Transformée de Radon
Transformée de Radon Atténuée

Ch. Dossal

2008

1 Introduction

La transformée de Radon atténuée est une variante de la transformée de Radon qui prend en compte une atténuation physique du rayonnement dû à la traversé de certains organes. Cette atténuation supplémentaire peut être estimée préalablement par une autre méthode que la tomographie SPEC ou estimée conjointement avec le signal transformé. Dans ce TD nous supposerons l'atténuation connue. Nous prendrons un modèle de d'atténuation assez diffus du type *Fatntôme de Shepp-Logan* et un modèle de source (l'objet sur lequel on réalise une transformée de Radon) plutôt ponctuel. Plus précisément on supposera que la source est une somme de masses ponctuelles représentées par des petits disques.
Si on note a l'atténuation, la transformée atténuée de Radon est définie par

$$R_a(f)(\theta, s) = \int_{\langle (x,y),\theta\rangle = s} f(x,y) e^{-\int_0^{+\infty} a((x,y)+t\theta^\perp)dt} d\lambda_{s,\theta}(x,y) dxdy.$$

Ainsi pour la transformée de Radon atténuée n'est pas symétrique en θ. L'atténuation n'est pas la même dans les deux sens : $R_a(f,\theta,-s) \neq R_a(f,\theta+\pi,s)$ contrairement à la transformée de Radon classique sans atténuation.
Dans ce TD nous proposons de simuler une transformée de Radon atténuée et d'effectuer son inversion en utilisant la méthode des projections itérées.

2 Transformée de Radon atténuée directe

1. Ecrire une fonction *Attenuation* qui calcule pour un angle donné, une image a donnée de taille $n \times n$ et un type d'interpolation donné l'atténuation $e^{-\int_0^{+\infty} a((x,y)+t\theta^\perp)dt}$ et qui renvoie une image de taille $n_1 \times n_1$ dont la taille correspond à la taille de l'image de a par la rotation d'angle Θ. On pourra utiliser la commande *cumsum*.

2. Visualiser l'atténuation obtenue pour différents angles en prenant pour image a, le fantôme de Shepp-Logan. Essayer aussi de diviser l'atténuation a par un facteur constant de 10 ou 30 pour voir l'effet sur *l'atténuation angulaire*.

3. En utilisant la fonction Cercle.m mise à votre disposition, créer une Source formée de 5 disques de rayon 5.

4. Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction *RadonAt* qui calcule la transformée de Radon atténuée d'une Source S. Vous pouvez reprendre la fonction de transformée de

Radon classique ou vous servir de cette dernière. Cette nouvelle fonction prend en entrée un paramètre supplémentaire : l'atténuation.

5. Faire quelques tests sur différentes sources et à des niveaux d'atténuation différents.
6. Dans certaines situations, certaines sources sont moins visibles sur le sinogramme que d'autres. Pourquoi ?

3 Projections itérées

Nous proposons d'inverser cette transformée de Radon atténuée par l'algorithme des projections itérées que nous avions utilisé pour l'inversion de la transformée de Radon standart. Plus précisément, nous allons utiliser la formule suivante :

$$f_{n+1} = P_{\theta_n}(f_n) = f_n + A_{\theta_n} \times \left(\frac{g_{\theta_n} - R_a(f_n)(\theta_n)}{R(|A_{\theta_n}|^2)(\theta_n)} \right)_{s=\langle (x,y),\theta_n \rangle} \tag{1}$$

où g_{θ_n} est la restiction de la transformée de Radon à inverser à la direction θ_n et où A représente l'atténuation exponentielle angulaire.
L'idée directrice est la même que celle de l'algorithme équivalent pour la transformée de Radon classique. La différence principale est qu'ici, à chaque étape on ajoute une fonction qui n'est pas constante le long de lignes. Le facteur A_{θ_n} module l'intensité de qu'on ajoute à chaque étape le long de la ligne.

7. Effectuer l'inversion de la transformée de Radon atténuée par l'algorithme des projections itérées associée à la transformée de Radon classique en faisant varier l'intensité de l'atténuation. Afficher à chaque étape l'erreur de reconstruction ℓ_2 commise.
   Que pensez vous des résultats? Comment évolue l'erreur en fonction des itérations ?
8. Ecrire une fonction qui pour un angle donné θ calcule la transformée de Radon *classique* de $|A_\theta|^2$.
9. En utilisant la relation (1), écrire une fonction *ProjIterAt* qui effectue l'algorithme des projections itérées.
   Quelques Remarques :
   - Le terme A_{θ_n} d'atténuation exponentielle présent dans (1) est obtenue par rotation et troncature de la sortie de la fonction *Attenuation*. En effet le terme A_{θ_n} est de taille $n \times n$ et représente une atténuation selon un angle θ_n.
     Le terme $\left(\frac{g_{\theta_n} - R_a(f_n)(\theta_n)}{R(|A_{\theta_n}|^2)(\theta_n)} \right)_{s=\langle (x,y),\theta_n \rangle}$ est une image de taille $n \times n$ qui est constant le long de lignes orientées par l'angle θ_n et peut être obtenue à partir de la fonction *RetroAngle* réalisée dans le précédent TD.
   - La division par $R(|A_{\theta_n}|^2)(\theta_n)$ est une division terme à terme.
   - A chaque étape pour vérifier que l'algorithme effectue bien la projection, afficher le terme $f_n - P_{\theta_n}(f_n)$ et vérifier que la transformée de Radon atténuée de $P_{\theta_n}(f_n)$ est bien proche de la transformée de Radon atténuée que vous êtes en train d'inverser.
10. Effectuer des tests en utilisant les mêmes données que dans la question 7. et afficher à chaque étape l'erreur ℓ_2 entre la reconstruction et la source originale et comparer aux résultats obtenus par l'inversion classique.