Université Bordeaux

Exercices : Feuille 2

1) Soit (e_1, e_2) une base de $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier que l'application linéaire A définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $Ae_1 = e_1 + e_2$ et $Ae_2 = e_1$ est un changement de bases de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner le changement de base inverse.
3. Soit u le vecteur dont les coordonnées dans la base (e_1, e_2) est $(2,3)$. Quelles sont ses coordonnées dans la nouvelle base ?
4. Soit v le vecteur dont les coordonnées sont $(-1,2)$ dans la seconde base. Quelles sont les coordonnées de v dans la base originale (e_1, e_2) ?

---

2) Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{R}^4$.

1. Justifier que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est celle d'un changements de bases et expliciter le changement de bases inverse.

---

3) On condidère la base canonique de $R_2[X]$. Soit P_1 le polynôme défini par $P_1(X) = X(X-1)$, P_2 le polynôme défini par $P_2(X) = X(X+1)$ et P_3 le polynôme défini par $P_3(X) = (X-1)(X+1)$.

1. Montrer que l'application linéaire qui à la base canonique associe (P_1, P_2, P_3) est un changement de bases.
2. Expliciter le changement de bases inverse.
3. Donner les coordonnées de $X^2 + 1$ dans la base (P_1, P_2, P_3).

---

4) Soit E l'ensemble des fonctions f définies sur $[0,1]$ telles qu'il existe a et b réels tels que

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ b & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

1. Donner deux bases de E et le changement de bases associé.
2. Donner les coordonées de la fonction ci dessus (dépendant de a et de b) dans chacune des deux bases.

---

5) Déterminer si les applications suivantes Φ sont des normes sur E

1. $E = \mathbb{R}^2$, $\Phi(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2}$.
2. $E = \mathbb{R}^2$, $\Phi(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 - x_2^2}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, x_2) = |x_1| + |x_2|$.
4. $E = \mathbb{R}^3$, $\Phi(x_1, x_2, x_3) = max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$

5. E est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et $\Phi(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
6. E est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et $\Phi(f) = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$.

---

6) On considère l'espace vectoriel F des polynômes sur $[0,1]$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$. Soit f la fonction exponentielle définie sur $[0,1]$ par $f(x) = exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n - f\|_\infty = 0$
2. Si on munit l'espace vectoriel E des fonctions réelles définies sur $[0,1]$ de la norme ℓ_∞, l'espace vectoriel F est-il un sous-espace fermé de E ?
3. Existe il un polynôme réalisant le minimum de la distance avec f (au sens défini par la norme infinie) ?
4. Reprendre les deux dernières questions pour la norme quadratique c'est à dire définie par $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)^2| dt}$.

---

7)

1. Proposer un vecteur orthogonal à $(1,1)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire usuel.
2. Proposer un vecteur orthogonal à $(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$ pour le produit sclaire usuel.
3. Proposer une fonction orthogonale à la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 1, \forall x \in [0,1]$ pour le produit scalaire (réel) canonique sur $[0,1]$ c'est à dire défini par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
4. Même question pour la fonction qui à t associe t.