A.N.R. ARIVAF - WORKSHOP 1: GROUPE FONDAMENTAL ÉTALE DES SCHÉMAS

ORGANISATEURS: A. CADORET, J. TONG

1. Informations pratiques

Date: 9, 10 et 11 mars 2011.

Lieu: Salle 1, I.M.B. - Université Bordeaux 1.

Programme:

- 09/03	10:00 - 11:00	:	(1) Formalisme - 1
	Café		
	11:30 - 12:30	:	(1) Formalisme - 2
	14:15 - 15:15	:	(2) Exemples - 1 (spectre d'un corps, schémas normaux)
	15:30 - 16:15	:	(3) Exemples - 2 (G.A.G.A.)
	Café		
	16:45 - 18:15	:	(4) Exemples - 3 (suite exacte courte fondamentale)
- 10/03	10:00 - 11:00	:	(5) 1ère suite exacte d'homotopie - applications
	Café		
	11:30 - 13:00	:	(6) 2ème suite exacte d'homotopie - spécialisation
	14:30 - 15:15	:	(7) Exemples - 4 (variétés abéliennes, preuve algébrique)
	Café		
	15:45 - 17:15	:	(8) Exemples - 5 (courbes)
- 11/03	10:00 - 11:00	:	(9) Exemples - 6 (schémas propres)
	Café		
	11:30 - 12:30	:	(10) Dessins d'enfants
	13:45 - 14:45	:	(11) Contre-exemple de Hoshi
	Café		
	15:20 - ?	:	Discussions (budget, prochains workshops)

Orateurs:

(1) M. Romagny
(2) P. Parent
(3) N. Ratazzi
(4) N. Borne
(5) C. Pépin
(6) S. Brochard
(7) F. Pazuki
(8) J. Tong
(9) S. Maugeais
(10) L. Zapponi
(11) A. Cadoret

2. Préréquis

- Revêtements topologiques et groupe fondamental topologique (*e.g.* [Kr98]);
- Groupes profinis - définitions et propriétés élémentaires (*e.g.* [RiZ00]);
- Géométrie algébrique:
  – Language des schémas et techniques de base (*e.g.* [Har77, Chap. II, III]);
  – Morphismes plats, non ramifés, étales (*e.g.* [Mi80, Chap. I], [EGA4]);
  – Variétés abéliennes (*e.g.* [Mum70], [Mi86a])
  – Jacobienne d'une courbe projective lisse: définition et plongement d'Albanese associé à un point rationnel (*e.g.* [Mi86b])

Les théorèmes 'classiques' utilisés (*e.g.* factorisation de Stein, théorème de Bertini, théorème de pureté *etc.*) seront énoncés avec des références pour les preuves au fil des exposés.

3. Résumé des exposés

(1) Formalisme des catégories galoisiennes (120 min - à scinder en deux exposés à la convenance de l'orateur) (*e.g.* [C10, §2-4]). Inclut:

- Définition axiomatique d'une catégorie galoisienne, propriétés élementaires (artinienne *etc.*)
- Enoncé du théorème principal, définition du π_1, de la notion de chemin étale
- Exemples:
  – Revêtements topologiques finis ($\pi_1^{top}(-)$)
  – Revêtements étales ($\pi_1(-)$)
  – Revêtements modérés ($\pi_1^t(-)$): cas du complément d'un DCN dans un schéma régulier (*e.g.* [SGA1, XIII, §2.1.3])
- Preuve du théorème principal (objets connexes, galoisiens, correspondance de Galois, existence de la clôture galoisienne *etc.*)
- Foncteurs exacts (exemples tirés des catégories galoisiennes précédemment mentionnées) et dictionnaire fonctoriel

(2) Exemples - 1 (60 min)
- π_1 du spectre d'un corps (*e.g.* [C10, §6.1])
- π_1 d'un schéma normal (*e.g.* [C10, §6.4]). Inclut:
  – Revêtement étale d'un schéma normal est normal (*e.g.* [R70, Chap. VII, §2 Prop. 2])
  – Théorème de structure locale des morphismes non ramifiés et étales (*e.g.* [C10, Thm. 5.5], ou [R70, Chap. V, §1])
  – Revêtement non ramifié d'un schéma normal est automatiquement plat
  – $\pi_1^t(U)$ avec U le complément d'un DCN dans un schéma régulier strictement local (lemmes d'Abhyankar [SGA1, Chap. XIII, §5], [GroMu, §2.2, 2.3])

(3) Exemples - 2 (45 min): Méthodes G.A.G.A. (*e.g.* [SGA1, Chap. XII], ou [C10, §8])
- Définition et représentabilité du foncteur d'analytification. Qqs exemples du dictionnaires schéma de type fini sur $\mathbb{C}$ $\longleftrightarrow$ espaces analytique complexe associé
- Enoncé du théorème principal ([SGA1, XII, Thm. 5.1])(+ esquisse sommaire de la preuve)
- Exemples:
  – Courbes sur $\mathbb{C}$, notamment $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{t_1, \dots, t_r\}$ et lien avec le problème de Galois inverse sur $\mathbb{C}(T)$ (*e.g.* [Sz09, §3.4])
  – groupes algébriques sur $\mathbb{C}$ (π_1 toujours commutatif, cas des variétés abéliennes)

(4) Exemples - 3 (90 min): Suite exacte courte fondamentale d'un schéma géométriquement connexe et de type fini sur un corps (*e.g.* [C10] §7)
- Suite exacte courte fondamentale: énoncé et preuve
- Introduction de la problématique qui va structurer en partie la suite du workshop via le découpage du π_1 en une partie géométrique et une partie arithmétique:

– Détermination du π_1 d'un schéma connexe de type fini sur un corps algébriquement clos (sur $\mathbb{C}$ *Cf.* exposé (3), sur un corps alg. clos de car. 0, *Cf.* exposé (5), dans le cas de la car. $p > 0$ *Cf.* exposés (6), (7) (variétés abéliennes), (8) (courbes))
– Action de la partie arithmétique sur la partie géométrique:
  * Conjecture de la section (*e.g.* [Sz10] §1.3):
    - énoncé
    - injectivité / variante faible vs variante forte: lien avec la conj. de Mordell
    - énoncés des variantes suivantes de la conjecture de la section de Grothendieck:
      * variante pro-p: injectivité (S. Mochizuki [Mo99]), pas surjectivité (Y. Hoshi [Ho10b])
      * variante birationnelle (Koenigsmann [Ko05], et Esnault-Wittenberg [EsWi])
      * variante abélienne (Harari-Szamuely [HSz])
  * Représentation extérieure+ variante pro-p, birationnelle, abélienne *etc* ([Sz09, §4.7])
    - énoncé de la principale conjecture anabélienne (courbes) ([NMoT01], [Sz10, §1.5])
    - court panorama des résultats (K. Ushida, A. Tamagawa, S. Mochizuki, J. Stix *etc.*)

(5) 1ère suite exacte d'homotopie et applications (60 min) (*e.g.* [C10, §6.2])
- Factorisation de Stein
- 1ère suite exacte d'homotopie: énoncé et preuve
- Applications:
  – π_1 d'un produit
  – Invariance du π_1 d'un schéma propre par ext. de corps algébriquement clos
    + rem.: - argument de F. Pop dans le cas non propre
    - $\pi_1(-)^{(p)}$ des courbes en car. $p > 0$: nécessité de l'hypothèse propre en général

(6) 2ème suite exacte d'homotopie - théorie de la spécialisation (90 min) (*e.g.* [C10, §9], [SGA1, Chap. X] ou [OrVi])
- 2ème suite exacte d'homotopie: énoncé et esquisse de preuve. Inclut les énoncés des théorèmes de comparaison et d'existence en géométrie formelle (*e.g.* [I05])
- Construction de l'(épi)morphisme de spécialisation pour un morphisme propre (et séparable)
- Etude du noyau. Inclut l'énoncé du théorème de pureté (et donner une preuve en dimension ≤ 2 (*e.g.* [OrVi, Thm 2.2]))

(7) Exemples - 4 (45 min): π_1 d'une variété abélienne, preuve de 'Serre-Lang' utilisant le formalisme du π_1 (*Cf.* [C10, §6.3])

(8) Exemples - 5 (90 min): π_1 des courbes sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$
- $\pi_1(-)^{(p')}$ (= le plus grand quotient d'ordre premier à p):
  – $p = 0$: *Cf.* exposés (3) et (5). Retour sur la suite exacte courte fondamentale de $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{t_1, \ldots, t_r\})$ et le problème de Galois inverse régulier sur $\mathbb{Q}(T)$: descente galoisienne (*e.g.* [D09, Chap. IV])
  – $p > 0$: relèvement de la car $p > 0$ à la car. 0 (+ théorie de la spécialisation - *Cf.* exposé (6))$\Longrightarrow$ finitude de π_1, et détermination de $\pi_1^{(p')}$ (*e.g.* [I05, §8.5, B, C])
- $\pi_1(-)^{(p)}$ (= le plus grand quotient pro-p de π_1): rappeler les énoncés + esquisse sommaire des preuves (*e.g.* [Bo00])
- $\pi_1(-)^{ab}$ comme extension du π_1 de la jacobienne de la compactification par l'inertie (Cas projectif [Sz09] §5.8, cas général: [S59], [KL81])
- Cas mixte: la structure de π_1 en caractéristique $p > 0$:
  – Cas propre: très mystèrieuse dès le genre $g \geq 2$, peut être très variée (*e.g.* [Tama04])
  – Cas affine:
    * quotients finis de π_1 - conjecture d'Abhyankar: rappeler énoncé + esquisse sommaire de la preuve (*e.g.* [Ha94] & [R94], ou [Ch00] & [Sa]) (**N.B.** puisque pour une courbe affine, son π_1 n'est pas topologiquement de type fini en général, la connaissance sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de quotients finis de π_1 n'est pas suffisant pour déterminer la structure de π_1)

  * la structure de π_1 reste très mystèrieuse (*Cf.* la structure de π_1^t ci-dessous)
- π_1 modéré:
  - π_1^t est topologiquement de type fini (donc, la connaissance de $\pi_1^t \Longleftrightarrow$ la connaissance sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de quotients finis de π_1^t (*e.g.* [FrJa, Prop. 16.10.7]))
  - Détermination de π_1^t à partir de π_1 (*e.g.* [Tama99, Cor. 1.5])
  - Énoncés des résultats principaux de [Tama03]+ variations de π_1^t [Tama04])

(9) Exemples - 6 (45 - 60 min): π_1 des schémas propres et géométriquement connexes sur un corps
- Invariance birationnelle du π_1 pour les schémas propres et réguliers (pb de la formulation de conjectures anabéliennes en dimension > 1? *e.g.* [St07]). Utilise de nouveau le théorème de pureté (*Cf.* exposé (6))
- π_1 est topologiquement de type fini. La preuve se fait par induction sur la dimension afin de se ramener au cas des courbes (*Cf.* exposé (8)). L'étape d'induction inclut:
  - Arguments 'de descente' (inclure un court résumé des principaux résultats de descente - *Cf.* [C10, Appendice])
  - Lemme de Chow
  - Lefschetz (Bertini/factorisation de Stein)

(10) Dessins d'enfants (60 min) (si possible, inclure qqs mots sur le résultat principal de [AnIh], nécessaire pour l'exposé (11))

(11) Contre-exemple de Hoshi à la conjecture de la section pro-p (60 min, [Ho10b])

References

[AnIh] G. Anderson and Y. Ihara, *Pro-ℓ branched coverings of $\mathbf{P}^1$ and higer circular ℓ-units*, Annals of Math., **128**, 271-293, 1988

[BLR00] *Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy 1998)*, J.B. Bost, F. Loeser and M. Raynaud Ed., Progress in Math. **187**, Birkhauser 2000.

[Bo00] I. Bouw, *The p-rank of curves and covers of curves* in J.-B. Bost et al., Courbes semi- stables et groupe fondamental en géométrie algébrique, Progress in Mathematics, vol. 187, Birkhauser, 2000.

[C10] A. Cadoret, *Galois Categories*, preprint, 2010. Available at http://www.math.u-bordeaux1.fr/˜cadoret/

[Ch00] A. Chambert-Loir, *La conjecture d'Ahbyankar I, construction de revêtements en géométrie rigide*, in J.-B. Bost et al., Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique, Progress in Mathematics, vol. 187, Birkhauser, 2000.

[D09] P. Dèbes, *Arithmétique des revêtements de la droite*, preprint, available at http://math.univ-lille1.fr/˜pde/ens.html

[EsWi] H. Esnault and O. Wittenberg, *On abelian birational sections*, Journal of American Mathematical Society, **23** (2010), 713-724.

[FrJa] Michael D. Fried and M. Jarden, *Field arithmetic*, third edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. **11**, Springer, 2008.

[G00] Ph. Gilles, *Le groupe fondamental sauvage d'une courbe affine en caractristique $p > 0$* in J.-B. Bost et al., in Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique, Progress in Mathematics, vol. 187, Birkhauser, 2000.

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental - S.G.A.1*, L.N.M. **224**, Springer-Verlag, 1971.

[SGA2] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux - S.G.A.2*, Advanced Studies in Pure Mathematics **2**, North-Holland Publishing Company, 1968.

[EGA2] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique II - E.G.A.II: Etude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publ. Math. I.H.E.S. **8**, 1961.

[EGA3] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique III - E.G.A.III: Etude cohomologique des faisceaux cohérents*, Publ. Math. I.H.E.S. **11**, 1961.

[EGA4] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique IV - E.G.A.IV: Etude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publ. Math. I.H.E.S. **20**, 1964, **24**, 1965, **28**, 1966, **32**, 1967.

[GroMu] A. Grothendieck and Jacob P. Murre, *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme*, LNM. **208**

[HSz] D. Harari and T. Szamuely, with an appendice by V. Flynn, *Galois section for abelianized fundamental groups*, Math. Annalen, **344**, no 4, 779-800, 2009.

[Ha94] D. Harbater, *Abhyankar's conjecture on Galois groups over curves*, Invent. Math. **117**, 1994.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, G.T.M. **52**, Springer, 1977.

[Hi64] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Annals of Math. **39**, 1964.

[Ho10a] Y. Hoshi, *Monodromically full hyperbolic curves of genus* 0, preprint, 2010.

[Ho10b] Y. Hoshi, *Existence of nongeometric pro-p Galois sections of hyperbolic curves*,Publ. Res. Inst. Math. Sci. **46**, 2010.

[HoMo10] Y. Hoshi and S. Mochizuki, *On the combinatorial anabelian geometry of nodally nondegenerate outer representations*, to appear in Hiroshima Math. J.

[I05] L. Illusie, *Grothendiecks existence theorem in formal geometry*, in B. Fantechi et al., Fundamental Algebraic Geometry, Mathematical Surveys and Monographs, vol. **123**, A.M.S., 2005.

[J83] J.P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et Applications*, Progress in Mathematics **42**, Birkhauser, 1983.

[KL81] N.M. Katz and S. Lang, *Finiteness theorems in geometric class field theory*, L'Enseign. Math. **27**, 1981.

