Filtres et Ondelettes

Ch. Dossal

2010

1 Définition d'une base d'ondelettes par un filtre h

On considère une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{R})$ et on note $\hat{h}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega}$ sa série de Fourier. On note par ailleurs $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$ le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$.

Dans toute la feuille on considérera une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

1. $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$,
2. $\forall\omega \in \mathbb{R}$, $|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega+\pi)|^2 = 2$.

On dira que alors que h est un filtre.
On supposera que la fonction Φ définie par

$$\hat{\Phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(\frac{w}{2^k})}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

est bien définie dans $L^2(\mathbb{R})$ et a un représentant continu. La fonction Φ est appelée fonction d'échelle.
De plus on admettra sans démonstration que sous les hypothèses précédentes

$$\int_{\omega\in\mathbb{R}} |\hat{\Phi}(\omega)|^2 e^{in\omega} d\omega = \delta[n]. \tag{2}$$

1. A quelle espace fonctionnel appartient $\hat{h}$? Que vaut $\int_{x\in\mathbb{R}} \Phi(x)dx$
2. Déduire de (2) que
$$\langle\Phi(\cdot), \Phi(\cdot - n)\rangle = \delta[n]$$
c'est à dire que les fonctions $(\Phi(\cdot - n))_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de l'espace qu'elles engendrent. On notera V_0 cet espace.
3. Montrer que
$$\hat{\Phi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}(\omega)\hat{\Phi}(\omega)$$
4. Rappeler l'expression de la transformée de Fourier de $f(ax+b)$ en fonction de celle de f et en déduire que
$$\Phi(x) = \sum_n h_n\sqrt{2}\Phi(2x-n). \tag{3}$$
Pour tout couple $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ on note
$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\Phi(2^{-j}x - k) \tag{4}$$
La relation (3) devient alors
$$\Phi(x) = \Phi_{0,0}(x) = \sum_n h_n\Phi_{-1,n}(x).$$

5. Montrer que pour tout couple (j,k), $\|\Phi_{j,k}\|_2 = 1$.

   On note $V_j = Vect(\Phi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$.

6. Montrer que les $(\Phi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de V_j.

7. Montrer que $V_j \subset V_{j-1}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

   Grâce au filtre h nous avons construit une famille d'espaces emboîtés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ formant une multirésolution c'est à dire une famille d'espaces vérifiant les 6 propriétés suivantes :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2,\ f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j, \tag{5}$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j, \tag{6}$$

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \in V_{j+1}, \tag{7}$$

$$\lim_{j\to+\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\} \tag{8}$$

$$\lim_{j\to-\infty} V_j = \overline{\bigcup_{j\leqslant J} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \tag{9}$$

   et enfin il existe une fonction θ telle que $\{\theta(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base de Riesz de V_0.

   En fait ici on a même une base orthonormée. Les points (8) et (9) ont été démontrés en cours.

8. Calculer

$$\langle \Phi_{j,k}, \Phi_{j-1,2k+n} \rangle$$

   On note $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de $\ell^2(\mathbb{Z})$ définie par

$$g_n = (-1)^n h_{1-n}.$$

9. Exprimer $\hat{g}$ en fonction de $\hat{h}$.

10. Montrer que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega)|^2 = 2 \text{ et que} \tag{10}$$

$$\overline{\hat{h}(\omega+\pi)}\hat{h}(\omega) + \overline{\hat{g}(\omega+\pi)}\hat{g}(\omega) = 0. \tag{11}$$

   On définit la fonction Ψ par

$$\hat{\Psi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}(\omega)\hat{\Phi}(\omega)$$

   La fonction Ψ est appelée ondelette.

11. Montrer que

$$\Psi(x) = \sum_n g_n \sqrt{2}\Phi(2x-n) = \sum_n g_n \Phi_{-1,n}(x).$$

12. Calculer $\int_{x\in\mathbb{R}} \Psi(x)dx$.

13. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\langle \Psi(\cdot), \Psi(\cdot - k) \rangle = \sum_n h_n h_{n-2k}$$

14. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\langle \Phi(\cdot), \Phi(\cdot - k) \rangle = \sum_n h_n h_{n-2k}$$

En déduire que les $(\Psi(\cdot - k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de l'espace qu'elles engendrent. On notera W_0 cet espace. De la même manière on définit $\Psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\Psi(2^{-j}x - k)$ et $W_j = Vect(\Psi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ et de la même manière on montre que ces fonctions forment une bases orthonormée de W_j.

