Université Bordeaux

Exercices : Transformée de Haar sur les fonctions nulles en dehors de l'intervalle $[0,1[$

On note Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ indicatrice de l'intervalle $[0,1[$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $j \leqslant 0$ et pour tout $k \in [\![0 : 2^{-j} - 1]\!]$ on définie la fonction $\Phi_{j,k}$ par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \Phi\left(2^j x - k\right)$$

On note $V_j = Vect((\Phi_{j,k})_{0 \leqslant k \leqslant 2^{-j}-1})$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions $(\Phi_{j,k})_{0 \leqslant k \leqslant 2^{-j}-1}$.
On notera Ω l'ensemble des couples (j,k) tels que $j \leqslant 0$ et tels que $k \in [\![0; 2^{-j} - 1]\!]$.

1 Propriétés des fonctions $\Phi_{j,k}$ pour les bases de Haar.

1. Montrer que pour tout couple $(j,k) \in \Omega$

$$\Phi_{j,k}(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{j}{2}} & \text{si } x \in [k2^j, (k+1)2^j[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Expliciter et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$$\Phi_{0,0},\, \Phi_{-1,0},\, \Phi_{-1,1},\, \Phi_{-2,0},\, \Phi_{-2,3}$$

3. Montrer que $(\Phi_{j,k})_{0 \leqslant k \leqslant 2^{-j}-1}$ forme une base orthonormée de V_j pour le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt. \tag{1}$$

4. Quelle est la dimension de V_j ?
5. Montrer que pour tout couple $(j,k) \in \Omega$ on a

$$\Phi_{j,k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{j-1,2k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{j-1,2k+1} \tag{2}$$

6. En déduire que $\forall j \leqslant 0$, $V_j \subset V_{j-1}$.
7. Déduire de (2) que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\Phi(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi(2t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi(2t-1) \tag{3}$$

8. On définit la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ suivante :

$$h_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. Montrer qu'on peut réécrire (3) de la manière suivante :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\Phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \Phi(2t-n) \tag{4}$$

10. En calculant la transformée de Fourier des deux membres de l'égalité précédente, montrer que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ on a

$$\hat{\Phi}(2\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{h}(\omega)\hat{\Phi}(\omega) \tag{5}$$

11. En déduire que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et pour tout $p \geqslant 1$

$$\hat{\Phi}(\omega) = \left(\prod_{j=1}^{p} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}}\right)\hat{\Phi}(2^{-p}\omega) \tag{6}$$

Comme $\hat{\Phi}$ est continue en 0 on en déduit que

$$\hat{\Phi}(\omega) = \left(\prod_{j=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}}\right)\hat{\Phi}(0) \tag{7}$$

2 Densité de $\bigcup_{j\leqslant 0} V_j$ dans $L^2(\mathbb{R})$

Nous avons admis le fait que les fonctions continues étaient denses dans $L^2(\mathbb{R})$ pour la norme associée. C'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ il existe une fonction continue telle que $\|f-g\| \leqslant \varepsilon$.
Dans cet exercice, nous allons montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction continue g, il existe un $j_0 \leqslant 0$ et $h \in V_{j_0}$ telle que $\|h-g\| \leqslant \varepsilon$.
Pour démontrer cela nous aurons besoin du théorème du théorème de Heine :

Théorème 1. *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ telle que $|x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$. On dit que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

1. Soit g une fonction continue sur $[0,1]$ et soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe j_0 tel que pour tout intervalle I de la forme $[k2^{-j_0},(k+1)2^{-j_0}]$ et pour tout couple $(x,y) \in I^2$ on ait $|g(x)-g(y)| \leqslant \varepsilon$.
2. En déduire qu'il existe $h \in V_{j_0}$ telle que $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
3. En déduire que $\|g-h\|_2 \leqslant \varepsilon$.
4. Conclure.