Transformée de Fourier à temps discret

Dans cette feuille, on définie la transformée de Fourier à temps discret, de pas de temps 1, d'une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $(a_n = f(n))$ par

$$\mathcal{F}[a](t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-2i\pi nt}.$$

Exercice 1. Transformations élémentaires

(1) Soit τ_+ (resp. τ_-) l'application qui à la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe la suite $\tau_+a(n) = a(n+1)$ (resp. $\tau_+a(n) = a(n-1)$). Exprimer $\mathcal{F}[\tau_+a]$ et $\mathcal{F}[\tau_-a]$ en fonction de $\mathcal{F}[a]$.

(2) La convolution de deux suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $b \in \ell^1(\mathbb{Z}) \cap \ell^\infty$ est définie par

$$a * b(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)b(n-k).$$

(a) Vérifez que la convolution est bien définie, que $a*b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ avec $\|a*b\|_1 \leq \|a\|_1\|b\|_1$ et que $a*b = b*a$.

(b) Calculer $\mathcal{F}[a*b]$ en fonction de $\mathcal{F}[a]$ et de $\mathcal{F}[b]$.

(3) Donnez une condition sur la suite a pour que $\mathcal{F}[a]$ soit dérivable et déterminez une suite b telle que $\mathcal{F}[a]' = \mathcal{F}[b]$.

Exercice 2. Un exemple élémentaires mais essentiel

(1) soit $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\mathcal{F}[\delta_k]$.

(2) Soit E un polynôme. Déterminer a pour que $\mathcal{F}[a] = E(e^{2i\pi t})$.

(3) À quelles conditions sur $r \in \mathbb{C}$, les deux suites a_r^+ et a_r^- suivantes

$$a_r^+(n) = \begin{cases} r^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad a_r^-(n) = \begin{cases} r^n & \text{si } n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ont-elles une transformée de Fourier à temps discret. Calculer $\mathcal{F}[a_r^+]$ et $\mathcal{F}[a_r^-]$.

(4) Appliquez la question précédente à $\mathcal{F}[a_r^+]$ et $\mathcal{F}[a_r^-]$. En déduire que, si f est une fraction rationnelle sans pôle sur le cercle unité ($f = P/Q$, P, Q des polynômes sans racine commune et $Q(e^{2i\pi t}) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) , alors il existe une suite a telle que $\mathcal{F}[a] = f(e^{2i\pi t})$.

(5) On suppose de plus que cette fraction rationnelle est telle que $\deg(P) \leq \deg(Q)$ et que Q n'a que des racines de module > 1 (resp. < 1), que pouvez vous dire sur le support de a.

Exercice 3. Filtrage

Dans cet exercice, on considère un système dont l'entrée est un signal discret $e = \{e(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et dont la sortie est encore un signal discret $s = \{s(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. L'entrée et la sortie sont reliées par une équation aux différences

$$s(n) - 3s(n-1) + 2s(n-2) = e(n) - e(n-1). \qquad (1)$$

(Il s'agit de l'analogue discret de l'équation différentielle $s'' - s' = e'$).

Dans la suite, on suppose que $e \in \ell^1(\mathbb{Z})$. On va ici étudier l'application $\mathcal{S} : e \to s$.

(1) Montrer que $\mathcal{S}(\tau_\pm e) = \tau_\pm \mathcal{S}(e)$. On dit que le système est stationnaire.

(2) On suppose que la solution s de (1) est également dans $\ell^1(\mathbb{Z})$. Notez que cela implique $\lim_{n\to\pm\infty} s(n) = 0$.

Déterminer une fonction H telle que $\mathcal{F}[s] = H(t)\mathcal{F}[e]$. On appelle H la *fonction de tranfert* du système.

(3) Déterminer h tel que $H = \mathcal{F}[h]$. Vérifier que $h \in \ell^1$ et que $h = \mathcal{S}(\delta_0)$. On appelle h la *réponse impulsionnelle* du filtre.

(4) Écrire s en fonction de h et de e. En déduire que $s \in \ell^1$ si $e \in \ell^1$.

(5) Est-ce que ce système est *causal*, c'est-à-dire que, pour tout n, $s(n)$ ne dépend que de $e(k)$, $k \leq n$.

(6) Mêmes questions avec le système

$$4s(n) - s(n-2) = e(n) - e(n-1). \tag{2}$$