Année universitaire 2013-2014
Licence 3 de mathématiques
Espaces de Hilbert et analyse de Fourier - Feuille 5

Exercice 1

a. Soit n un entier naturel. Montrer la relation suivante :

$$\int_{-(n+1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \pi - \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{1}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{t}\Big) \sin\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t\Big] \mathrm{d}t \quad .$$

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Exercice 2

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Soit $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ telle que $g(x)$ converge vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
Prouver que $f * g(x)$ converge vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Pour tout $(h;x) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f_h(x) = f(x+h)$. On désigne par V le sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ engendré par $\{f_h \ ; \ h \in \mathbb{R}\}$.

a. Soit h un réel. Calculer $\hat{f_h}$ (en fonction de $\hat{f}$).

b. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\hat{f}(a) = 0$. Montrer que V n'est pas dense dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Exercice 4

Soit b un réel. Trouver toutes les $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = e^{-|x|} + b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|} f(t) \mathrm{d}t \quad ;$$

on pourra utiliser la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-a|x|}$.

Exercice 5

Soit n un entier ≥ 1. Soient $(\gamma_1;\cdots;\gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1;\cdots;b_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Soit $(a_1;\cdots;a_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $|a_k| \leq b_k$ pour tout $k \in \{1;\cdots;n\}$. Pour tout réel t, on pose $f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\gamma_k t}$ et $g(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k e^{i\gamma_k t}$.

a. Calculer la transformée de Fourier de $\varphi : x \mapsto (1+|x|)e^{-|x|}$.

b. Montrer l'inégalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|^2}{(t^2+1)^2} \mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|g(t)|^2}{(t^2+1)^2} \mathrm{d}t \quad ;$$

on pourra pour cela développer $|f(t)|^2$.

Exercice 6 : espace de Wiener

Soit W l'espace des $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ tels que $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Pour tout $f \in W$, on pose $\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)| \mathrm{d}y$.

a. Vérifier que $\| \ \|$ est une norme sur W.

b. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans W. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers un f dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Prouver que la suite $(\hat{f}_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $\hat{f}$ d'une part, et converge dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ d'autre part.

c. Démontrer que W est un espace de Banach.

Exercice 7

On pose ici $f = 1_{[-1;1]}$.

a. Déterminer la convolée $f * f$.

b. Que vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} \mathrm{d}t$?