Intégration et dérivation numérique

C. Dossal

Février 2013

1 Dérivation numérique

1. Soit f une fonction C^3 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$. On dispose de la valeur de f aux points x_0, $x_0 + 2h$ et $x_0 - h$.
   (a) Proposer plusieurs estimations de $f'(x_0)$ et les ordres associés. Quelle est l'estimation d'ordre maximale ?
   (b) Proposer une estimation de $f^{(2)}(x_0)$ et déterminer l'ordre associé.

2 Méthode des trapèzes et méthode de Simpson

2. Ecrire une fonction matlab qui estime l'intégrale
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$
par la méthode des trapèzes sur n points.
3. Idem pour la méthode de Simpson.
4. Ecrire une fonction matlab estimant par la méthode de Simpson l'intégrale de
$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$
en utilisant n points. Comparer à la valeur théorique. Tracer la courbe du logarithme de l'erreur commise en fonction de n.
5. La longueur d'une courbe d'équation $y = f(x)$ pour $x \in [a,b]$ est donnée par l'intégrale
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$
Nous souhaitons déterminer la longueur de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \sin(x)$ pour $x \in [0, \pi]$. On utilisera l'approximation $\pi \approx 3.14159$
   (a) Déterminer l'estimation à l'ordre 2 de la dérivée $\dfrac{dy}{dx}$ aux points $x_k = \frac{k\pi}{8}$ pour k variant de 0 à 8. On utilisera une estimation à l'ordre 1 en x_0 et en x_8.
   (b) Utiliser les valeurs obtenues pour obtenir une estimation de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ aux points x_k.
   (c) En utilisant la méthode de Simpson, estimer la longueur de $\mathscr{C}$.

3 Estimation de l'erreur d'une méthode d'intégration.

6. On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^3$ de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose
$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx \quad \text{et} \quad J(f) = \frac{1}{3}\left(f(-1) + f(1) + 4f(0)\right).$$

(a) Montrer que pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à 2, on a $I(Q) = J(Q)$.

On note P le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré inférieur ou égal à 2 de la fonction f aux points -1, 0 et 1.

(b) Ecrire les polynômes de la base de Lagrange associés à -1 0 et 1 ainsi que le polynôme P dans cette base.

(c) Soit $x \in]-1,0[\cup]0,1[$. On pose pour tout $t \in]-1,1[$,

$$g(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x) - P(x)}{x(x^2-1)} t(t^2-1).$$

- Montrer qu'il existe $\omega \in [-1,1]$ tel que $g^{(3)}(\omega) = 0$.
- En déduire une majoration de $|f(x)-P(x)|$ pour $x \in [-1,1]$ en fonction de $M_3 = \sup\{|f^{(3)}(x)|; x \in [-1,1]\}$.
- Donner une majoration de $|I(f) - J(f)|$.

4 Méthode de quadrature

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et w une fonction de poids définie sur $\mathbb{R}$, telle que $w(x) > 0, \forall x \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I x^n w(x)dx < +\infty$.
Soit $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, n points distincts de I. On veut construire une méthode quadrature de la forme

$$\int_{x \in I} f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

1. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les λ_i pour que la formule de quadrature soit d'ordre au moins n.
2. En déduire l'existence et l'unicité d'un tel n-uplet $(\lambda_i)_{i \leqslant n}$.

5 Méthodes de quadrature de Gauss.

On considère un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et w une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$, telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I x^n w(x)dx < +\infty$. On sait qu'il existe une unique suite de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unitaires associée à w. Soit $n \in \mathbb{N}$, P_n le polynôme orthogonal associé unitaire (dont le coefficient de plus haut degré est 1) de degré n, on note $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les n racines de P_n. On a démontré dans un exercice précédent que $\forall i \leqslant n$, $r_i \in I$.

1. Montrer qu'il existe un unique $n-uplet$ $(\lambda_1, \cdot, \lambda_n)$ solution du problème linéaire suivant :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_k(r_i) = \begin{cases} \langle P_0, P_0 \rangle & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n-1. \end{cases} \tag{1}$$

2. Soit p un polynôme de degré inférieur ou égale à $(2n-1)$. Justifier l'existence et l'unicité de deux $n-uplets$ $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ et $(\beta_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ tels que $p(x) = P_n(x)q(x) + r(x)$ avec

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P_i, \quad r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i P_i.$$

3. Montrer que

$$I_w(p) := \int_I p(x)w(x)dx = \beta_0 \langle P_0, P_0 \rangle.$$

4. Montrer que

$$J_w(p) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p(r_k) = \beta_0 \langle P_0, P_0 \rangle.$$

5. En déduire que la formule d'intégration approchée :
$$\int_I w(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \tag{2}$$
est exacte pour tous les polynômes de degré inférieurs ou égal à $(2n-1)$.
6. En utilisant le polynôme $p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-r_i)^2$ montrer que l'ordre de cette méthode de quadrature est exactement $2n-1$.
On considère à partir de maintenant que $f \in C^{2n}(I) \cap C_w(I)$. On considère le polynôme d'interpolation de Hermite associé à f aux points $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On rappelle que ce polynôme est l'unique polynôme H de degré au plus $(2n-1)$ qui vérifie :
$$\forall i \leqslant n, \quad f(r_i) = H(r_i) \text{ et } f'(r_i) = H'(r_i).$$
7. Jutifier le fait que $I_w(H) = J_w(H) = J_w(f)$.
On rappelle que la formule d'erreur d'interpolation par des polynômes d'interpolation de Hermite :
$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!} \prod_{i=1}^{n}(x-r_i)^2 = \frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!} P_n(x)^2.$$
où $\xi_x \in I$ dépend de $x \in I$.
8. En utilisant les questions précédentes et le théorème de la moyenne, montrer qu'il existe $\xi \in I$
$$I_w(f) - J_w(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_I P_n(x)^2 w(x)dx.$$
et en déduire une majoration de l'erreur de la formule de quadrature en fonction de f.

