Université Bordeaux

Exercices : Feuille 3

1) Dans les différentes situations suivantes, déterminer le supplémentaire orthogonal de F dans E

1. $E=\mathbb{R}^2$ et $F=Vect(e_1)$ avec $e_1=(1,2)$.
2. $E=\mathbb{R}^3$ et $F=Vect(e_2)$ avec $e_2=(0,1,0)$.
3. $E=\mathbb{R}^3$ et $F=Vect(e_1,e_2)$ avec $e_1=(1,-1,0)$ et $(e_2)=(1,1,0)$.
4. E est l'ensemble des fonctions f définies sur $[0,1]$ telles qu'il existe a et b réels tels que
$$f(t)=\begin{cases} a & \text{si } t\in[0,\frac{1}{2}[\\ b & \text{si } t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$
muni du produit scalaire suivant :
$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt.$$
Et F est l'espace vectoriel engendré par la fonction g définie par
$$g(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } t\in[0,\frac{1}{2}[\\ 2 & \text{si } t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$
5. Même question avec g définie par $g(t)=1$ si $t\in[0,1]$.
6. $E=\mathbb{R}^n$ et F l'espace des vecteurs x tels que $\sum_{k=1}^n x_k=0$. (Quelle est la dimension de F ?)
7. E l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ et F le sev des fonctions continues, nulles sur l'intervalle $[0,1]$ pour le produit scalaire canonique $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

---

2) On admettra qu'en dimension finie toute base orthonormée d'un sev F de E peut être complétée par une BON de E.

1. Démontrer la formule donnant la projection p d'un vecteur x sur un sous espace vectoriel F (proposition du cours sur la projection sur un sev de dimension finie).
2. Démontrer que c'est l'unique point y de F tel que $x-y\in F^\perp$.

---

3)

1. Donner la projection du vecteur $u=(1,3)$ sur l'espace engendré par $v=(1,1)$.
2. Donner la projection du vecteur $u=(1,2,3)$ sur l'espace vectoriel F engendré par $e_1=(1,0,0)$ et $e_2=(1,1,0)$.
3. Donner la projection de la fonction f définie sur $[0,1]$ $f: x\mapsto x^2$ sur l'espace vectoriel engendré par la fonction g définie par $g(x)=1$ pour tout $x\in[0,1]$ (pour le produit scalaire canonique).
4. D'une manière générale quelle est la projection d'une fonction f quelconque ?

---

4) On considère $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire canonique sur $[0,1]$.

1. Donner une BON de $R_1[X]$.
2. Calculer la projection sur $\mathbb{R}_1[X]$ de la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=x^2$.

5) Soit $\mathscr{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base orthonormée (BON) d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}_2 = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ où
$$f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_2), \quad f_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_3 + e_4), \quad f_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_2), \quad f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_3 - e_4)$$
est une BON de E.
2. Montrer que la famille $\mathscr{B}_3 = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ où
$$g_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \quad g_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4), \quad g_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_2), \quad g_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_3 - e_4)$$
est une BON de E.
3. D'une manière plus générale si E est un espace vectoriel de dimension paire $n = 2p$ et que $\mathscr{B}_1 = (e_i)_{i \leqslant n}$ est une BON de E montrer que l'union des familles $(f_j)_{j \leqslant p}$ définis
$$\forall j \in [\![1;p]\!], \text{ par } f_j = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_{2j-1} + e_{2j})$$
et $(g_j)_{j \leqslant p}$ définis
$$\forall j \in [\![1;p]\!], \text{ par } g_j = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_{2j-1} - e_{2j})$$
est une BON de E.
4. En déduire une autre base $\mathscr{B}_3$ BON de E contenant la famille $(g_j)_{j \leqslant p}$.

---

6)

1. Pour tout $l \geqslant 1$, on note f_l la fonction $2\pi-$périodique définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x^l$ et $a_{k,l} = c_k(f_l)$.
   (a) Que vaut $a_{0,0}$?
   (b) Que vaut $a_{k,0}$ pour $k \neq 0$?
   (c) A l'aide d'une intégration par partie établir une relation entre $a_{k,l}$ et $a_{k,l-1}$ pour $k \neq 0$.
2. En déduire les coefficients de Fourier ainsi que l'expression des sommes partielles de la fonction périodisée définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x$.
3. Idem pour la fonction $f(x) = (\pi - x)^2$.
4. Préciser pour ces deux fonctions les valeurs de x pour lesquels on a égalité entre la fonction et sa série de Fourier.
5. Que vaut $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$?

---

7)

1. Démontrer que pour tout $k > 1$ et tout $\beta > 0$ on a
$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\beta} dt \leqslant \frac{1}{k^\beta} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^\beta} dt.$$
2. En déduire que
$$\int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{t^\beta} dt \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^\beta} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^\beta} dt.$$

3. Démontrer la proposition du cours sur la décroissance de l'erreur d'approximation linéaire.
4. Démontrer la proposition du cours sur la décroissance de l'erreur d'approximation non-linéaire.

---

8)

1. Montrer que la famille des exponentielles complexes forment une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ pour le produit scalaire défini par

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

2. Noyau de Feyer
   (a) Soit $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e^{inx}$. Montrer que pour tout $n>0$ t pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{2\pi\mathbb{Z}\}$

   $$D_n = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

   (b) Soit $K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k$. Calculer les deux quantités suivantes :

   $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)dt$$

   (c) Montrer que pour tout $n>1$ et pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{2\pi\mathbb{Z}\}$

   $$K_n = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

   (d) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $n>1$, $K_n(x)\geqslant 1$.
   (e) Justifier que pour tout $\eta>0$ on a

   $$\int_\eta^\pi \frac{1}{\left(\sin(\frac{x}{2})\right)^2} \leqslant \frac{\pi}{\left(\sin(\frac{\alpha}{2})\right)^2}$$

   (f) En déduire que pour tout $\eta>0$,

   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\eta} K_n(t)dt = 0.$$

   On dit que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité.
3. Pour tout $f\in L^2(\mathbb{T})$ calculer le produit de convolution $f\star e_k$.
4. En déduire que $f\star D_n$ et $f\star K_n$ sont des polynômes trigonométriques, c'est à dire qu'il existe N et une famille $(\lambda_k)_{-N\leqslant k\leqslant N}$ telle que $f\star D_n = \sum_{k=-N}^{N}\lambda_k e_k$ et idem pour K_n.
5. Justifier que pour tout $x\in[0,2\pi]$:

$$f(x) - f\star K_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-f(x-t)\right)K_n(t)dt.$$

6. En déduire que pour tout $\eta\in]0,\pi[$ et $x\in[0,2\pi]$

$$|f(x)-f\star K_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}|f(x)-f(x-t)|K_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\eta}|f(x)-f(x-t)|K_n(t)dt.$$

7. En utilisant le Théorème de Heine en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta \in]0,\pi[$ tel que pour tout $x \in [0,2\pi]$

$$|f(x) - f \star K_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \varepsilon K_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\eta} \|f\|_\infty K_n(t)dt.$$

8. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $x \in [0,2\pi]$

$$|f(x) - f \star K_n(x)| \leqslant 2\varepsilon$$

9. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \|f - K_n \star f\|_\infty = 0$.
10. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \|f - K_n \star f\|_2 = 0$ et que les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^2(\mathbb{T})$ et que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$

---

9)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer sa transformée de Fourier.

2. Même chose pour la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-|x|}$.
3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Calculer $f \star f$ où f désigne la fonction précédente ainsi que sa transformée de Fourier.