^q(X, \boldsymbol{\mu}_n) = 0$ pour $q \geq 3$.

Notons $\bar{X}$ la compactification lisse de X et $S = \bar{X} \setminus X$. On a un morphisme canonique $\mathrm{Pic}^0(\bar{X}) \to \mathrm{Pic}(X)$ et celui-ci est surjectif car $S \neq \emptyset$ (considérer la desciption en termes de diviseurs de Weil).

Par suite, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}^0(\bar{X}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\alpha \mapsto \alpha^n"] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[d, "\alpha \mapsto \alpha^n"] \\
\mathrm{Pic}^0(\bar{X}) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Pic}(X).
\end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Pic}(X) \overset{\alpha \mapsto \alpha^n}{\to} \mathrm{Pic}(X)$ est surjective, et donc que $\mathrm{H}^2(X, \boldsymbol{\mu}_n) = 0$.

Reprenant les idées la section 3.1, on voit qu'on a une suite exacte

$$0 \to k^* \to \mathbb{G}_m(X) \to \bigoplus_{x \in S} \mathbb{Z}$$

et on en déduit, comme l'élévation à la puissance n est surjective sur k^*, que $\mathrm{coker}\left(\mathbb{G}_m(X) \overset{\alpha \mapsto \alpha^n}{\to} \mathbb{G}_m(X)\right)$ s'injecte dans $\bigoplus_{x \in S} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et donc est fini. Il s'ensuit que $\ker\left(\mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{\mu}_n) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m)\right)$ est fini !

Pour montrer la finitude de $\mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{\mu}_n)$, il suffit donc de montrer celle de

$$\mathrm{Im}(\mathrm{H}^1(X, \boldsymbol{\mu}_n) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m)) = \ker\left(\mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m)\right).$$

Or on a une suite exacte

$$\bigoplus_{x \in S} \mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(\bar{X}) \to \mathrm{Pic}(X) \to 0$$

et donc une suite exacte

$$0 \to E \to \mathrm{Pic}(\bar{X}) \to \mathrm{Pic}(X) \to 0$$

où E est un groupe de type fini. Le résultat découle alors de cette suite et de la finitude de $\mathrm{Pic}(\bar{X})[n]$.

3.4 Cohomologie des faisceaux constructibles

Théorème 3.1 *Soit X une courbe sur un corps algébriquement clos k, alors pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ de torsion première à car$k$ les groupes $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F})$ sont finis et s'annule pour $q > 2$.*

De plus, si X est affine alors $\mathrm{H}^2(X, \mathcal{F}) = 0$.

Il suffit en fait de le faire dans le cas d'une courbe lisse. En effet notons $f\colon \widetilde{X} \to X$ la normalisation de X. Alors $\mathcal{F} \to f_* f^* \mathcal{F}$ est un isomorphisme en dehors d'un ensemble fini de points. De plus, comme f est fini, f_* est exacte et donc $\mathrm{H}^q(X, f_* f^* \mathcal{F}) = \mathrm{H}^q(\widetilde{X}, f^* \mathcal{F})$. On a donc une suite exacte $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_2 \to 0$ et $0 \to \mathcal{F}_2 \to f_* f^* \mathcal{F} \to \mathcal{F}_3 \to 0$ avec $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_3$ à support dans un ensemble fini de points. En particulier, on a $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}_i) = 0$ pour $i \in \{1, 3\}$ et $q > 0$ et $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{F}_i)$ est fini.

On tire alors aisément de la deuxième suite la finitude ou l'annulation des $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}_2)$, puis celles de $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F})$.

Nous supposerons donc désormais que X est lisse. nous nous contentons de donner la preuve.

Finitude

Tout faisceau constructible peut s'injecte dans une somme directe de faisceaux de la forme $g_* \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un morphisme fini g, dont on sait que les groupes de cohomologie sont finis.

On peut alors construire une suite $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \ldots$ où les $\mathcal{F}_i$ sont de cette forme, et conclure sur la finitude...

Annulation : cas général

Si $\mathcal{F}$ est nul au point géométrique générique, alors il a son support dans un nombre fini de points fermés, et donc ses groupes de cohomologies supérieurs sont nuls.

Dans le cas contraire, on montre que $\mathcal{F}$ est isomorphe, sur un ouvert de X, à un faisceau de la forme $f_* \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un morphisme fini $f\colon Y \to X$, et ses groupes de cohomologie s'annule si $q > 2$. Mettant ensemble les deux résultats, on termine la démonstration.

Annulation : cas affine

Il reste à montrer que $\mathrm{H}^2(X,\mathcal{F})=0$, mais on sait déjà que $\mathrm{H}^2(X,-)$ est exact à droite. En considérant que $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module, on montre qu'il existe un morphisme étale $g\colon U\to X$ et un épimorphisme $g_!(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\to\mathcal{F}$. Par suite, montrant que g est fini, on se ramène au cas $g_!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong g_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $\mathcal{F}$ et $g_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ diffèrent l'un de l'autre au plus par un faisceau à support fini (donc sans cohomologie). On en déduit que $\mathrm{H}^2(X,g_!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0$, puis le résultat annoncé.

Références

[FK88] E. Freitag and R. Kiehl, *Étale cohomology and the Weil conjecture*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 13, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Mil80] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[Tam94] G. Tamme, *Introduction to étale cohomology*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1994.