5.1 Formule de Gauss-Lengendre

9. On prend $I = [-1,1]$ et $w(x) = 1$ sur l'intervalle $[-1,1]$. Que valent P_0, P_1, P_2 et P_3 ?
10. Déterminer les formules de quadrature associées à un point et à deux points.
11. Que valent r_1, r_2 et r_3 les racines de P_3.
12. En utilisant matlab, montrer que
$$\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{5}{9}, \lambda_2 = \frac{8}{9}. \tag{3}$$
13. Expliciter la formule de quadrature associée et rappeler son ordre.

5.2 Formule de quadrature de Gauss-Tchebichev

On note $T_k(x) = cos(k \arccos x)$ le $k$ième polynôme de Tchebichev.
Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on note $\theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{2n}$ et $x_i = cos(\theta_i)$. Les $(x_i)_{i \leqslant n}$ sont ainsi les racines de T_n.
On considère la formule de quadrature suivante :
$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \tag{4}$$
14. Montrer que les polynômes $Q_k(x) = \dfrac{T_n(x)}{x-x_k}$ pour $k \leqslant n$ forment une base $\mathbb{R}^n[X]$.
15. En déduire que si la formule de quadrature est exacte pour tous les polynômes de $\mathbb{R}^n[X]$ alors pour tout $i \leqslant n$;
$$\lambda_i = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)}{T_n'(x_i)(x-x_i)\sqrt{1-x^2}} dx. \tag{5}$$
16. Expliciter $T_n'(x_i)$ pour tout $i \leqslant n$.
17. Pour i fixé, et pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_j = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos j\theta - \cos j\theta_i}{\cos\theta - \cos\theta_i} d\theta$.
Montrer que pour tout $j > 0$, $\alpha_{j+1} + \alpha_{j-1} = 2\cos\theta_i \alpha_j$. En déduire que $\alpha_j = \frac{\pi \sin j\theta_i}{\sin\theta_i}$.
18. En déduire que pour tout $i \leqslant n$, $\lambda_i = \frac{\pi}{n}$.
19. Quel est l'ordre de cette méthode d'intégration ?

6 Quadrature de Gauss Lengendre sur un carré.

On souhaite établir une formule de quadrature permettant d'approcher l'intégrale suivante :

$$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1} f(x,y)dxdy.$$

par une somme finie de valeurs ponctuelles

$$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1} f(x,y)dxdy \approx \sum_i \alpha_i f(x_i,y_i). \tag{6}$$

Grâce à la méthode de quadrature de Gauss Legendre on sait pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer des $(\lambda_i)_{i\leqslant n}$ et des $(r_i)_{i\leqslant n}$ tels que la formule de quadrature

$$\int_{x=-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_i \lambda_i f(r_i) \tag{7}$$

soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieurs où égaux à $2n-1$.

1. En déduire que si $k \leqslant 2n-1$ et si $l \leqslant 2n-1$,

$$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1} x^k y^l dxdy = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j r_i^k r_j^l. \tag{8}$$

2. En déduire une formule de quadrature sur le carré.
3. Expliciter ces formules dans le cas $n=1$, $n=2$ et $n=3$ et donner les fonctions polynomiales pour lesquelles elles sont exactes.

7 Quadrature sur un triangle

On cherche maintenant une formule de quadrature sur un triangle.
Plus précisément on cherche une formule de quadrature de la forme :

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} f(x,y)dxdy = \sum_i \alpha_i f(x_i,y_i).$$

On rappelle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

$$F(a,b) = \int_{-1}^{1} x^a(1-x)^b dx = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$$

1. Montrer que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,

$$I_{n,m} = \int_{x=}^{1}\int_{y=0}^{1-x} x^n y^m dxdy = \frac{n!m!}{(n+m+2)!}.$$

2. On cherche d'abord une formule à un point exacte pour les polynômes $f(x,y) = 1,x,y$. Déterminer α_1, x_1, y_1.
3. On veut maintenant augmenter l'odre de la méthode de quadrature. Pour cela on va utiliser 3 points : $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(0,\frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2},0)$. Déterminer les coeffcients α_i associés de manière à ce que cette méthode soit exacte pour les polynômes en x et y d'ordre 2.
4. Montrer que pour avoir une formule exacte pour tous les polynômes d'ordre 3, on peut se contenter des 4 points suivants :

$$(\frac{1}{3},\frac{1}{3}), \quad (\frac{1}{5},\frac{3}{5}), \quad (\frac{3}{5},\frac{1}{5}) \text{ et } (\frac{1}{5},\frac{1}{5}),$$

en déterminant la formule de quadrature associée.