

# Analyse de Fourier

## Transformée de Walsh

C. Dossal

Octobre 2009

### 1 Transformée de Walsh et Fonctions Booléennes

1. Combien existe-t-il de fonctions booléennes de  $\mathbb{F}_2^k$  dans  $\mathbb{F}_2$  ?
2. Combien existe-t-il de fonctions linéaires ? affines ?
3. Exprimer sous forme de vecteur la fonction de  $\mathbb{F}_2^3$  qui  $(x_1, x_2, x_3)$  associe  $x_1x_2 + x_3 + 1$ .
4. Donner la forme algébrique de la fonction  $f$  suivante :  $[0,0,1,0,0,1,1,0]$ .
5. Soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions booléennes de  $\mathbb{F}_2^k$ . Exprimer  $d(f, g)$  en fonction de  $\langle f^*, g^* \rangle$ .
6. Si  $f$  est une fonction linéaire, quelle est la forme de  $Wf^*$  ?
7. Si  $f$  est une fonction affine et non linéaire, quelle est la forme de  $Wf^*$  ?
8. Si  $f$  est une fonction booléenne de  $\mathbb{F}_2^k$ , que vaut  $\sum_k |Wf^*(k)|^2$  ?
9. Que dire de la distance d'une fonction booléenne quelconque l'ensemble des fonction affine ?
10. Déterminer la distance de la fonction  $f$  définie par  $[0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1]$  aux fonctions affines. Donner la ou les fonctions affines les plus proches. Est ce une fonction courbe ?

### 2 Transformée de Walsh et compression

11. Ecrire un programme matlab qui prend en entrée un entier  $k$  et qui renvoie le vecteur des changements de signes des lignes de la matrice de Walsh  $W_k$ .
12. Ecrire un programme matlab qui compresse un vecteur en ne conservant que les  $n$  coefficients de Walsh associés aux lignes qui oscillent le moins.
13. Ecrire un programme matlab qui compresse un vecteur en ne conservant que les  $n$  coefficients ayant les plus grandes valeurs absolues.
14. Faites des tests sur différents vecteurs. Quelle méthode assure une distorsion  $ell_2$  minimale ? On pourra utiliser les vecteurs produits par la commande MakeSignal disponible la page suivante :  
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~dossal/MakeSignal.m>