Espaces métriques et Espaces normés

C. Dossal

Janvier 2012.

1 Notations

On note $\mathscr{B}(x,r)$ la boule ouverte de rayon $r>0$ de l'espace métrique (E,d) : $\mathscr{B}(x,r)=\{y\in E \text{ tels que } d(x,y)<r\}$. La boule fermée sera notée $\mathscr{B}_f(x,r)=\{y\in E \text{ tels que } d(x,y)\leqslant r\}$. :

2 Espaces Métriques.

1. Pour chacune des fonctions d_i suivantes définies sur E, déterminer si d est une distance et le cas échéant déterminer les boules $\mathscr{B}(0,1)$, $\mathscr{B}(0,2)$, $\mathscr{B}(-1,3)$ et les dessiner.
   (a) $E=\mathbb{C}$ et $d_1(x,y)=|x-y|$.
   (b) $E=\mathbb{C}$ et $d_2(x,y)=0$ si $x=y$ et $d_2(x,y)=1$ sinon.
   (c) $E=\mathbb{C}$ et $d_3(x,y)=|x-y|$ si $x\bar{y}\in\mathbb{R}^+$ et $d_3(x,y)=|x|+|y|$ sinon.
   (d) $E=\mathbb{C}$ et $d_4(x,y)=0$ si $x=y$ et $d_4(x,y)=|x|+|y|$ sinon.
   (e) $E=\mathbb{C}$ et $d_5(x_1+ix_2,y_1+iy_2)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$.
   (f) $E=\mathbb{R}$ et $d_6(x,y)=|x+y|$.
2. Déterminer l'ensemble des ouverts de $\mathbb{C}$ pour la distance d_2.
3. Pour cette distance d_2, l'adhérence de $\mathscr{B}(0,1)$ est-elle égale à $\mathscr{B}_f(0,1)$?
4. On considère l'application f suivante :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C},d_1) & \to & (\mathbb{C},d_2) \\ x & \mapsto & x \end{array} \tag{1}$$

   L'application f est-elle continue ?
   Qu'en est-il de sa réciproque ?
5. Déterminer l'ensemble des compacts de $(\mathbb{C},d_2)$.
6. Déterminer, pour les distances d_1,d_2 et d_3 le comportement des suites définies par :
   (a) $u_n=\frac{n+2}{n+1}$.
   (b) $v_n=1+\frac{i}{2^n}$.
7. On considère l'ensemble E des suites à valeur dans $\{0,1\}$.
   (a) Montrer que l'application $d(x,y)=\{\text{Card } i \text{ tels que } x(i)\neq y(i)\}$ définit une distance sur E. On appelle cette distance *distance de Hamming*. Cette distance est utilisé en particulier en théorie du codage.
   (b) Pour tout $x\in E$, déterminer la boule $\mathscr{B}(x,1)$.

(c) Soit E_2 l'espace des vecteurs de dimension 2 à valeur dans $\{0,1\}$, on définit la distance de la même manière que précédemment. Donner la valeur de $\min_{(x,y)\in E_2^2} d(x,y)$.

(d) Soit E_3 l'espace des vecteurs de dimension 3 à valeur dans $\{0,1\}$, on définit la distance de la même manière que précédemment. On note $a=(0,0,0)$, $b=(0,1,1)$, $c=(1,0,1)$, $d=(1,1,0)$ et $F=\{a,b,c,d\}$.
Donner la valeur de $\min_{(x,y)\in F} d(x,y)$.

(e) Soit F un ensemble de vecteurs de $E=\{0,1\}^N$ tels que $\min_{(x,y)\in F} d(x,y)=K$.
– Montrer que pour tout $x\in E$, $\mathscr{B}(x,K/2)$ contient au plus un vecteur de F.
– Montrer que pour tout couple $(x,y)\in F^2$, et pour sous-ensemble d'indices I de cardinal strictement supérieur à $N-K+1$, $d(x(I),y(I))>0$.
Ce sont ces propriétés qui sont à la base des codes correcteurs d'erreur.

3 Espaces normés.

1. Soit (E,N) un espace normé. Montrer que l'application $d(x,y)=N(x-y)$ définit une distance sur E.
2. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? fermés, ni l'un , ni l'autre ?
   (a) dans $\mathbb{R}$, $A=[0,1]$, $A=[1,4[$, $A=]1,5[$.
   (b) dans $\mathbb{R}^2$, $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/x_1^2+x_2^2<1\}$, $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/x_1^2+x_2^2\leq 1\}$
   $A=\ \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/x_1=0,\ x_2\in]0,1[\}$.
3. Soit $D=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/\ x_1>0, x_1^2+x_2^2<4\}$. Montrer que D est ouvert, (choisir une norme pour la démonstration).
4. Donner l'adhérence, l'intérieur, la frontière
   (a) dans $\mathbb{R}$, $A=[0,1]$,
   (b) dans $\mathbb{R}^2$, $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/\ x_1^2+x_2^2<1\}$,
   $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x_1^2+x_2^2\leq 1\}\bigcup\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/\ x_1^2+x_2^2=2\}$, $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/\ x_2=x_1^2\}$.
5. Donner des exemples dans $\mathbb{R}^2$ de parties fermées A telles que l'adhérence de l'intérieur soit distincte de A.
6. Soit (x_n) une suite convergente dans E. Déterminer l'adhérence de l'ensemble $A=\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$.
7. Soit A et B deux sous- ensembles non vides de E, espace vectoriel normé. On définit :
$$A+B=\{a+b,\ a\in A,\ b\in B\}.$$
   Montrer que si A est ouvert ou B est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.
8. Soit (E,N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
   (a) Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que si l'intérieur de F est non vide, alors $F=E$.
   (c) On suppose que E est de dimension finie et on note $(e_i)_{i\leqslant n}$ une base de E.
   – En utilisant l'équivalence entre la norme infinie sur les coefficients dans la base $(e_i)_{i\leqslant n}$ et la norme N montrer que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\to 0$, les coefficients de v_n dans $(e_i)_{i\leqslant n}$ tendent vers 0.
   – En déduire que $F=\overline{F}$.
9. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que :
   (a) $\partial A=\{x\in E/\forall\varepsilon>0,\ B(x,\varepsilon)\bigcap A\neq\emptyset et\ B(x,\varepsilon)\bigcap A^C\neq\emptyset\}$.

