

Modèles de fils ferromagnétiques

Gilles Carbou¹, Stéphane Labbé², Emmanuel Trélat³

¹ IMB, Université Bordeaux 1

² Laboratoire de mathématiques, Université Paris-Sud

³ Laboratoire MAPMO, Université d'Orléans

1. Modélisation
2. Stabilité des murs
3. Contrôle des murs
4. Modèle de fil fini

1. Modélisation

Modèle 3d :

Moment magnétique : $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $|u| = 1$ presque partout

$$B = H + \bar{u}$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \wedge H_e - u \wedge (u \wedge H_e)$$

$$H_e = \varepsilon^2 \Delta u + H_d + H_a.$$

1. Modélisation

Modèle 3d :

Moment magnétique : $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $|u| = 1$ presque partout

$$B = H + \bar{u}$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \wedge H_e - u \wedge (u \wedge H_e)$$

$$H_e = \varepsilon^2 \Delta u + H_d + H_a.$$

Champ d'échange

1. Modélisation

Modèle 3d :

Moment magnétique : $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $|u| = 1$ presque partout

$$B = H + \bar{u}$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \wedge H_e - u \wedge (u \wedge H_e)$$

$$H_e = \varepsilon^2 \Delta u + H_d + H_a.$$

Champ appliqué

1. Modélisation

Modèle 3d :

Moment magnétique : $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $|u| = 1$ presque partout

$$B = H + \bar{u}$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \wedge H_e - u \wedge (u \wedge H_e)$$

$$H_e = \varepsilon^2 \Delta u + H_d + H_a.$$

Champ démagnétisant :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} H_d = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} (H_d + \bar{u}) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3 \quad (\text{Loi de Faraday}) \end{cases}$$

1. Modélisation

Fil infini

Fil de diamètre 2η :

$$\Omega_\eta = \mathbb{R} \times B(0, \eta)$$

Diamètre petit devant la longueur d'échange :

$$\eta \rightarrow 0$$

D. Sanchez, *Behaviour of the Landau-Lifschitz equation in a ferromagnetic wire*, à paraître dans Math. Methods Appl. Sci.

1. Modélisation

Fil infini

- fil $\sim \mathbb{R}e_1$
- $H_d(u) \sim -u_2e_2 - u_3e_3$

$$\mathcal{E}_d(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|u_2|^2 + |u_3|^2)$$

- champ appliqué dans la direction du fil : $H_a = \delta e_1$.

1. Modélisation

Fil infini

$$\left\{ \begin{array}{l} u : \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x \longrightarrow S^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \wedge h_\delta(u) - u \wedge (u \wedge h_\delta(u)) \\ h_\delta(u) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u_2 e_2 - u_3 e_3 + \delta e_1 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{E}_\delta = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|u_2|^2 + |u_3|^2) - \delta \int_{\mathbb{R}} u_1$$