[Ko05] J. Koenigsmann, *On the Section Conjecture in anabelian geometry*, J. reine angew. Math. **588**, 2005.

[Kr98] A. Kraus, *Théorie de Galois - cours accéléré de D.E.A. Univ. P VI*, preprint 1998.

[L00] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford G.T.M. **6**, Oxford University Press, 2000.

[M96] M. Matsumoto, *Galois representations on profinite braid groups on curves*, J. Reine Angew. Math. **474**, 1996.

[Me00] A. Mezard, *Fundamental group*, in J.-B. Bost et al., Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy 1998), Progress in Math. **187**, Birkhauser, 2000.

[Mi80] J. Milne, *Etale cohomology*, Princeton University Press, 1980.

[Mi86a] J. Milne, *Abelian varieties*, in *Arithmetic Geometry*, G.Cornell and J.H. Silverman ed., Springer Verlag, 1986.

[Mi86b] J. Milne, *Jacobian varieties*, in *Arithmetic Geometry*, G.Cornell and J.H. Silverman ed., Springer Verlag, 1986.

[Mo99] S. Mochizuki, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, Invent. Math. **138**, 1999.

[Mo03] S. Mochizuki, *Topics surrounding the anabelian geometry of hyperbolic curves*, in Galois groups and fundamental groups, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **41**, Cambridge Univ. Press, 2003.

[Mum70] D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research, 1970.

[MumF82] D. Mumford and J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, 2nd enlarged ed., E.M.G. **34**, Springer-Verlag, 1982.

[Mur67] J.P. Murre, *An introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group*, Tata Institute of Fundamental Research, 1967.

[NMoT01] H. Nakamura, A. Tamagawa and S. Mochizuki, *The Grothendieck conjecture on the fundamental groups of algebraic curves*, Sugaku Expositions **14**, 2001.

[OrVi] F. Orgogozo, I. Vidal, *Le théorème de spécialisation du groupe fondamental* in J.-B. Bost et al., Courbes semi- stables et groupe fondamental en géométrie algébrique, Progress in Mathematics, vol. 187, Birkhauser, 2000.

[R70] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, LNM 169, Springer

[R94] M. Raynaud, *Revetements de la droite affine en caracteristique $p > 0$ et conjecture dAbhyankar*, Invent. Math. **116**, 1994.

[RiZ00] L. Ribes and P. Zalesskii, *Profinite groups*, E.M.G. **40**, Springer-Verlag, 2000.

[Sa] M. Saïdi, *Ahyankar's conjecture II, the use of semi-stable curves* in J.-B. Bost et al., Courbes semi- stables et groupe fondamental en géométrie algébrique, Progress in Mathematics, vol. 187, Birkhauser, 2000.

[S56] J.P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Annales de l'Institut Fourier **6**, 1956.

[S59] J.P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Herman, 1959.

[St07] J. Stix, *On the geometry of higher dimensional anabelian varieties*, in: Arithmetic and Differential Galois Groups, Oberwolfach report **4**, 2007.

[Sto07] M. Stoll, *Finite descent obstructions and rational points on curves*, Algebra and Number Theory **1**, 2007.

[Sz09] T. Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mahtematics **117**, Cambridge University Press, 2009.

[Sz10] T. Szamuely, *Heidelberg lectures on fundamental groups*, preprint, available at http://www.renyi.hu/˜szamuely/pia.pdf

[Tama99] A. Tamagawa, *On the fundamental groups of curves over algebrically closed fields of characteristic* > 0, International Mathematics Research Notices, **16**, 1999

[Tama03] A. Tamagawa, *On the tame fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic* > 0, in Galois Groups and Fundamental Groups, MSRI Publications, Volume **41**, 2003.

[Tama04] A. Tamagawa, *Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups*, J. Algebraic Geom. **13**, 675-724, 2004.

[U77] K. Uchida, *Isomorphisms of Galois groups of algebraic function fields*, Ann. Math. **106**, 1977.