(b) $\partial A = \partial A^C$.

(c) A est fermé si et seulement si ∂A est inclus dans A.

(d) A est ouvert si et seulement si $\partial A \bigcap A = \emptyset$.

10. Soit A et B deux sous- ensembles non vides de E, espace vectoriel normé.

(a) Montrer que si A et B sont compacts, alors $A+B$ est compact.

(b) Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A+B$ est fermé.

11. Pour tout $p \geqslant 1$, on définit sur $E = \mathbb{R}^n$ l'application suivante :

$$N_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}. \tag{2}$$

Nous allons montrer que N_p définit une norme E.

(a) En utilisant la concavité du logarithme, montrer que si $p > 0$, $q > 0$ et $1/p + 1/q = 1$ alors pour tout couple $(a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $a^{1/p} b^{1/q} \leqslant a/p + b/q$.

(b) Supposons que $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{p} |y_k|^q = 1$.
Montrer que $\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant 1$.

(c) Suposons désormais que $\sum_{k=1} |x_k|^p$ et $\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q$ sont non nuls. En appliquant le résultat de la question précédente à $x' = \frac{x}{\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}}$ et à $y' = \frac{y}{\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}}$ montrer l'inégalité de Hölder :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/q}. \tag{3}$$

Cette inégalité est également appelé inégalité de Cauchy-Schwarz quand $p = q = 2$.

(d) Montrer que pour tout couple $(a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$|a+b|^p \leqslant |a||a+b|^{p-1} + |b||a+b|^{p-1}. \tag{4}$$

(e) En déduire que pour tout couple $(x,y) \in E^2$,

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leqslant \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{pq-q} \right)^{1/q} \tag{5}$$

(f) En utilisant la valeur de $pq - q$ et le fait que $1/q = 1 - 1/p$, montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p} \tag{6}$$

(g) En déduire que pour tout $p \geqslant 1$, N_p définit une norme sur E. La norme N_2 est appelée norme euclidienne. On verra que cette norme N_2 peut être construite à partir d'un produit sclalaire.

12. Si on note $M(x) = \max_k |x_k|$, montrer que pour tout p,

$$M(x) \leqslant N_p(x) \leqslant M(x) n^{1/p}. \tag{7}$$

13. Que vaut $\lim_{p \to +\infty} N_p(x)$?

14. Montrer que l'application $x \mapsto M(x)$ définit une norme sur E. On la note $N_\infty(x)$.
15. Dessiner les boules unités des normes N_1, N_2 et N_∞.
16. Montrer que les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^n$: $N(x) = \sum_{k=1}^n k\,|x_k|$ et $N'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|}{k}$.
17. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x) = \max(|x_1|,\ |x_2|,\ |x_1 - x_2|)$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessiner la boule unité fermée associée.
18. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.
    On pose $\|A\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n,\ \|x\|=1} \|Ax\|$
    (a) Montrer que cette expression définit une norme sur l'ensemble des matrices $n \times n$.
    (b) Montrer que $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \left(\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$.
19. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont ouverts, fermés ou compacts :
    (a) $\{(x,y)$ tels que $x \in [0,1], y \in [0,1]\}$,
    (b) $\{(x,y)$ tels que $x = 0, y = n, n \in \mathbb{Z}\}$,
    (c) $\{(x,y)$ tels que $x = 0, y = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$,
    (d) $\{(x,y)$ tels que $x = y\}$,
    (e) $\{(x,y)$ tels que $x < y\}$,
    (f) $\{(x,y)$ tels que $x \geqslant y^2 + 3\}$,
    (g) $\{(x,y)$ tels que $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $y = \frac{1}{x}\}$,
    (h) $\{(x,y)$ tels que $|x| + 2|y| \leqslant 6\}$.

    Soit $p \in]1, +\infty[$, on note $L_p(\mathbb{R})$ l'espace des classes de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

    $$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt < +\infty \tag{8}$$

    On rappelle $f \mapsto (\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt)^{1/p}$ définit une norme sur $L_p(\mathbb{R})$. Dans la suite de la feuille on identifiera une classe de fonctions à un représentant de la classe. On note L_∞.
    Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x \in [-1,1]$.
20. Pour chacune des suites suivantes dire si elles convergent dans $L_1(\mathbb{R})$, dans $L_2(\mathbb{R})$ et dans $L_\infty(\mathbb{R})$
    (a) $f_n(x) = \frac{1}{n} f(\frac{x}{n})$.
    (b) $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} f(\frac{x}{n})$.
    (c) $f_n(x) = \sqrt{n} f(nx)$.
    (d) $f_n(x) = n^{1/4} f(nx)$.
21. Soit $E = C^0([0,1];\mathbb{R})$. On définit pour $f \in E$:

    $$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

    (a) Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur E.
    (b) Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes.