

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Rappels d’algèbre et d’analyse</b>	<b>1</b>
2.1	Espaces vectoriels normés . . . . .	1
2.2	Rappels d’analyse, Espaces $L^p$ . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Espaces de Hilbert</b>	<b>5</b>
3.1	Introduction . . . . .	5
3.2	Espaces de Hilbert . . . . .	5
3.3	Projection et approximation . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Analyse de Fourier</b>	<b>10</b>
4.1	Séries de Fourier de fonction périodiques définie sur $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ . . . . .	10
4.2	Transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	12
4.2.1	Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	12
4.2.2	Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	14
4.3	Transformée de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ . . . . .	14
4.4	Transformée de Fourier discrète de fonctions définies sur $\llbracket 0 : n - 1 \rrbracket$ . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Bases de Haar</b>	<b>16</b>
5.1	Bases de Haar sur les fonctions nulles en dehors de $[0, 1[$ . . . . .	16
5.2	Bases de Haar sur $\mathbb{R}$ . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Bases hilbertiennes (orthogonales) d’ondelettes</b>	<b>20</b>
<b>7</b>	<b>Ondelettes 2D</b>	<b>27</b>

## 1 Introduction

Les signaux et les images numériques sont des suites de nombres que l’on peut interpréter comme des vecteurs dans des espaces de grande dimension.

Dans un grand nombre de problèmes de traitements de signaux et des images (reconstruction, débruitage, compression, segmentation, recalage ...) il est utile d’approcher ces objets (sons, images, vecteurs) par d’autres qui se décrivent avec un petit nombre de paramètres. Nous allons voir quel sens donner au mot *approcher*, comment on effectue ses approximations d’un point de vue pratique et comment on réalise les meilleurs approximations possibles. Nous verrons que nous aurons besoin pour cela des notions d’espaces vectoriels, de changement de bases, de produit scalaire et de projections orthogonales.

## 2 Rappels d’algèbre et d’analyse

### 2.1 Espaces vectoriels normés

1. Espace vectoriel (réel et complexe).

**Définition 1. Espace vectoriel**

Soit  $\mathbb{K}$  un corps ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), on appelle espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  un ensemble  $E$  muni d'une opération interne noté  $+$  définie de  $E \times E$  dans  $E$  et d'une loi extérieure définie de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$  noté  $\cdot$  tels que

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in E^2 \quad u + v &= v + u \\ \forall (u, v, w) \in E^3 \quad u + (v + w) &= (u + v) + w \\ \exists e \in E \text{ tel que } \forall u \in E, u + e &= u, \text{ appelé élément neutre et noté } e = 0. \\ \forall u \in E, \exists v \in E \text{ tel que } u + v &= 0. \\ \forall u \in E, 1 \cdot u &= u \\ \forall (\alpha, \beta, u) \quad \alpha \cdot (\beta \cdot u) &= (\alpha\beta)u \\ \forall (\alpha, \beta, u) \quad (\alpha + \beta) \cdot u &= \alpha \cdot u + \beta \cdot u \\ \forall (\alpha, u, v) \quad \alpha \cdot (u + v) &= \alpha \cdot u + \alpha \cdot v. \end{aligned}$$

les éléments de  $E$  sont appelés des vecteurs.

Exemples : Exemples classiques + espaces de fonctions variés, suites solutions d'équations de récurrence

2. Sous-espace vectoriel, espace vectoriel engendré.

**Définition 2. Sous-espace vectoriel**

Soit  $F$  un sous ensemble de  $E$   $\mathbb{K}$ -espace vectoriel tel que

$$\forall (\alpha, \beta, u, v) \in \mathbb{K}^2 \times F^2, \quad \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F.$$

$F$  est appelée sous-espace vectoriel de  $E$ .  $C'$  est un espace vectoriel.

Exemples.

**Définition 3. Espace vectoriel engendré**

Soit  $(u_i)_{i \leq n}$  un ensemble fini d'éléments de  $E$ , on appelle espace vectoriel engendré par les  $(u_i)_{i \leq n}$  l'ensemble suivant :

$$\text{Vect}((u_i)_{i \leq n}) = \left\{ v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, (\lambda_i) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Exemples

3. Famille libre

**Définition 4. Famille libre**

Soit  $(u_i)_{i \leq n}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . On dit que la famille  $(u_i)_{i \leq n}$  est libre si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \leq n \lambda_i = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

**Remarque :** On dit qu'une famille infinie  $(u_i)_{i \in I}$  est libre si et seulement si toute sous famille finie de  $(u_i)_{i \in I}$  est libre.

Exemples.

4. Famille génératrice (dimension finie et infinie).

**Définition 5. Famille génératrice**

Soit  $F$  un espace vectoriel et  $(u_i)_{i \leq n}$  une famille finie de vecteurs de  $F$ . On dit que la famille  $(u_i)_{i \leq n}$  engendre l'espace  $F$  ou est génératrice de  $F$  si tout élément de  $F$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $(u_i)_{i \in I}$  ie

$$\forall v \in F, \exists (\lambda_i)_{i \leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tels que } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

**Remarque :** Le caractère libre ou générateur dépend du corps que l'on considère (exemples). Si le cadre est bien posé, il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemples.

5. Base d'un espace vectoriel.

**Définition 6. Base (algébrique)**

On dit qu'une famille finie  $(u_i)_{i \leq n}$  est une base d'un espace vectoriel  $F$  si la famille  $(u_i)_{i \leq n}$  est libre et engendre  $F$ .

**Remarque :** On dit qu'une famille infinie  $(u_i)_{i \in I}$  est une base algébrique d'un espace vectoriel  $F$  si elle est libre (au sens où toute sous-famille finie est libre) et si tout vecteur de  $F$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire finie des vecteurs  $(u_i)_{i \in I}$ .

Exemples et contre exemples variés (polynômes et séries entières sur  $[0, 1]$ )

6. Dimension d'un espace vectoriel.

**Définition 7. Dimension**

Soit  $F$  un espace vectoriel et  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de  $n$  vecteurs formant une base de  $F$ . On appelle  $n$  la dimension de  $F$ .

**Remarque :** La définition ne dépend pas de la base choisie : toutes les bases d'un même espace vectoriel ont ainsi le même cardinal.

**Remarque :** Si  $n$  est la dimension de  $F$ , toute famille de  $F$  ayant strictement plus de  $n$  vecteurs est nécessairement liée. Réciproquement, toute famille ayant strictement moins de  $n$  vecteurs ne peut pas être génératrice de  $F$ .

**Remarque :** Il peut exister une famille infinie et libre, dans ce cas on dit que l'espace  $F$  est de dimension infinie. Dans ce cas, il n'existe aucune base de cardinal fini.

**Remarque :** Nous verrons plus tard le concept de base hilbertienne qui ne sera pas une base au sens ci dessus.

Exemples.

7. Changements de bases.

**Définition 8. Changement de bases**

Soit  $F$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$  deux bases de  $F$ . On appelle changement de bases l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \end{array}$$

**Remarque :** Un changement de base envoie chaque élément de la première base sur un élément de la seconde base.

**Remarque :** A tout changement de bases correspond un changement de bases inverse.

Exemples : Changements de bases simples sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ , Transformée de Fourier discrète, DCT à la base de Jpeg

8. Norme.

**Définition 9. Norme**

On appelle norme sur un espace vectoriel  $E$  toute application  $\|\cdot\|$  définie de  $E$  dans  $\mathbb{R}^+$  vérifiant

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| &\leq \|u\| + \|v\| \text{ inégalité triangulaire} \\ \forall (u, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, \|\lambda \cdot u\| &= |\lambda| \|u\| \\ \|u\| = 0 &\implies u = 0. \end{aligned}$$

### Exemples

**Remarque** On peut munir un espace vectoriel de plusieurs normes.

**Remarque** On appelle le couple  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

**Remarque** A partir d'une norme on peut définir une distance par  $d(u, v) = \|u - v\|$ . Une norme permet ainsi de mesurer la distance ou la proximité de deux éléments de  $E$ .

**Remarque** Une norme peut être issue d'un produit scalaire mais pas nécessairement.

Exemples : Mentionner  $\mathbb{R}^n$  munie des normes  $\ell^p$ , avec  $p = 1, 2, +\infty$ , les espaces  $\ell^p(\mathbb{N})$  et  $\ell^p(\mathbb{Z})$  mais aussi  $C^0([0, 1])$  muni de la norme du sup et les espaces  $L^p$  détaillés en dessous.

## 2.2 Rappels d'analyse, Espaces $L^p$

### 1. Définitions

#### Définition 10. Boules, Ouverts-Fermés

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $A$  un sous ensemble de  $E$ .

- On appelle boule ouverte centrée en  $x \in E$  de rayon  $r$  l'ensemble  $\mathcal{B}(x, r)$  des éléments  $y$  de  $E$  tels que  $\|x - y\| < r$ .
- On dit que  $A$  est un ouvert de  $E$  si pour tout point  $x$  de  $A$ , il existe  $r > 0$  telle que  $\mathcal{B}(x, r) \subset A$ .
- On dit que  $A$  est fermé si son complémentaire dans  $E$  est ouvert.

Exemples

#### Proposition 1. fermés, convexes et projection

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $A$  un fermé de  $E$

- Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $A$  qui converge dans  $E$  alors elle converge dans  $A$ .
- Si  $x$  est un élément de  $E$  alors il existe au moins un élément de  $A$  qui réalise le minimum de  $\inf_{u \in A} \|u - x\|$  c'est à dire qu'il existe  $p \in A$  tel que  $\inf_{u \in A} \|u - x\| = \|x - p\|$ .
- Si de plus  $A$  est convexe c'est à dire que

$$\forall (x, y) \in A \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$$

alors cet élément est unique et définit la projection de  $x$  sur  $A$ .

- Un espace vectoriel de dimension finie est un convexe fermé.

Exemples et contre-exemples : On ne peut pas projeter sur un ouvert ou sur un ensemble non convexe.

#### Théorème 1. Théorème de Heine.

Toute fonction  $f$  continue sur un intervalle borné  $[a, b]$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ , c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tels que } \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

#### Définition 11. Espaces $L^p(\Omega)$

Soit  $\Omega$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , (éventuellement  $\mathbb{R}$  tout entier), et  $p$  un réel supérieur ou égal à 1. On définit l'ensemble  $L^p(\Omega)$  des fonctions définies de  $\Omega$  dans  $\mathbb{K}$  telle que  $\int_{x \in \Omega} |f(x)|^p dx < +\infty$

**Proposition 2.**  $L^p(\Omega)$  est un espace vectoriel et l'application

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \left( \int_{x \in \Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

définit une norme sur  $L^p(\Omega)$ . Ainsi  $L^p(\Omega)$  munie de sa norme naturelle est un espace vectoriel normé.

Exemples : différents choix de  $\Omega$  et de  $p$  et différentes fonctions qui appartiennent aux différents  $L^p(\Omega)$

**Définition 12. Espaces  $L^\infty(\Omega)$**

Soit  $\Omega$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on définit  $L^\infty(\Omega)$  comme l'ensemble des fonctions  $f$  telles que  $\sup_{x \in \Omega} |f(x)| < +\infty$ , pour tout  $f \in L^\infty(\Omega)$ . De plus la fonction qui à  $f$  associe  $\sup_{x \in \Omega} |f(x)|$  est une norme sur  $L^\infty(\Omega)$

2. Propriétés

**Proposition 3.** Les espaces  $L^p(\Omega)$  sont complets (toute suite de Cauchy converge).

3. Densité

**Proposition 4.** Pour tout intervalle  $\Omega$  et pour tout  $p < +\infty$ , l'ensemble des fonctions continues sur  $\Omega$  est dense dans  $L^p(\Omega)$ . C'est à dire que pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute fonction  $f \in L^p(\Omega)$  il existe une fonction continue  $g$  telle que  $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$ .

Autrement dit, si  $p < +\infty$ , quelque soit  $\Omega$ , toute fonction de  $L^p(\Omega)$  peut être approchée d'aussi près qu'on le veut au sens de la norme  $\|\cdot\|_p$  par une fonction continue.

**Remarque :** Les fonctions continues à support compact (nulle en dehors d'un intervalle  $[-M, M]$ ) sont également denses dans  $L^p(\Omega)$

### 3 Espaces de Hilbert

#### 3.1 Introduction

Sur des exemples simples, un point et une droite dans l'espace, un point et un plan dans l'espace, un point et un convexe dans le plan, on voit que la notion de distance (euclidienne) d'un point à un ensemble est liée à une notion d'orthogonalité. La notion de produit scalaire et d'orthogonalité est en effet un concept assez palpable en dimension 2 et 3 que l'on peut formaliser et généraliser à des espaces beaucoup plus variés.

#### 3.2 Espaces de Hilbert

1. Produit scalaire (réel et complexe).

**Définition 13.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . On appelle produit scalaire une forme bilinéaire symétrique définie positive. C'est à dire une application  $\varphi$  définie de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  et vérifiant les conditions suivantes :

- (a) Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}$ . (Forme)
- (b) Pour tout  $y \in E$ , l'application  $\varphi_y^1$  définie de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  par  $\varphi_y^1(x) = \varphi(x, y)$  est linéaire. (Linéaire par rapport à la première variable)
- (c) Pour tout  $z \in E$ , l'application  $\varphi_z^2$  définie de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  par  $\varphi_z^2(x) = \varphi(z, x)$  est linéaire. (Linéaire par rapport à la deuxième variable)
- (d) Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ . (Symétrique)
- (e) Si  $\varphi(x, x) = 0$  alors  $x = 0$ . (Définie)
- (f) Pour tout  $x \in E$ ,  $\varphi(x, x) \geq 0$ . (Positive)

Exemples :

- $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  munis du produit scalaire usuel.

–  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  munis d'un produit scalaire modifié par exemple sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

– Sur l'ensemble des fonctions continues et définies  $[0, 1]$  on peut définir

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

ou

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 t f(t)g(t)dt.$$

– Sur l'ensemble des polynômes :

$$\varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt.$$

**Remarque :** On notera souvent  $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$ .

Dans le cas complexe, reprendre la même définition pose problème.

On peut proposer une définition similaire pour les espaces vectoriels complexes :

**Définition 14.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . On appelle produit scalaire une forme sesquilineaire hermitienne définie positive. C'est à dire une application  $\varphi$  définie de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  et vérifiant les conditions suivantes :

- (a) Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}$ . (Forme)
- (b) Pour tout  $y \in E$ , l'application  $\varphi_y^1$  définie de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  par  $\varphi_y^1(x) = \varphi(x, y)$  est linéaire. (Linéaire par rapport à la première variable)
- (c) Pour tout  $z \in E$ , l'application  $\varphi_z^2$  définie de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  par  $\varphi_z^2(x) = \varphi(z, x)$  est anti-linéaire. (Anti-linéaire par rapport à la deuxième variable)  
C'est à dire que  $\varphi_z^2(\lambda x) = \bar{\lambda} \varphi_z^2(x)$ .
- (d) Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ . (Symétrie hermitienne)
- (e) Si  $\varphi(x, x) = 0$  alors  $x = 0$ . (Définie)
- (f) Pour tout  $x \in E$ ,  $\varphi(x, x) \geq 0$ . (Positive)

Exemples :

- (a) Produit scalaire usuel sur  $\mathbb{C}^2$  et  $\mathbb{C}^3$
- (b) Sur l'ensemble des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques :

$$\varphi(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

**Remarque :** Par rapport à un produit scalaire réel, on ajoute essentiellement une conjugaison sur les termes issues de la deuxième variable.

2. Norme issue d'un produit scalaire.

**Définition 15.** Norme hilbertienne, Espaces pré-hilbertiens et euclidiens

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire défini sur  $E$ . L'application  $N$  définie par

$$N : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

définit une norme sur  $E$ . Cette norme est dite hilbertienne ou euclidienne si l'espace  $E$  est de dimension finie.

On appelle espace pré-hilbertien un espace muni d'une norme hilbertienne ou euclidienne s'il est de dimension finie. Si de plus l'espace est complet, il est dit hilbertien ou espace de Hilbert.

Exemples On reprend les exemples précédents, en particulier le produit scalaire non usuel sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $\ell^2(\mathbb{N})$ ,  $\ell^2(\mathbb{Z})$ ,  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $L^2(\mathbb{T})$ .

**Remarque :** : toute norme ne provient pas d'un produit scalaire.

3. Propriétés d'une norme hilbertienne (CS, parallélogramme).

**Proposition 5. Cauchy-Schwarz et égalité de parallélogramme.**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace pré-hilbertien. La norme hilbertienne vérifie les deux relations suivantes :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{CS})$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (\text{EP})$$

Cette égalité est appelée égalité du parallélogramme, cette dernière caractérise une norme hilbertienne.

**Remarque :** On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si les vecteurs sont colinéaires et égalité sans les valeurs absolues s'ils sont colinéaires et de même sens.

Exemple : Dans  $\mathbb{R}^2$ , dans  $\mathbb{R}^3$ , dans l'espace des fonctions  $2\pi$ -périodiques.

4. Orthogonalité.

**Définition 16. Orthogonalité**

On dit que deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$  sont orthogonaux si  $\langle u, v \rangle = 0$ . On dit que deux sous espaces  $F$  et  $G$  sont orthogonaux si

$$\forall x \in F \text{ et } \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0.$$

On note dans ce cas  $F \perp G$ .

Exemples.

5. Base orthonormée.

**Définition 17. Base Orthonormée** Soit  $(e_i)_{i \leq n}$  une base d'un espace vectoriel  $E$  euclidien.

On dit que  $(e_i)_{i \leq n}$  forme une base orthonormée (ou BON) de  $E$  si

(a) Pour tout  $i \leq n$ ,  $\|e_i\| = 1$ .

(b) Pour tout couple  $(i, j)$ ,  $j \neq i$ , les vecteurs  $e_i$  et  $e_j$  sont orthogonaux ie  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ .

**Remarque :** Si une famille de vecteur ne vérifie que le second point on parle de système orthogonal, si c'est une base on parle de base orthogonale.

**Remarque :** le caractère orthonormé dépend du produit scalaire (exemples sur  $\mathbb{R}^2$ ).

Exemples :

- Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$

- Dans  $L^2(\mathbb{T})$ ,

- Cas de l'ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $[0, 1]$  telles qu'il existe  $a$  et  $b$  réels tels que

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[ \\ b & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (1)$$

pour le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ . On proposera deux bases orthonormées.

- Cas des polynômes orthogonaux pour le produit produit scalaire précédent. Déterminer une base de  $R_1[X]$ .

6. Supplémentaire orthogonal

**Définition 18. Supplémentaire orthogonal**

Soit  $F$  un sous espace (fermé) d'un espace vectoriel  $E$ . Il existe un unique sous espace  $G$  de  $E$  tel que

$$F + G = E \text{ et } F \perp G$$

On dit que  $G$  est le supplémentaire orthogonal de  $F$ . Ainsi tout élément  $x$  de  $E$  s'écrit de manière unique de la forme  $x = f + g$  avec  $f \in F$ ,  $g \in G$  et  $\langle f, g \rangle = 0$ .

On note  $G = F^\perp$ .

**Remarque :** En dimension finie, la dimension du supplémentaire de  $F$  dans  $E$  est égale à  $n - k$  où  $n$  est la dimension de  $E$  et  $k$  la dimension de  $F$ .

Exemples

7. Base hilbertienne, Théorème de Pythagore.

**Définition 19. Base hilbertienne**

Soit  $E$  un espace de Hilbert, on appelle base hilbertienne une famille  $(e_i)_{i \in I}$  orthonormée telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $x \in E$  il existe une combinaison linéaire finie des  $(e_i)_{i \in I}$  telle que

$$\left\| \sum_{i \leq n} \lambda_i e_i - x \right\| \leq \varepsilon.$$

**Remarque :** Dans la pratique  $I$  est soit un ensemble fini, soit  $\mathbb{N}$  soit  $\mathbb{Z}$ .

**Remarque :** On dit que l'espace engendré par les  $(e_i)_{i \in I}$  est dense dans  $E$ .

**Remarque :** On peut ainsi approcher tout élément de  $E$  aussi précisément que l'on souhaite par une combinaison linéaire des  $(e_i)_{i \in I}$ .

**Remarque :** Une base hilbertienne n'est pas nécessairement une base au sens algébrique.

**Remarque :** En dimension finie être une base hilbertienne est équivalent à être une base orthonormée.

Exemples

- Bases orthonormées en dimension finie.
- La base canonique dans  $\ell_2(\mathbb{N})$ .
- Les exponentielles complexes sur  $L^2(\mathbb{T})$  ou sur les fonctions continues  $2\pi$ -périodiques (voir la suite).

**Théorème 2. Théorème de Pythagore**

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $(e_i)_{i \in I}$  une base hilbertienne de  $E$  alors pour tout  $x \in E$  :

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle e_i, x \rangle|^2 \quad (2)$$

Exemples :  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  et exemples à venir sur les fonctions périodiques et sur les fonctions définies par (1).

**3.3 Projection et approximation**

1. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

**Proposition 6. Projection sur un sev de dimension finie**

Soit  $F$  un sev de dimension finie d'un espace pré-hilbertien  $E$  et  $(e_i)_{i \leq n}$  une BON de  $F$ , alors pour tout  $x \in E$ , la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$  est :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

C'est l'unique point  $p$  de  $F$  vérifiant  $x - p \in F^\perp$ .

Exemples :

- Calcul de la projection dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  sur la BON canonique et sur d'autres BON.
- Calcul de la projection de l'application  $t \rightarrow t^2$  sur l'espace des fonctions affines sur  $[0, 1]$  pour le produit scalaire défini par  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ .

2. Approximation linéaire. Contrôle avec la décroissance des coefficients.

**Définition 20. Approximation linéaire**

Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une base hilbertienne de  $E$  et  $x$  un élément de  $E$ , on appelle approximation linéaire à  $N$  terme dans la base  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et on note  $S_N^l(x)$  la projection de  $x$  sur l'espace vectoriel de dimension  $N$  engendré par les  $(e_k)_{k \leq N}$  :

$$S_N^l(x) = \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k$$

Si la base  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est indicée sur les entiers relatifs  $\mathbb{Z}$  on note  $S_N^l(x)$  la projection sur l'espace vectoriel de dimension  $2N + 1$  par les  $(e_k)_{-N \leq k \leq N}$  :

$$S_N^l(x) = \sum_{k=-N}^N \langle x, e_k \rangle e_k$$

On note  $\varepsilon_N^l$  l'erreur d'approximation linéaire associée :

$$\varepsilon_N^l(x) = \|x - S_N^l(x)\|^2$$

Exemples : Dans  $\mathbb{R}^n$ , dans  $\ell_2(\mathbb{N}^*)$  et  $\ell_2(\mathbb{Z})$ . Dans  $R[X]$  muni du produit scalaire classique sur  $[0, 1]$ .

**Remarque :** Plus l'erreur  $\varepsilon_N^l$  est faible, meilleure est l'approximation linéaire.

**Remarque :** D'après Pythagore on déduit que

$$\varepsilon_N^l(x) = \sum_{|k| > N} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

**Proposition 7. Décroissance de l'erreur d'approximation linéaire**

Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une base hilbertienne de  $E$  et  $x$  un élément de  $E$ , s'il existe  $\alpha > \frac{1}{2}$  et  $C$  tel que pour tout  $k \neq 0$  on ait  $|\langle x, e_k \rangle| \leq \frac{C}{|k|^\alpha}$  alors

$$\varepsilon_N^l(x) = O(N^{1-2\alpha}) \tag{3}$$

**Remarque :** On appelle cette approximation une approximation linéaire car l'application qui à  $x$  associe  $S_N^l(x)$  est une application linéaire.

**Remarque :** Plus les coefficients décroissent vite, plus l'erreur d'approximation linéaire décroît rapidement.

**Remarque :** Une BON assurant une décroissance rapide des coefficients pour la classe de vecteurs  $x$  que l'on étudie sera particulièrement adaptée pour approcher les vecteurs de cette classe.

**Remarque :** Aucune base ne peut être adaptée à tous les vecteurs.

**Remarque :** Performances de Jpeg.

Exemples : Nous verrons plus loin l'application de ces résultats sur les fonctions  $k$  fois dérivables dans les bases d'exponentielles complexes.

3. Approximation non linéaire.

**Définition 21. Approximation non linéaire**

Soit  $(e_n)_{n \in I}$  une base hilbertienne de  $E$  et  $x$  un élément de  $E$ . Pour  $N \in \mathbb{N}$  on définit l'approximation non linéaire à  $N$  termes  $S_N^n(x)$  de  $x$  dans la base  $(e_i)_{i \in I}$  par

$$S_N^n(x) = \sum_{k \in I_N} \langle x, e_k \rangle e_k$$

où  $I_N$  désigne l'ensemble des indices des  $N$  plus grandes valeurs de  $|\langle x, e_k \rangle|$ . On note  $\varepsilon_N^n$  l'erreur d'approximation non linéaire associée :

$$\varepsilon_N^n(x) = \|x - S_N^n(x)\|^2 = \sum_{k \notin I_N} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

**Remarque :** On qualifie cette approximation de non linéaire car l'application qui à  $x$  associe  $S_N^n(x)$  n'est pas linéaire.

**Remarque :** D'après le Théorème de Pythagore on déduit que cette approximation est la meilleure possible à  $N$  termes dans la base  $(e_i)_{i \in I}$ .

**Proposition 8. Décroissance de l'erreur d'approximation non-linéaire**

Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une base hilbertienne de  $E$  et  $x$  un élément de  $E$ . Si on réordonne les coefficients  $\langle x, e_k \rangle$  par ordre décroissant de valeur absolue et on note  $c_k^*(x)$  la  $k$ ème valeur de  $|\langle x, e_k \rangle|$  dans cet ordre.

s'il existe  $\alpha > \frac{1}{2}$  et  $C$  tel que pour tout  $k \neq 0$  on ait  $c_k^*(x) \leq \frac{C}{|k|^\alpha}$  alors

$$\varepsilon_N^n(x) = O(N^{1-2\alpha}) \quad (4)$$

## 4 Analyse de Fourier

### 4.1 Séries de Fourier de fonction périodiques définie sur $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$

1. Définitions.

**Définition 22. Espace  $L^2(\mathbb{T})$** 

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

Cet espace muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt < +\infty$$

est un espace de Hilbert  $H$ . La norme associée est ainsi définie par

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$$

De plus la famille  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  des exponentielles complexes définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  par

$$e_k(x) = e^{ikx}$$

est une base hilbertienne de  $H$ .

On appelle coefficient de Fourier de  $f \in L^2(\mathbb{T})$  le produit scalaire

$$c_k(f) = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

**Remarque :** Le fait que  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une famille orthonormée est simple à démontrer. Pour démontrer que l'espace vectoriel engendré par les  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est dense dans  $L^2(\mathbb{T})$  il faut montrer que toute fonction continue peut être approchée aussi près que l'on veut par un polynôme trigonométrique.

**Remarque :** Les fonctions  $2\pi$ -périodiques et continues par morceaux appartiennent bien entendu à cet espace.

**Démonstration** Par les sommes de Fejer en exercices.

**Définition 23. Série de Fourier**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs complexes  $2\pi$ -périodique appartenant à  $L^2(\mathbb{T})$ . On appelle somme partielle de Fourier  $S_n(f)$  de  $f$ , le polynôme trigonométrique suivant :

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$$

On appelle série de Fourier associée  $f$  la série de fonction suivante  $S(f)$  :

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e_k$$

**Remarque :** Attention au sens que l'on donne à cette série de fonction. La série peut ne pas être convergente pour certaines valeurs de  $x$ . Nous verrons dans la suite que cette série converge, sous certaines hypothèses et un en certain sens vers la fonction  $f$ .

2. Convolution circulaire.

**Définition 24. Convolution circulaire**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^2(\mathbb{T})$  on appelle convolution circulaire de  $f$  et  $g$  la fonction  $h$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$h(x) = f \star g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$$

la fonction  $h$  ainsi définie appartient à  $L^2(\mathbb{T})$ .

Exemples Soit  $D_N = \sum_{k=-N}^N e_k$  calculer la convolution d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{T})$  avec  $D_N$ .

**Remarque :** La convolutions de deux fonctions de  $L^2(\mathbb{T})$  est toujours continue et donc bornée.

3. Bessel et Parseval.

**Proposition 9. Egalité de Parseval**

Soit  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{T})$  et  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  la suite de ses coefficients de Fourier et  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles de Fourier. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\| = 0$$

de plus

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|^2 \tag{5}$$

**Remarque :** Le second point appelé **Égalité de Parseval** est un cas particulier du théorème de Pythagore dans  $L^2(\mathbb{T})$ . Il utilise le fait que les exponentielles complexes forment une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{T})$ .

**Remarque :** Ainsi si une fonction  $f$  est dans  $L^2(\mathbb{T})$  la suite de ses coefficients de Fourier appartient à  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

4. Lien entre  $c_n(f)$  et  $c_n(f')$ .

**Proposition 10. Coefficients de Fourier et dérivée**

Soit  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{T})$  dérivable par morceaux et continue sur  $\mathbb{R}$ .

Les coefficients de Fourier de  $f'$  s'expriment en fonctions de ceux de  $f$  de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall c_n(f') = inc_n(f) \tag{6}$$

**Remarque :** La démonstration est une simple intégration par parties (A faire en exercice).

**Remarque :** L'hypothèse de continuité est indispensable.

5. Décroissance des coefficients et régularité.

**Proposition 11. Régularité et décroissance des coefficients de Fourier**

Soit  $k$  un entier strictement positif et soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique,  $C^k$  par morceaux et  $C^{k-1}$  sur  $\mathbb{R}$  alors

$$\forall l < k, \forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f^l) = (in)^l c_n(f)$$

De plus

$$|c_n(f)| = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$$

6. Théorème de convergences de Dirichlet

**Théorème 3. Théorème de convergence de Dirichlet**

Soit  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{T})$ , continue et  $C^1$  par morceaux. En tout point  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$$

Si  $f$  est  $C^1$  par morceaux mais pas continue alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = \tilde{f}(x)$$

où  $\tilde{f}$  coïncide avec  $f$  en tout point de continuité de  $f$  et où  $\tilde{f}$  est la moyenne de la limite à gauche et de la limite à droite de  $f$  aux points de discontinuité :

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left( \lim_{y \rightarrow x, y < x} f(y) + \lim_{y \rightarrow x, y > x} f(y) \right)$$

**Remarque :** Si  $f$  est continue alors la convergence est même uniforme.

## 4.2 Transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$

### 4.2.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ .

1. Définition de la TF sur  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Définition 25. Transformée de Fourier sur  $L^1(\mathbb{R})$ .**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , appartenant à  $L^1(\mathbb{R})$ , pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$  est absolument convergente. On peut ainsi définir la Transformée de Fourier (TF) de  $f$ , notée  $\hat{f}$  définie par

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Exemples : Indicatrices, fonctions laplaciennes, gaussiennes (sans démonstration)

## 2. Convolution.

**Définition 26. Convolution**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  l'intégrale  $\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$  est absolument convergente. On appelle convoluée de  $f$  et  $g$  la fonction  $h$  définie par pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$h(x) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

La fonction  $h$  ainsi obtenue appartient à  $L^1(\mathbb{R})$  et de plus

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \quad (7)$$

Exemples : indicatrices et gaussiennes.

3. Propriétés de la TF sur  $L^1(\mathbb{R})$ .**Proposition 12. Propriétés de la transformée de Fourier sur  $L^1(\mathbb{R})$** 

La transformée de Fourier d'une fonction  $f$  appartenant à  $L^1(\mathbb{R})$  est continue et tend vers 0 en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

**Proposition 13. Translation et dilatation** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , pour  $a > 0$ , on note  $f_a$  la fonction dilatée de  $f$  du facteur  $a$  définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par  $f_a(x) = f(ax)$ .

On a alors  $\hat{f}_a(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$ .

On peut noter de même  $f^\tau$  la fonction translatée de  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f^\tau(x) = f(x - \tau)$ .

On a alors  $\widehat{f^\tau}(\omega) = \hat{f}(\omega)e^{-i\omega\tau}$ .

Ainsi si la transformée de Fourier de  $f_a^\tau$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f_a^\tau(x) = f(ax - \tau)$  est

$$\widehat{f_a^\tau}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})e^{-i\omega\frac{\tau}{a}} \quad (8)$$

Exemples : Pour  $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$  et  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ , on note  $\Phi_{j,k}$  la fonction définie par

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\Phi(2^{-j}x - k) \quad (9)$$

Exprimer la transformée de Fourier de  $\Phi_{j,k}$  en fonction de celle de  $\Phi$ .

4. Formule d'inversion sur  $L^1(\mathbb{R})$ .**Théorème 4. Théorème d'inversion de la TF sur  $L^1(\mathbb{R})$** 

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $f$  peut s'exprimer à partir de  $\hat{f}$  de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega. \quad (10)$$

**Remarque :** En fait cette égalité n'est vraie que *presque partout* et pas pour tout  $x$ . Dans la pratique les deux fonctions  $f$  et  $\hat{f}$  sont continues et la notion de presque partout ici n'est pas cruciale.

Exemples : Cauchy et Laplace.

5. Lien entre TF et dérivation.

**Proposition 14. Transformée de Fourier et dérivation**

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ , alors on a la relation suivante entre les TF de  $f$  et  $f'$  :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}'(\omega) = -i\omega \widehat{f}(\omega) \tag{11}$$

**Remarque :** On peut bien entendu itérer ce résultat pour faire un lien entre la TF de  $f^k$  et celle de  $f$  si toutes les dérivées d'ordre  $l \leq k$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ . On peut en déduire une vitesse de décroissance vers 0 de la TF des fonctions admettant des dérivées successives dans  $L^1(\mathbb{R})$  de manière analogue que dans le cas continu.

**4.2.2 Transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$ .**

6. Définition de la TF sur  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Définition 27. Transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$**

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  la fonction  $\phi_\omega$  définie par  $\phi_\omega(A) = \int_{-A}^A f(t)e^{-i\omega t} dt$  admet une limite en  $+\infty$ .

On appelle Transformée de Fourier de  $f$  au point  $\omega$  et on note  $\widehat{f}(\omega)$  cette limite.

7. Propriétés de la TF sur  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Proposition 15. Propriétés de la Transformée de Fourier de  $L^2(\mathbb{R})$ .**

(a) Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  alors  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ .

(b) Plus précisément on a l'égalité de Plancherel :

$$\|\widehat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2 \tag{12}$$

(c) Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  alors on a la formule d'inversion suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \widehat{f}(w)e^{i\omega t} d\omega \tag{13}$$

Exemples

**4.3 Transformée de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$**

1. Définitions

**Définition 28. Transformée de Fourier de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .**

Soit  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  c'est à dire telle que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 < +\infty$  on appelle Transformée de Fourier de  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  la fonction  $\widehat{h}$ ,  $2\pi$ -périodique définie par

$$\widehat{h}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega} \tag{14}$$

**Remarque :** On appellera aussi *filtre* la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

**Remarque :** Si la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  admet un nombre fini de coefficients non nuls alors  $\widehat{h}$  est un polynôme trigonométrique (exemples).

**Remarque :** Sous certaines conditions de décroissances quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est la suite des coefficients de Fourier de  $\widehat{h}$ .

Exemples Soit  $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$  et  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ . On note  $\Phi_n$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $\Phi_n(x) = \Phi(x - n)$ .

En admettant que la transformée de Fourier de  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \Phi_n$  est bien définie, exprimer cette transformée de Fourier en fonction de celle de  $\Phi$  et de celle de  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

2. Convolution discrète.

**Définition 29. Convolution discrète**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  deux suites de  $\ell_2(\mathbb{Z})$ . On définit la convolution de  $f$  et  $g$  comme la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $\ell_2(\mathbb{Z})$  définie par

$$h_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k g_{n-k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{n-l} g_l. \quad (15)$$

et noté  $h = f \star g$ .

Comme pour les autres transformées et séries de Fourier on a la relation suivante :

$$h = f \star g \implies \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega).$$

#### 4.4 Transformée de Fourier discrète de fonctions définies sur $\llbracket 0 : n - 1 \rrbracket$

Dans tous les problèmes pratiques utilisant des données numériques finies, on manipule des données discrètes et on souhaite pouvoir calculer une transformée de Fourier elle-même discrète.

Le moyen le plus simple de travailler dans un cadre discret et fini tant en espace (ou en temps) que dans le domaine de Fourier est de considérer le nombre fini d'échantillons qu'on souhaite traiter comme les valeurs d'une fonction définie de  $\llbracket 0 : n - 1 \rrbracket$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Autrement dit on identifie un vecteur de  $n$  nombres complexes à une fonction définie de  $\llbracket 0 : n - 1 \rrbracket$  dans  $\mathbb{C}$ .**

Ainsi la première composante du vecteur est considérée comme l'image de 0 par  $f$ , la seconde valeur est considérée comme l'image de 1 etc ...

On peut munir l'espace vectoriel des fonctions de  $\llbracket 0 : n - 1 \rrbracket$  dans  $\mathbb{C}$  du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \overline{g(k)}$$

Pour ce produit scalaire la famille des exponentielles complexes discrètes  $(e_l)_{0 \leq l \leq n-1}$  définie par

$$\forall (l, k) \in \llbracket 0 : n - 1 \rrbracket^2, \quad e_l(k) = e^{\frac{(l-1)(k-1)2i\pi}{n}}$$

est une base orthogonale (presque orthonormée car les normes de ces fonctions sont toutes égales à  $N$ ). La transformée de Fourier d'une fonction de  $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$  dans  $\mathbb{C}$  est simplement la suite des coefficients de cette fonction dans la base des exponentielles complexes discrètes décrites ci-dessus.

1. Définitions.

**Définition 30. Transformée de Fourier discrète**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\llbracket 0 : n - 1 \rrbracket$  et à valeur dans  $\mathbb{C}$  que l'on peut identifier à un vecteur de  $n$  nombre complexe.

On appelle Transformée de Fourier discrète de  $f$ , le vecteur  $\hat{f}$  ayant  $n$  composantes et défini par :

$$\forall k \in \llbracket 0 : n - 1 \rrbracket, \quad \hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \sum_{l=0}^{n-1} f(l) e^{-\frac{(l-1)(k-1)2i\pi}{n}} \quad (16)$$

**Remarque :** La DCT sur laquelle est basée le codage JPEG est une transformée similaire mais en 2D et réelle (on remplace les bases d'exponentielles complexes par des cosinus.)

**Remarque :** Si on identifie cet espace de fonctions à  $\mathbb{C}^n$  on observe que la TF n'est rien d'autre qu'un changement bases orthogonales sur  $\mathbb{C}^n$ . Ainsi il existe une formule simple d'inversion qui est presque la symétrique.

On oubliera cependant pas de diviser par  $N$  pour renormaliser tout correctement.

2. Formule d'inversion.

**Proposition 16. Inversion de la Transformée de Fourier discrète**

Soit  $f$  une suite de  $n$  valeurs, que l'on identifie à une fonction définie sur  $\llbracket 0 : n - 1 \rrbracket$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et  $\hat{f}$  le vecteur obtenu par Transformée de Fourier discrète. On a la formule de reconstruction suivante :

$$\forall k \in \llbracket 0 : n - 1 \rrbracket, \quad f(k) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{f}(l) e^{\frac{(l-1)(k-1)2i\pi}{n}}$$

## 5 Bases de Haar

Dans ce chapitre nous allons construire et décrire une base Hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$  à l'aide de fonctions constantes par morceaux à support compact. Avant de regarder plus en détail le cas de  $L^2(\mathbb{R})$  nous allons étudier le cas spécifique de  $L^2([0, 1])$ .

On commencera ce chapitre par une feuille de TD introductive qui présente les principales propriétés des ondelettes de Haar.

### 5.1 Bases de Haar sur les fonctions nulles en dehors de $[0, 1[$

1. Définition des fonctions  $\Phi_{j,k}$ .

**Définition 31. Définition des fonctions  $\Phi_{j,k}$**

On note  $\Phi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  indicatrice de l'intervalle  $[0, 1[$  :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout  $j \leq 0$  et pour tout  $k \in \llbracket 0 : 2^{-j} - 1 \rrbracket$  on définit la fonction  $\Phi_{j,k}$  par la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \Phi(2^{-j}x - k)$$

On note  $V_j = \text{Vect}((\Phi_{j,k})_{0 \leq k \leq 2^{-j}-1})$  l'espace vectoriel engendré par les fonctions  $\Phi_{j,k}$  pour l'ensemble des valeurs de  $k$

**Remarque :** Exprimer  $\Phi_{-1,0}$  et  $\Phi_{-1,0}$ .

**Remarque :** Pour tout  $j \leq 0$ , l'espace  $V_j$  est l'espace des fonctions constantes par morceaux sur des intervalles de la forme  $[k2^j, (k+1)2^j[$ .

On munit l'espace vectoriel des fonctions définies sur  $[0, 1[$  à valeurs réelles telles que

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt < +\infty$$

que l'on note  $L^2([0, 1])$  du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \tag{17}$$

**Remarque :** Muni de ce produit scalaire l'espace  $L^2([0, 1])$  est un espace pré-hilbertien.

**Proposition 17. Propriétés des espaces  $V_j$**

Pour tout  $j \leq 0$

(a) la dimension de  $V_j$  est  $2^{-j}$ ,

(b)  $V_j \subset V_{j-1}$ ,

(c) la famille  $(\Phi_{j,k})_{0 \leq k \leq 2^{-j-1}}$  est une base orthonormée de  $V_j$

De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour toute fonction  $f$  continue sur  $[0, 1[$  (et donc pour toute fonction  $f \in L^2([0, 1[)$ ) il existe un  $j_0 \leq 0$  et une fonction  $g \in V_{j_0}$  telle que  $\|f - g\| \leq \varepsilon$ .

On dit que l'union  $\bigcup_{j \leq 0} V_j$  des espaces  $V_j$  est dense dans  $L^2([0, 1[)$ .

**Remarque :** Comme pour tout  $j \leq 0$ ,  $V_j \subset V_{j-1}$ , pour tout  $k \in \llbracket 0 : 2^{-j} - 1 \rrbracket$ , la fonction  $\Phi_{j,k}$  appartient à  $V_{j-1}$  et s'exprime donc comme combinaison linéaire des  $(\Phi_{j,l})_{0 \leq l \leq 2^{j+1}-1}$ .

Exemples : Exprimer  $\Phi = \Phi_{0,0}$  en fonction de  $\Phi_{-1,0}$  et  $\Phi_{-1,1}$ , puis  $\Phi_{-1,0}$  en fonction des  $\Phi_{-2,k}$  pour  $k \in \llbracket 0 : 3 \rrbracket$ .

On peut remarquer le résultat suivant :

**Proposition 18.** Lien entre les fonctions  $\Phi_{j,k}$

Pour tout couple  $(j, k)$ ,

$$\Phi_{j,k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Phi_{j-1,2k} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Phi_{j-1,2k+1} \quad (18)$$

## 2. Les espaces $W_j$

Comme les espaces  $V_j$  sont inclus les uns dans les autres on peut définir le supplémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j-1}$ .

**Définition 32. Définition des espaces  $W_j$**

Pour tout  $j \leq 0$ , on note  $W_j$  le supplémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j-1}$ .

**Proposition 19.** Pour tout  $j \leq 0$ ,

(a) la dimension de l'espace  $W_j$  est  $2^{-j}$ .

(b) les espaces  $W_j$  sont les espaces des fonctions  $f$  constantes sur les intervalles de la forme  $[k2^{j-1}, (k+1)2^{j-1}[$  et telles que  $f(2k2^{j-1}) = -f((2k+1)2^{j-1})$ .

(c) les espaces  $W_j$  sont engendrés par les fonctions  $(\Psi_{j,k})_{0 \leq k \leq 2^{-j-1}}$  définies par

$$\Psi_{j,k}(x) = \begin{cases} -2^{-\frac{j}{2}} & \text{si } x \in [k2^{j-1}, (k+1)2^{j-1}[ \\ 2^{-\frac{j}{2}} & \text{si } x \in [(k+1)2^{j-1}, (k+2)2^{j-1}[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (19)$$

On appelle ces fonctions  $\Psi_{j,k}$ , les ondelettes de Haar et la fonction  $\Psi_{0,0}$  ondelette mère.

Toutes les ondelettes peuvent être construites par dilatation et translation de l'ondelette mère.

**Remarque :** Par définition de  $W_j$  on a

$$V_j = W_{j+1} \oplus V_{j+1} \quad (20)$$

En décomposant  $V_{j+1}$  on déduit la décomposition suivante de  $V_j$  :

$$V_j = W_{j+1} \oplus W_{j+2} \oplus V_{j+2} \quad (21)$$

et en itérant on peut écrire pour tout  $j < 0$

$$V_j = W_{j+1} \oplus W_{j+2} \oplus W_{j+3} \oplus \cdots \oplus W_0 \oplus V_0 = \bigoplus_{j < l \leq 0} W_l \oplus V_0 \quad (22)$$

Ainsi on peut construire différentes bases de  $V_j$  :

– Il y a bien entendu la famille  $(\phi_{j,k})_{0 \leq k \leq 2^{-j-1}}$ ,

- En utilisant la première décomposition (20), on obtient une base par union des bases de  $V_{j+1}$  et  $W_{j+1}$  ainsi  $(\Phi_{j+1,k})_{0 \leq k \leq 2^{-j-1}-1} \cup (\Psi_{j+1,k})_{0 \leq k \leq 2^{-j-1}-1}$  est une base orthonormée de  $V_j$ .
- De même, en utilisant la décomposition de (22) on obtient une base orthonormée de  $V_j$  en faisant l'union des bases orthonormées des espaces  $(W_l)_{j < l \leq 0}$  et de la base de  $V_0$ .

Ainsi  $\bigcup_{j < l \leq 0} (\Psi_{l,k})_{0 \leq k \leq 2^{-l}-1} \cup \Phi_{0,0}$  est une base orthonormée de  $V_j$ .

Comme  $W_j \subset V_{j-1}$ , pour tout  $k$  on peut écrire  $\Psi_{j,k}$  comme une combinaison linéaire des  $\Phi_{j-1,l}$ , plus précisément on a

**Proposition 20.** *Lien entre les fonctions  $\Psi_{j,k}$  et  $\Phi_{j-1,l}$*

Pour tout couple  $(j,k)$ ,

$$\Psi_{j,k} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{j-1,2k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{j-1,2k+1}$$

## 5.2 Bases de Haar sur $\mathbb{R}$

3. Définitions de la fonction d'échelle de Haar  $\Phi$ , des espaces d'approximation  $V_j$  et des fonctions  $\Phi_{j,k}$ .

**Définition 33. Définition de la fonction  $\Phi$  de Haar et des espaces  $V_j$**

On définit la fonction d'échelle de Haar comme la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  la translatée  $\Phi_k$  de  $\Phi$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_k(x) = \Phi_{x-k}.$$

On note également  $V_0$  l'espace vectoriel engendré par toutes les translatées de  $\Phi$  :

$$V_0 = \text{Vect}((\Phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}) \tag{23}$$

Cet espace est l'espace des fonctions à support compact, constantes sur des intervalles de la forme  $[k, k+1[$ .

**Définition 34.** *Dans toute la suite on considère le produit scalaire réel défini par*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt$$

et on munit l'espace vectoriel des fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  de la norme associée à ce produit scalaire.

**Remarque :** Pour ce produit scalaire, la famille  $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthonormée de  $V_0$ .

**Remarque :** On définit de la même manière que dans le cas précédent les fonctions  $\Phi_{j,k}$  et les espaces  $V_j$ . La grande différence avec le cas précédent est que tous ces espaces  $V_j$  sont maintenant de dimension infinie.

**Remarque :** On définit également de la même manière la fonction  $\Psi$ , les fonctions  $\Psi_{j,k}$  et les espaces  $W_j$ .

Les espaces  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  ainsi construits constituent ce que l'on appelle une approximation multi-résolution :

4. Définition d'une multi-résolution.

**Définition 35.** Une suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  est une approximation multi-résolution si elle vérifie les 6 propriétés suivantes :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, \quad f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j \quad (24)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_{j+1} \subset V_j \quad (25)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1} \quad (26)$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\} \quad (27)$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \text{Adhérence} \left( \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j \right) = L^2(\mathbb{R}) \quad (28)$$

Il existe  $\Phi$  tel que  $\{\Phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une base hilbertienne de  $V_0$ .

Nous verrons qu'il est possible de construire des approximations multi-résolution à l'aide d'autres fonctions que les fonctions de Haar.

5. Filtres  $h_n$  et  $g_n$  et changements de bases sur  $V_j$ .

**Exercice**

(a) Justifier qu'il existe une unique suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  telle que

$$\Phi_{1,0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \Phi(t - n). \quad (29)$$

En utilisant (18) déterminer explicitement la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

(b) En calculant la transformée de Fourier des deux membres de l'égalité ci dessus, établir la relation suivante :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{\Phi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega) \hat{\Phi}(\omega) \quad (30)$$

(c) En déduire que pour tout  $P \in \mathbb{N}$

$$\hat{\Phi}(\omega) = \left( \prod_{p=1}^P \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \right) \hat{\Phi}(2^{-P}\omega). \quad (31)$$

On peut montrer en effectuant un passage à la limite que

$$\hat{\Phi}(\omega) = \left( \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \right) \hat{\Phi}(0). \quad (32)$$

(d) Justifier qu'il existe une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que l'on explicitera telle que

$$\Psi_{1,0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \Phi_n \quad (33)$$

En déduire la relation suivante :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{\Psi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega) \hat{\Phi}(\omega) \quad (34)$$

Nous verrons que l'on peut définir d'autres ondelettes associées à des suites  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Les relations précédentes permettent de définir les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  uniquement en fonction des suites  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui sont elles mêmes liées par une relation simple.

#### 6. Algorithme de transformée en ondelettes.

L'algorithme de transformée en ondelettes est un algorithme purement discret et exact. Il calcule exactement le produit scalaire d'une fonction avec des ondelettes qui nécessite pourtant en théorie un calcul d'intégrale. Cet algorithme repose sur le fait qu'on considère que les valeurs que l'on traite, ne sont pas des valeurs en des réels  $x_n$  d'une fonction  $f$  mais des produits scalaires entre une fonction  $f$  et des fonctions  $\Phi_{j,k}$  pour une certaine valeur de  $j$ . On utilise ensuite les relations qui existent entre les fonctions  $\Phi_{j,k}$  pour calculer les produits scalaires  $\langle f, \Phi_{l,k} \rangle$  et  $\langle f, \Psi_{l,k} \rangle$  les uns en fonction des autres.

Cette hypothèse qui peut sembler surprenante n'est en fait pas totalement déraisonnable dans la mesure où des produits scalaires  $\langle f, \Phi_{j,k} \rangle$  sont en fait des moyennes locales de la fonction  $f$ . Ainsi on interprète les nombres que l'on considère comme les coefficients de la projection de  $f$  sur un espace  $V_j$  dans la base des  $(\Phi_{j,k})_k$ . L'algorithme de transformée en ondelettes consiste ainsi en un changement de bases orthonormé de  $V_j$ .

Ainsi, suivant le choix de l'ondelette que l'on fait, la suite de nombres que l'on considère a un sens différent.

#### Exercice

- En utilisant la relation (18) portant sur la fonction  $\Phi$  établir un lien entre  $\langle \Phi_{j,k}, f \rangle$ ,  $\langle \Phi_{j-1,2k}, f \rangle$  et  $\langle \Phi_{j-1,2k+1}, f \rangle$  où  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .
- Etablir une relation analogue entre  $\langle \Psi_{j,k}, f \rangle$ ,  $\langle \Phi_{j-1,2k}, f \rangle$  et  $\langle \Phi_{j-1,2k+1}, f \rangle$ .
- La famille  $(\Phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base hilbertienne de  $V_j$ , de même la famille  $(\Phi_{j+1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base hilbertienne de  $V_{j+1}$  et la famille  $(\Psi_{j+1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base hilbertienne de  $W_{j+1}$ . Rappelons que

$$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}. \quad (35)$$

Déduire des questions précédentes une manière d'exprimer les coefficients de décomposition de  $f$  dans les bases  $(\Phi_{j+1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $(\Psi_{j+1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  à partir de ceux dans  $(\Phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ .

- Soit  $f \in V_j$ , déduire des questions précédentes un algorithme itératif de décomposition qui permet de calculer rapidement une décomposition de  $f$  dans  $\bigoplus_{i=j+1}^l W_i + V_l$  pour un  $l > j$  à partir des coefficients dans  $V_j$ .

On effectuera dans un premier temps le changement de base associé à la décomposition  $V_j = W_{j+1} \oplus V_{j+1}$  puis celui associé à la décomposition  $V_{j+1} = W_{j+2} \oplus V_{j+2}$ .

## 6 Bases hilbertiennes (orthogonales) d'ondelettes

Dans cette partie, nous allons introduire différentes bases orthogonales d'ondelettes, toutes construites selon la même architecture que la base de Haar vue précédemment. La base d'ondelettes est définie de manière univoque par la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui peut être choisie autrement que pour la base de Haar. A partir de cette suite, on peut définir la fonction d'échelle  $\Phi$ , l'ondelette mère  $\Psi$  ainsi que les espaces  $V_j$  et  $W_j$ . On peut aussi définir la fonction d'échelle  $\Phi$  ou l'approximation multi-résolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  et définir les autres éléments à partir de celle-ci. C'est ce dernier choix que nous faisons pour la présentation mais d'autres sont possibles.

- Définition d'une fonction d'échelle  $\Phi$  associée à une multi-résolution.

**Définition 36.** Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une approximation multi-résolution. On appelle fonction d'échelle, toute fonction  $\Phi$  telle que la famille des  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  forme une BON de  $V_0$ .

**Remarque :** Comme La fonction  $\Phi_{1,0} \in V_0$ , il existe une suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\Phi_{1,0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \Phi(t-n). \quad (36)$$

Du fait que  $\Phi$  est une fonction d'échelle, la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifie un certain nombre de propriétés. Le théorème suivant est dû à Mallat et Meyer.

**Théorème 5.** Soit  $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction d'échelle, alors la transformée de Fourier de la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associée vérifie la relation suivante :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (37)$$

et

$$\hat{h}(0) = \sqrt{2}. \quad (38)$$

Inversement si  $\hat{h}$  est  $2\pi$ -périodique et continument différentiable au voisinage de 0 et qu'elle vérifie les deux relations ci dessous et si de plus

$$\inf_{\omega \in [-\pi/2, \pi/2]} |\hat{h}(\omega)| > 0 \quad (39)$$

alors la fonction  $\Phi$  définie par

$$\hat{\Phi}(\omega) = \left( \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \right). \quad (40)$$

est la transformée de Fourier d'une fonction d'échelle de  $L^2(\mathbb{R})$

Ce théorème indique qu'il est possible de construire une grande variété de BON d'ondelettes, dont Haar n'est qu'un exemple.

**Exercice** Montrer que la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  associée à la base de Haar vérifie bien les hypothèses du théorème.

**Exercice**

(a) Montrer que la fonction  $\hat{h}$  définie par

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi], \quad \hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(\omega) \quad (41)$$

vérifie bien les hypothèses du théorème.

(b) En déduire que la fonction d'échelle associée vérifie

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{\Phi}(\omega) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega) \quad (42)$$

En déduire une expression de  $\Phi$ .

**Exercice**

On note  $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  définie par

$$g_n = (-1)^{1-n} h_{1-n}.$$

(a) Exprimer  $\hat{g}$  en fonction de  $\hat{h}$ .

(b) Montrer que pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega)|^2 = 2 \text{ et que} \quad (43)$$

On définit la fonction  $\Psi$  par

$$\hat{\Psi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega) \hat{\Phi}(\omega)$$

La fonction  $\Psi$  est appelée ondelette.

(c) Montrer que

$$\Psi(x) = \sum_n g_n \sqrt{2} \Phi(2x - n) = \sum_n g_n \Phi_{-1,n}(x).$$

(d) Calculer  $\hat{g}(0)$  puis  $\int_{x \in \mathbb{R}} \Psi(x) dx$ .

(e) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

$$\langle \Psi(\cdot), \Psi(\cdot - k) \rangle = \sum_n h_n h_{n-2k}$$

(f) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

$$\langle \Phi(\cdot), \Phi(\cdot - k) \rangle = \sum_n h_n h_{n-2k}$$

En déduire que les  $(\Psi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  forment une base orthonormée de l'espace qu'elles engendrent.

2. Décomposition de  $V_j$  en somme d'espaces orthogonaux  $W_l$ .

Comme pour les ondelettes de Haar, on définit les fonctions  $\Phi_{j,k}$  :

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \Phi(2^{-j}x - k) \quad (44)$$

et les ondelettes  $\Psi_{j,k}$

$$\Psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \Psi(2^{-j}x - k) \quad (45)$$

Et on définit de même les espaces  $V_j$  et  $W_j$  par

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_j = \text{Vect}(\Phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}} \text{ et } W_j = \text{Vect}(\Psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (46)$$

Ces fonctions forment ainsi des bases hilbertiennes des fonctions qu'elles engendrent. On a ainsi

$$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}. \quad (47)$$

et pour tout  $l \geq j$

$$V_j = \bigoplus_{k=l}^{j+1} W_k + V_l \quad (48)$$

Comme  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une approximation multi-résolution,  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$  et ainsi pour toute fonction

$f \in L^2(\mathbb{R})$  on a la formule de reconstruction suivante :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \Psi_{j,k} \rangle \Psi_{j,k} \quad (49)$$

3. Notion de transformée en ondelettes orthogonale.

Comme nous avons utilisé la relation (18) pour établir un algorithme de transformée rapide en ondelettes on peut utiliser les relations

$$\Phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \Phi_{-1,n}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n 2^{\frac{1}{2}} \Phi(2t - n) \quad \text{et} \quad \Psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \Phi_{-1,n}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n 2^{\frac{1}{2}} \Phi(2t - n) \quad (50)$$

pour établir un algorithme de transformée en ondelettes.

En effet en utilisant la définition des fonctions  $\Phi_{j,k}$  et  $\Psi_{j,k}$  données plus haut on déduit des égalités précédentes que pour tout couple  $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$

$$\Phi_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \Phi_{j-1,n+2k} \quad (51)$$

et de même

$$\Psi_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \Phi_{j-1,n+2k} \quad (52)$$

Comme pour Haar, on exploite la décomposition  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$  de manière récursive et le fait que pour toute fonction  $f$  on a d'une part

$$\langle f, \Phi_{j,k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \langle f, \Phi_{j-1,n+2k} \rangle \quad (53)$$

et d'autre part

$$\langle f, \Psi_{j,k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \langle f, \Phi_{j-1,n+2k} \rangle \quad (54)$$

Ce qui permet de calculer les coefficients de décomposition d'une fonction  $f$  sur les espaces  $V_j$  et  $W_j$  de manière très rapide à partir de ceux sur  $V_{j-1}$ . Dans la pratique on calcule chacun des jeux de coefficients par une convolution et un sous-échantillonnage d'un facteur 2. On itère ensuite le procédé autant de fois qu'on le souhaite sur les espaces  $V_l$  résiduels en conservant inchangés les coefficients sur les espaces  $W_l$ .

C'est l'algorithme de transformée rapide en ondelettes

4. Moments nuls, régularité et décroissance des coefficients d'ondelettes. On commencera ce chapitre par une feuille de TD consacrées aux moments nuls des bases d'ondelettes orthogonales.

**Définition 37.** On dit qu'une ondelette  $\Psi$  admet  $p$  moments nuls si pour tout  $k < p$  on a

$$\int_{t \in \mathbb{R}} \Psi(t) t^k dt = 0. \quad (55)$$

**Questions :**

- (a) Montrer que l'ondelette de Haar admet 1 moment nul.
- (b) Justifier que pour tout choix de  $h$  vérifiant les hypothèses de Mallat, on a nécessairement  $\hat{g}(0) = 0$ . En déduire que  $\int_{t \in \mathbb{R}} \Psi(t) dt = 0$  et donc que toute ondelette possède au moins un moment nul.

**Remarque :** Si l'ondelette  $\Psi$  admet  $p$  moments nuls alors l'ondelette est orthogonale à tous les polynômes de degré strictement inférieur à  $p$ .

**Définition 38.** On dit qu'une fonction  $f$  est à support compact s'il existe  $K > 0$  tel que  $f$  est nulle en dehors de l'intervalle  $[-K, K]$ .

On dit qu'une suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est à support compact s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $|n| \geq n_0 \implies h_n = 0$ . Le support de  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est ainsi le plus petit intervalle  $[N_1, N_2]$  tel que  $h$  est nul en dehors de cet intervalle.

**Proposition 21.** Si  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est à support compact, alors la fonction d'échelle associée est à support compact et de même support que  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . L'ondelette  $\Psi$  associée est également à support compact.

5. Approximation en ondelettes.

**Proposition 22.** Si  $f \in L^2([0, 1])$  est une fonction,  $C^m$  par morceaux et admettant un nombre fini de discontinuités alors si  $\Psi$  est une ondelette à support compact ayant  $p > m$  moments nuls alors il existe  $C > 0$  tel que l'erreur d'approximation non-linéaire  $\varepsilon_N^l(f)$  à  $N$  termes de  $f$  dans la base d'ondelettes  $(\Psi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$  vérifie

$$\varepsilon_N^n(f) \leq \frac{C}{n^{2m}} \quad (56)$$

**Idee de la démonstration :**

- (a) Pour démontrer cette décroissance, on analyse la décroissance des coefficients d'ondelettes réordonnés par ordre décroissant de valeur absolue.
- (b) Les coefficients d'ondelettes peuvent se classer en deux catégories :
  - i. Ceux qui sont associés à des ondelettes dont le support intersecte une singularité. Comme l'ondelette est à support compact, il existe un entier  $K$  tel qu'à chaque échelle  $j$  le nombre de tels coefficients est borné par  $k$ . Comme  $f$  est bornée on a

$$|\langle f, \Psi_{j,k} \rangle| \leq \|f\|_\infty \|\Psi_{j,k}\|_1 = 2^{\frac{j}{2}} \|f\|_\infty \|\Psi\|_1 \quad (57)$$

Ainsi ces coefficients décroissent rapidement grâce au fait qu'ils sont très peu nombreux par échelle et qu'ils décroissent en fonction de l'échelle.

- ii. Ceux qui sont associés à des ondelettes dont le support n'intersecte pas une discontinuité. Pour ceux là, on utilise le fait qu'il existe un réel  $C$  tel que sur le support  $[a, b]$  de l'ondelette, la fonction  $f$  peut être approchée par un polynôme  $P$  de degré  $n$  tel que

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - P(x)| \leq C(x - a)^n. \quad (58)$$

On peut prendre par exemple le polynôme de Taylor au point  $a$ .

On utilise ensuite le fait que

$$|\langle f, \Psi_{j,k} \rangle| \leq |\langle f - P, \Psi_{j,k} \rangle| + |\langle P, \Psi_{j,k} \rangle| = |\langle f - P, \Psi_{j,k} \rangle| \quad (59)$$

car  $\Psi$  et donc  $\Psi_{j,k}$  est orthogonale aux polynômes dont le degré est inférieur ou égal à  $p - 1 \geq n$ .

On observe ensuite que la taille du support d'une ondelette  $\Psi_{j,k}$  est borné par  $K2^j$  où  $K$  est la taille du support de  $\Psi$ .

On a ainsi

$$|\langle f - P, \Psi_{j,k} \rangle| \leq \|f - P\|_\infty \|\Psi_{j,k}\|_1 \leq C(K2^j)^n 2^{\frac{j}{2}} \|\Psi\|_1 = CK^n \|\Psi\|_1 2^{\frac{(2n+1)j}{2}} \quad (60)$$

On a ainsi

$$|\langle f, \Psi_{j,k} \rangle|^2 \leq C2^{(2n+1)j} \quad (61)$$

On conclut en observant qu'il y a au plus  $2^{-j}$  coefficients par échelle de ce type (c'est le nombre total de coefficients d'ondelettes à cette échelle car la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0, 1]$ ).

- (c) Une fois qu'on a contrôlé la décroissance des deux types de coefficients on remarque que ce sont les seconds qui sont dominants, et on peut conclure.

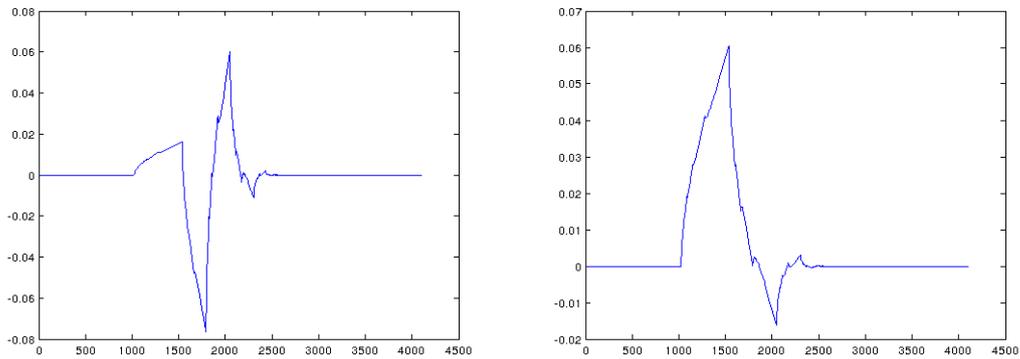


FIGURE 1 – Ondelette  $\Psi$  à gauche et fonction d'échelle  $\Psi$  à droite dites de *Daubechies* de paramètre 4 avec 2 moments nuls.

On peut observer que cette décroissance est la même que ce qu'on peut avoir pour des fonctions  $C^n$  et  $2\pi$ -périodique dans une base de Fourier.

La localisation des ondelettes permet d'assurer la même décroissance des coefficients avec ou en l'absence de discontinuité, ce qui est un avantage décisif par rapport à la base des exponentielles complexes.

**Remarque :** On peut remarquer qu'en terme d'approximation linéaire, les ondelettes n'apportent aucun avantage par rapport à d'autres bases comme Fourier par exemple.

#### 6. Exemples des ondelettes de Daubechies et de Coifman.

Le filtre  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  associé à l'ondelette de Daubechies de paramètre 4 est défini par

$$h_0 = a, \quad h_1 = a(2 - b), \quad h_2 = a(1 - 2b), \quad h_3 = -ab \quad \text{avec} \quad a = \frac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{3} - 1)} \quad \text{et} \quad b = 2 - \sqrt{3} \quad (62)$$

On peut vérifier que cette ondelette a bien deux moments nuls, en effet  $\hat{h}(\pi) = 0$  et  $\hat{h}'(\pi) = 0$ . C'est l'ondelette de support minimal qui a cette propriété.

Cette propriété de support implique qu'en tout point  $x \in \mathbb{R}$  et pour une échelle  $j$ , il existe au plus 3 ondelettes dont le support intersecte  $x$ , comme l'indique la figure 2. C'est la seule ondelette ayant au moins deux moments nuls à vérifier cette propriété.

On peut aussi mentionner les Ondelettes de Coifman dont le support est légèrement plus grand que celui des ondelettes de Daubechies.

#### 7. On termine le chapitre par une feuille de TD matlab sur l'approximation linéaire et non-linéaire en ondelettes.

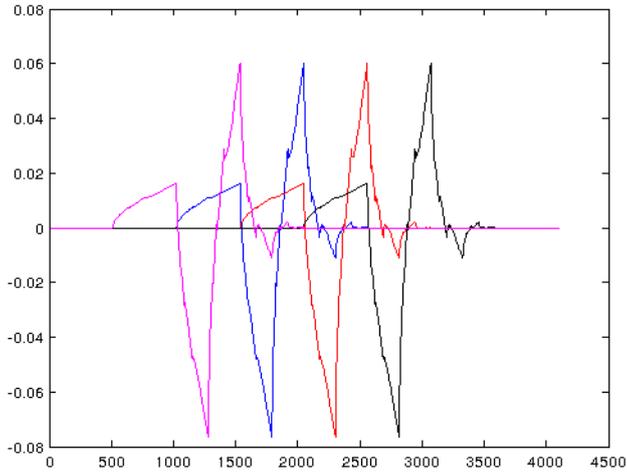


FIGURE 2 – Quatre Ondelettes  $\Psi$  de *Daubechies* 4 de même échelle  $j$  pour des valeurs de  $k$  consécutives.

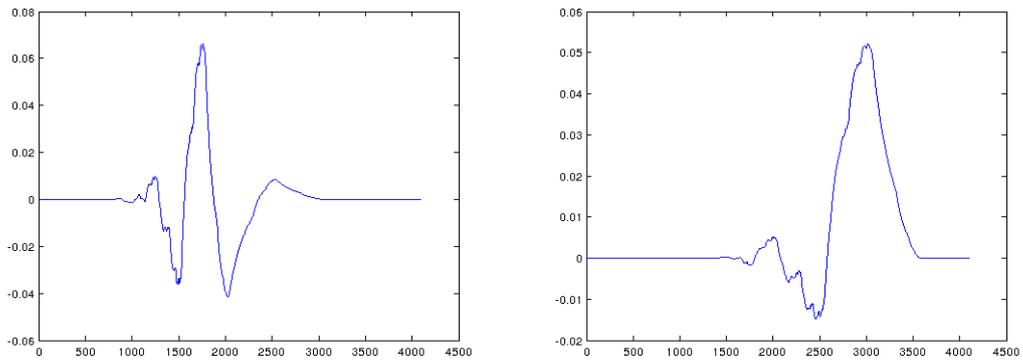


FIGURE 3 – Ondelette  $\Psi$  à gauche et fonction d'échelle  $\Psi$  à droite dites de *Coifman* ou *Coiflet* de paramètre 1 avec 2 moments nuls.

## 7 Ondelettes 2D

### 1. Définitions :

Une base orthonormée d'ondelettes séparables de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  est construite à partir de produits séparables de dilatées et de translatées d'une fonction d'échelle  $\Phi$  et d'une ondelette  $\Psi$ . La fonction d'échelle est associée à une approximation multirésolution  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Ainsi  $V_j^2$  l'espace d'approximation d'échelle  $j$  est l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme

$$\Phi_{j,k_1,k_2}(x,y) = \Phi_{j,k_1}(x)\Phi_{j,k_2}(y) \quad (63)$$

Comme dans le cas 1D, on a les inclusions  $V_j^2 \subset V_{j-1}^2$  et on peut définir l'espace  $W_j$  comme le supplémentaire orthogonal de  $V_j^2$  dans  $V_{j-1}^2$  :

$$V_{j-1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^2 \quad (64)$$

Les espaces  $W_j$  peuvent chacun s'écrire sous la forme d'une somme orthogonale de trois espaces :

$$W_j = W_j^v \oplus W_j^h \oplus W_j^d \quad (65)$$

Chacun de ces espaces correspond à un espace de détail d'une direction particulière.

(a)  $W_j^v$  est espace des détails verticaux, il est engendré par les fonctions

$$\Psi_{j,k_1,k_2}^v(x,y) = \Psi_{j,k_1}(x)\Phi_{j,k_2}(y)$$

pour  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ .

(b)  $W_j^h$  est espace des détails horizontaux, il est engendré par les fonctions

$$\Psi_{j,k_1,k_2}^h(x,y) = \Phi_{j,k_1}(x)\Psi_{j,k_2}(y)$$

pour  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ .

(c)  $W_j^d$  est espace des détails diagonaux, il est engendré par les fonctions

$$\Psi_{j,k_1,k_2}^d(x,y) = \Psi_{j,k_1}(x)\Psi_{j,k_2}(y)$$

pour  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ .

Ainsi les bases d'ondelettes 2D sont des produits dits *tensoriels* de bases d'ondelettes 1D.

**Remarque :** Contrairement au cas 1D on n'a pas de décroissance de l'erreur d'approximation non linéaire comparable pour les fonctions régulières et les fonctions régulières par morceaux.

Cependant on peut montrer que la décroissance de cette erreur d'approximation non linéaire est meilleure que celle qu'on obtient en bases de Fourier 2D. Les coefficients de large amplitudes sont concentrés le long des courbes de singularité.

Dans la pratique, les ondelettes sont très efficaces pour coder les images et sont utilisées pour la compression, le débruitage, la reconstruction et bien d'autres applications.

### 2. Algorithme de Transformée en ondelettes 2D.

L'algorithme de transformée en ondelettes 2D consiste à alterner les étapes de la transformée en ondelettes 1D sur les lignes et les colonnes. (Voir feuille de TD associée).

### 3. Applications.



FIGURE 4 – Lenna à gauche et sa transformée en ondelettes de Daubechies 4 à droite. Essayez de repérer où se situe les différents espaces de détails.