Année universitaire 2013-2014
Licence 3 de mathématiques
Espaces de Hilbert et analyse de Fourier - Feuille 2

Exercice 1
Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. On rappelle que $A^\perp$ désigne

$$A^\perp = \{x \in E;\ < x, y >= 0\ \forall y \in A\}.$$

Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A \subset A^{\perp\perp}$. A-t-on toujours égalité ?
4. On suppose désormais que A est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $A \cap A^\perp = \{0\}$.

Exercice 2
On considère $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice 3
Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on note M_N le sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^N x_n = 0$.

1. Montrer que l'application $(x_n)_n \mapsto \sum_{k=0}^N x_k$ est linéaire continue de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Que peut-on en déduire sur M_N ? Conclure que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = M_N \oplus M_N^\perp$.
2. Soit $E = \{(y_n)_n$ telles que, pour $0 \le i < j \le N$, on ait $y_i = y_j$ et $y_n = 0$ pour $n > N\}$.
   (a) Montrer que l'orthogonal $M_N^\perp$ de M_N contient E.
   (b) Montrer que $M_N^\perp = E$ (remarquer que, pour $0 \le i < j \le N$, la suite (x_n) telle que $x_i = 1$, $x_j = -1$ et $x_n = 0$ si $n \ne i$ et $n \ne j$ appartient à M_N).

Exercice 4
Soit H un espace de Hilbert complexe. Soit $T : H \longrightarrow H$ une application linéaire continue de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $(y, z) \in H^2$ tels que pour tout $x \in H$, on ait $Tx = \langle x; y\rangle z$.
2. Déterminer l'adjoint de T.

Exercice 5
Posons $H = L^2([0,1]; \mathbb{C})$ et fixons $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$. Pour tout $f \in H$, on note Tf l'application $[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à x associe $\displaystyle\int_0^x f(t)\frac{dt}{t^\alpha}$.
Vérifier que Tf est continue pour tout $f \in H$, puis que l'application $T : H \longrightarrow H$ est linéaire continue.

Exercice 6
Soit H un espace de Hilbert réel. Soit $P \in \mathcal{L}(H)$ une application non nulle vérifiant $P^2 = P$, P est appelé un projecteur. On note $E = Im(P)$.

1. Montrer que E est fermé.
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $\|P\| = 1$,

(b) P est la projection orthogonale sur E.

(c) $P^\star = P$.

pour (a) implique (b) on pourra considérer $z = y + \lambda(x - P(x))$ *avec* $x \in H$, $y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

1. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes et T l'application linéaire de $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ dans lui-même définie par $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Vérifier que T est continue, et calculer son adjoint.
2. Soit $H = L^2([0,1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire usuel, et $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x \in [0,1]$, on pose
$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy.$$
Vérifier que T est une application linéaire continue, et calculer son adjoint.

Exercice 8

Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, (e_n), (f_n), (g_n) trois bases hilbertiennes de H, et T un opérateur linéaire continu sur H.

1. Montrer que, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \|T^* g_p\|^2$.
2. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|Tf_n\|^2$.
On fixe désormais une base hilbertienne (e_n) de H. On dira que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si
$$\text{la série } \sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 \text{ converge.}$$
Par la question précédente, cette propriété ne dépend pas de la base hilbertienne choisie. On note $HS(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H, et pour $T \in HS(H)$, on note
$$\|T\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2}.$$
3. Montrer que $\|T\| \leq \|T\|_2$, et que $HS(H) \neq \mathcal{L}(H)$.
4. Montrer que si X est un espace vectoriel normé complet alors $\mathcal{L}(X)$ est complet pour la norme d'opérateur associée.
5. Montrer que $HS(H)$ muni de la norme $\|.\|_2$ est un espace de Hilbert (on précisera le produit scalaire associé). Pour démontrer la complétude, on remarquera qu'une suite de Cauchy pour $HS(H)$ muni de $\|.\|_2$ est aussi une suite de Cauchy pour $\mathcal{L}(H)$ muni de $\|.\|$.
6. Soit $T \in HS(H)$. On note P_n la projection orthogonale sur Vect $(e_0, \ldots, e_n)$. Montrer que, pour tout n, $T \circ P_n \in HS(H)$ et que $\|T - T \circ P_n\|_2 \to 0$. En déduire que les opérateurs de rang fini sont denses dans $HS(H)$.