1. Modélisation

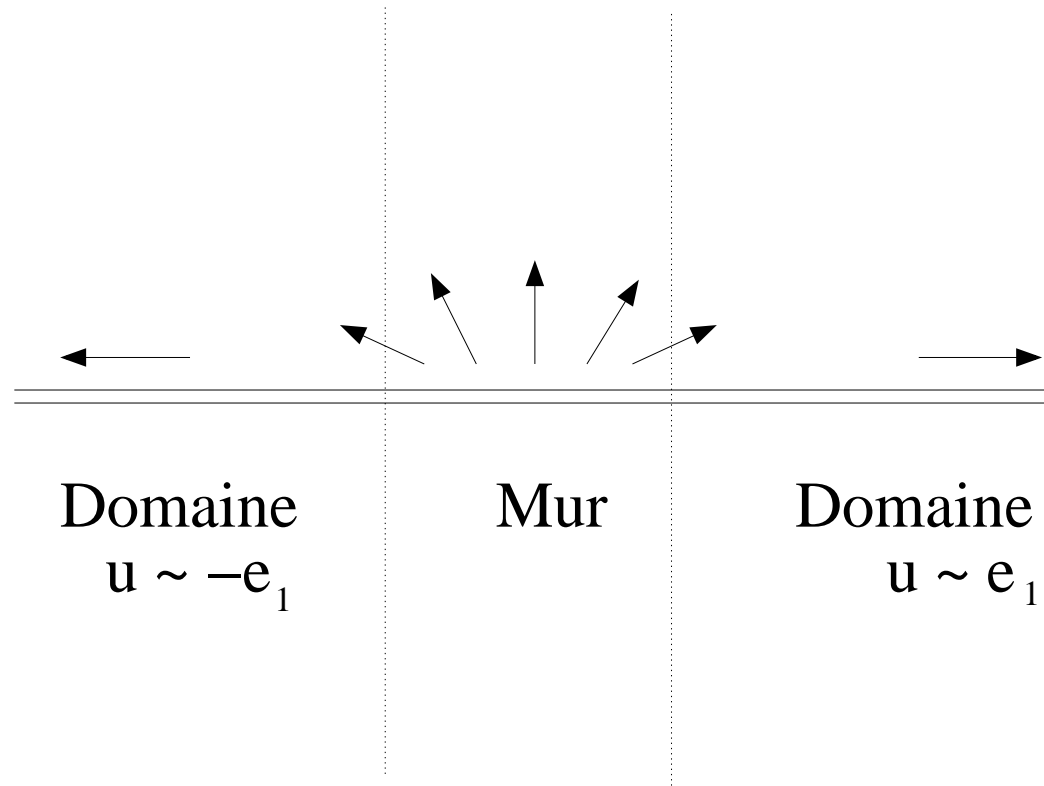
Fil infini (après rescaling)

$$\left\{ \begin{array}{l} u : \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x \longrightarrow S^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \wedge h_\delta(u) - u \wedge (u \wedge h_\delta(u)) \\ h_\delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u_2 e_2 - u_3 e_3 + \delta e_1 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{E}_\delta = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|u_2|^2 + |u_3|^2) - \delta \int_{\mathbb{R}} u_1$$

1. Modélisation

Murs statiques : $\delta = 0$



1. Modélisation

Murs statiques

$$U_0(t, x) = M_0(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{th} x \\ 0 \\ \frac{1}{\operatorname{ch} x} \end{pmatrix}$$

1. Modélisation

Mur soumis à un champ appliqué selon e_1 :

$\delta \neq 0 \Rightarrow$ translation-rotation du mur

$$U_\delta(t, x) = R_{\delta t}(M_0(x + \delta t))$$

où

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

1. Modélisation

Stabilité des configurations de mur ?

Controlabilité de la position des murs ?

2. Stabilité des murs

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \wedge h_\delta(u) - u \wedge (u \wedge h_\delta(u)) \quad (1)$$

$$\text{où } h_\delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u_2 e_2 - u_3 e_3 + \delta e_1$$

Solution pour $\delta = 0$:

$$U_0(t, x) = M_0(x) = \begin{pmatrix} \text{th } x \\ 0 \\ \frac{1}{\text{ch } x} \end{pmatrix}.$$

Solution pour $\delta \neq 0$

$$U_\delta(t, x) = R_{\delta t}(M_0(x + \delta t))$$

2. Stabilité des murs

Théorème 1. Stabilité.

Si $|\delta| < \delta_0$, la solution U_δ est stable pour (1) et asymptotiquement stable modulo une translation-rotation.

Si $\|u(t=0, x) - U_\delta(t=0, x)\|_{H^2}$ est petit, il existe σ_∞ et θ_∞ tels que

$$\|u(t, x) - R_{\theta_\infty}(U_\delta(t, x + \sigma_\infty))\|_{H^2} \rightarrow 0$$

G. Carbou, S. Labbé, *Stability for static walls in ferromagnetic nanowires*,
Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **6** (2006)

2. Stabilité des murs

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u(1 - u)(u - \theta)$$

T. Kapitula, *Multidimensional stability of planar travelling waves*, Trans. Amer. Math. Soc., **349** (1997).

Nouvelles difficultés :

- contrainte non linéaire $|u| = 1$
- invariance par rotation
- Landau-Lifschitz est quasi-linéaire

2. Stabilité des murs

Premier pas : Si u est solution, on définit v par

$$u(t, x) = R_{\delta t}(v(t, x + \delta t))$$

u solution de (1) $\Leftrightarrow v$ vérifie (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = -v \wedge h(v) - v \wedge (v \wedge h(v)) - \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + v_1 v - e_1 \right) \\ h(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v_2 e_2 - v_3 e_3 \end{array} \right. \quad (2)$$

U_δ stable pour (1) $\Leftrightarrow M_0$ stable (2)

\Rightarrow on se ramène à l'étude d'un profil fixe

2. Stabilité des murs

Deuxième pas : Problème de la contrainte géométrique $|v| = 1$.

On décompose $v(t, x)$ dans un repère mobile $(M_0(x), M_1(x), M_2)$

$$M_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{ch} x \\ 0 \\ -\operatorname{th} x \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(t, x) = r_1(t, x)M_1(x) + r_2(t, x)M_2 + \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}M_0(x).$$

2. Stabilité des murs

Deuxième pas :

v solution de (2) $\Leftrightarrow r = (r_1, r_2)$ solution de (3)

$$\frac{\partial r}{\partial t} = (\mathcal{L} + \delta l)r + G(r)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right) + H\left(x, r, \frac{\partial r}{\partial x}\right) \quad (3)$$

- $\mathcal{L} = JL$
- $J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\text{th}^2 x - 1 = l^* \circ l$
- $l = \frac{\partial}{\partial x} + \text{th} x$

2. Stabilité des murs

Deuxième pas :

v solution de (2) $\Leftrightarrow r = (r_1, r_2)$ solution de (3)

$$\frac{\partial r}{\partial t} = (\mathcal{L} + \delta l)r + G(r)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right) + H\left(x, r, \frac{\partial r}{\partial x}\right) \quad (3)$$

M_0 stable pour (2) \iff 0 stable pour (3)

Plus de contrainte non linéaire

2. Stabilité des murs

Troisième pas : Problème de l'invariance par rotation-translation

Si $\Lambda = (\theta, \sigma)$

$$M_\Lambda(x) = R_\theta(M_0(x - \sigma))$$

Dans le repère mobile

$$R_\Lambda(x) = \begin{pmatrix} M_\Lambda(x) \cdot M_1(x) \\ M_\Lambda(x) \cdot M_2 \end{pmatrix}$$

Famille à deux paramètres de solutions \Rightarrow 0 valeur propre d'ordre 2 du linéarisé

$$\text{Ker}(\mathcal{L} + \delta l) = \text{Ker } \mathcal{L} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{ch } x} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\text{ch } x} \end{pmatrix} \right\}$$

2. Stabilité des murs

Troisième pas : **changement de variable**

$$r(t, x) = W(t, x) + R_{\Lambda(t)}(x)$$

- $\forall t, W(t, \cdot) \in \mathcal{E} = (\text{Ker } \mathcal{L})^\perp$
- $\Lambda : \mathbb{R}_t^+ \rightarrow \mathbb{R}_\theta \times \mathbb{R}_\sigma$

r solution de (3) $\Leftrightarrow (W, \Lambda)$ est solution de (4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \mathcal{L}W + \mathcal{R}(\delta, x, \Lambda, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}) \\ \frac{d\Lambda}{dt} &= \mathcal{M}(\Lambda, W, \frac{\partial W}{\partial x}) \end{aligned} \tag{4}$$

2. Stabilité des murs

Troisième pas : changement de variable

On veut montrer que si $W(t=0)$ et $\Lambda(t=0)$ sont petits, alors

1. $\|W(t)\|_{H^2}$ et Λ restent petits,
2. $\|W\|_{H^2} \rightarrow 0$,
3. $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_\infty$.

2. Stabilité des murs

Quatrième pas : estimation variationnelle pour W

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{L}W + \mathcal{R}(\delta, x, \Lambda, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2})$$

On multiplie cette équation par $J^2 \mathcal{L}^2 W$

- $\mathcal{L} = JL$
- $J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\text{th}^2 x - 1$

2. Stabilité des murs

Quatrième pas : estimation variationnelle pour W

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{L}W + \mathcal{R}(\delta, x, \Lambda, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial W}{\partial t} J^2 \mathcal{L}^2 W = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|LW\|_{L^2}^2$$

Sur \mathcal{E} , $\|LW\|_{L^2} \sim \|W\|_{H^2}$

2. Stabilité des murs

Quatrième pas : estimation variationnelle pour W

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{L}W + \mathcal{R}(\delta, x, \Lambda, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}W J^2 \mathcal{L}^2 W = \|L^{\frac{3}{2}} W\|_{L^2}^2$$

Sur \mathcal{E} , $\|L^{\frac{3}{2}} W\|_{L^2} \sim \|W\|_{H^3}$

2. Stabilité des murs

Quatrième pas : estimation variationnelle pour W

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{L}W + \mathcal{R}(\delta, x, \Lambda, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}(\delta, x, \Lambda, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}) J^2 \mathcal{L}^2 W \leq \|\mathcal{R}(\delta, x, \Lambda, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2})\|_{H^1} \|W\|_{H^3}$$

$$\|\mathcal{R}(\delta, x, \Lambda, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2})\|_{H^1} \leq K(|\Lambda| + |\delta| + \|W\|_{H^2}) \|W\|_{H^2}$$

2. Stabilité des murs

Quatrième pas : estimation variationnelle pour W

$$\frac{d}{dt} \|LW\|_{L^2}^2 + \|L^{\frac{3}{2}}W\|_{L^2}^2 \left(1 - K(|\Lambda| + |\delta| + \|W\|_{H^2})\right) \leq 0$$

Tant que $|\Lambda| + |\delta| + \|W\|_{H^2} \leq \frac{1}{2K}$

$$\frac{d}{dt} \|LW\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|L^{\frac{3}{2}}W\|_{L^2}^2 \leq 0$$

et donc

$$\|LW(t)\|_{L^2}^2 \leq \|LW(0)\|_{L^2}^2 e^{-2\alpha t}$$

2. Stabilité des murs

Cinquième pas : estimation de Λ

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \mathcal{M}\left(\Lambda, W, \frac{\partial W}{\partial x}\right)$$

$$\left| \mathcal{M}\left(\Lambda, W, \frac{\partial W}{\partial x}\right) \right| \leq C (|\Lambda| + \|W\|_{H^1}) \|W\|_{H^1}$$

On intègre : tant que $|\Lambda| + |\delta| + \|W\|_{H^2} \leq \frac{1}{2K}$

$$|\Lambda(t)| \leq |\Lambda_0| + C \|W(0)\|_{H^2} e^{-\alpha t}$$

2. Stabilité des murs

Sixième pas : conclusion

Tant que $|\Lambda| + |\delta| + \|W\|_{H^2} \leq \frac{1}{2K}$

$$\|W(t)\|_{H^2} \leq C\|W_0\|_{H^2}e^{-\alpha t}$$

$$|\Lambda(t)| \leq |\Lambda_0| + C\|W_0\|_{H^2}e^{-\alpha t}$$

Si $|\delta|$ est petit, $|\Lambda_0|$ et $\|W_0\|_{H^2}$ sont petits, $\|W(t)\|_{H^2}$ et Λ restent petits.

2. Stabilité des murs

Sixième pas : conclusion

Tant que $|\Lambda| + |\delta| + \|W\|_{H^2} \leq \frac{1}{2K}$

$$\|W(t)\|_{H^2} \leq C\|W_0\|_{H^2}e^{-\alpha t}$$

$$|\Lambda(t)| \leq |\Lambda_0| + C\|W_0\|_{H^2}e^{-\alpha t}$$

Si $|\delta|$ est petit, $|\Lambda_0|$ et $\|W_0\|_{H^2}$ sont petits, $\|W(t)\|_{H^2}$ et Λ restent petits.

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \mathcal{M}(\Lambda, W, \frac{\partial W}{\partial x})$$

$\Rightarrow \frac{d\Lambda}{dt}$ est intégrable, et donc Λ a une limite en $+\infty$.

2. Stabilité des murs

Sixième pas : conclusion

Si $|\delta|$ est petit, $|\Lambda_0|$ et $\|W_0\|_{H^2}$ sont petits,

- $\|W(t)\|_{H^2}$ et Λ restent petits
- $\|W(t)\|_{H^2} \rightarrow 0$
- $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_\infty$

3. Controle des murs

Peut-on contrôler la position des murs grâce au champ appliqué ?

3. Contrôle des murs

$$u^{\delta, \theta, \sigma}(t, x) = R_{\delta t + \theta}(M_0(x + \delta t - \sigma))$$

On fixe (δ_1, σ_1) , et (δ_2, σ_2)

Théorème 2. Contrôlabilité. Si δ_1 et δ_2 sont petits, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un temps final T , il existe un contrôle $\delta(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ tels que si u est la solution de (1) associée δ avec

$$\|u(0, \cdot) - u^{\delta_1, \theta_1, \sigma_1}(0, \cdot)\|_{H^2} \leq \varepsilon$$

alors il existe θ_2 tel que $\|u(T, \cdot) - u^{\delta_2, \theta_2, \sigma_2}(T, \cdot)\|_{H^2} \leq \varepsilon$.

De plus, $\|u(t, \cdot) - u^{\delta_2, \theta'_2, \sigma'_2}(t, \cdot)\|_{H^2} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ avec $|\theta'_2 - \theta_2| + |\sigma'_2 - \sigma_2| \leq \varepsilon$.

G. Carbou, S. Labbé, E. Trélat, *Control of Travelling Walls in a Ferromagnetic Nanowire*, à paraître dans *Discrete Contin. Dyn. Syst.* (2007)

3. Controle des murs

Le controle est donné par

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_2 - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{T} \text{ pour } 0 \leq t \leq T \\ \delta_2 \text{ pour } t \geq T \end{cases}$$

Pour la stabilité : $\delta(t)$ doit rester petit.

$\Rightarrow T$ doit être assez grand pour que le controle reste petit

4. Modèle de fil fini

Fil de diamètre 2η :

$$\Omega_\eta = [0, L] \times B(0, \eta)$$

Diamètre petit devant la longueur d'échange et la longueur du fil :

$$\eta \rightarrow 0$$

4. Modèle de fil fini

Fil de diamètre 2η :

$$\Omega_\eta = [0, L] \times B(0, \eta)$$

Diamètre petit devant la longueur d'échange et la longueur du fil :

$$\eta \rightarrow 0$$

Fil $\sim [0, L]e_1$

Energie démagnétisante équivalente :

$$\int_{[0, L]} (|u_2|^2 + |u_3|^2) + |u_1(0)|^2 + |u_1(L)|^2$$

4. Modèle de fil fini

$$\left\{ \begin{array}{l} u : \mathbb{R}_t^+ \times [0, L]_x \longrightarrow S^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \wedge h_\delta(u) - u \wedge (u \wedge h_\delta(u)) \\ h_\delta(u) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u_2 e_2 - u_3 e_3 + \delta e_1 \\ -\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u_1 e_1 - u_1^2 u = 0 \text{ en } x = 0 \\ \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u_1 e_1 - u_1^2 u = 0 \text{ en } x = L \end{array} \right.$$

4. Modèle de fil fini

- Couche limite au bord pour les minima

$$\mathcal{E}(u) = \varepsilon^2 \int_{[0,L]} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \int_{[0,L]} (|u_2|^2 + |u_3|^2) + |u_1(0)|^2 + |u_1(L)|^2$$

4. Modèle de fil fini

- Couche limite au bord pour les minima
- Existence et stabilité de profils de murs ?
 - Pas de description explicite des profils de murs
 - Murs stationnaires : centrés en $\frac{L}{2}$
 - Stabilité de ces murs ?

4. Modèle de fil fini

- Couche limite au bord pour les minima
- Existence et stabilité de profils de murs
- Hysteresis pour le retournement de l'aimantation