15. Montrer que $W_j \subset V_{j-1}$.

On définit (f_n) par : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f_n = g_{-n}$ et $l = f \star h$ où $\star$ désigne la convolution sur $\ell^2(\mathbb{Z})$.

16. Montrer que

$$\langle \Psi(\cdot), \Phi(\cdot - k) \rangle = l_{2k}.$$

17. Montrer que

$$\hat{l}(\omega) = e^{i\omega}\hat{h}(\omega)\hat{h}(\omega + \pi)$$

en déduire que $\hat{l}(\omega + \pi) + \hat{l}(\omega) = 0$ puis que $l_{2k} = 0$.

18. En déduire que $W_0 \perp V_0$. On montre de la même manière que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $W_j \perp V_j$. En déduire que $W_j \perp W_l$ si $l \neq j$.

19. Pour terminer cette première partie nous allons montrer qu'en plus d'avoir $V_0 \subset V_{-1}$ et $W_0 \subset V_{-1}$ on a $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$.

   (a) Soit $\sum_n a_n \Phi_{-1,n}(x)$ un élément de V_{-1}. On pose

   $$\hat{b}(2\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{a}(\omega)\overline{\hat{h}(\omega)} + \hat{a}(\omega+\pi)\overline{\hat{h}(\omega+\pi)}\right) \text{ et } \hat{c}(2\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{a}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} + \hat{a}(\omega+\pi)\overline{\hat{g}(\omega+\pi)}\right).$$

   Justifier que $\hat{b}$ et $\hat{c}$ sont les transformées de Fourier d'éléments de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

   (b) En utilisant (10) et (11), montrer que

   $$\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{b}(\omega)\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{c}(\omega)\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

   (c) En déduire que

   $$\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{b}(\omega)\hat{\Phi}(\omega) + \hat{c}(\omega)\hat{\Psi}(\omega).$$

   et donc que

   $$\sum_n a_n \Phi_{-1,n}(x) = \sum_n b_n \Phi_{0,n} + \sum_n c_n \Psi_{0,n}.$$

   (d) Conclure. On montre ainsi que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$.
   En utilisant (9), on en déduit que

   $$\sum_{j\in\mathbb{Z}} W_j = L^2(\mathbb{R}). \tag{12}$$

   Ainsi toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ s'écrit comme une combinaison linéaire d'ondelettes toutes dilatées et translatées d'une seule et même *ondelette mère*.

2 Filtres à support compact

Parmi tous les filtres h qui mène à une analyse multirésolution, il en existe certains qui sont à support compact c'est à dire que seul un nombre fini de h_n sont non nuls. Un des principaux intérêts de ces filtres est qu'ils produisent des ondelettes et des fonctions d'échelle à support compact. Dans la suite de la feuille, on considérera des suites $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ presque nulles et on admettra sans perte de généralité que $h_n = 0$ si $n < 0$ et que $h_0 \neq 0$.

20. A quel espace fonctionnel appartient $\hat{h}$?

2.1 Haar

Chaque propriété de la fonction d'échelle a une traduction en terme de propriété du filtre h.

21. Quelle relation sur les coefficients de h traduit le fait que $\|\Phi\|_2 = 1$?
22. Quelle relation sur les coefficients de h traduit le fait que $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$?
23. Quelle relation sur les coefficients de h traduit le fait que Ψ est d'intégrale nulle.
24. Si on suppose que seuls h_0 et h_1 sont non nuls. Quels sont les valeurs possibles de h ?
25. Vérifier que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ainsi définie vérifie bien les hypothèses initiales.
26. Montrer que la fonction d'échelle Φ associée à ce filtre h est la fonction indicatrice de $[0, 1]$. Pour cela on peut se contenter de vérifier que Φ vérifie la relation implicite (3)
27. Donner l'ondelette Ψ associée. Cette ondelette est appelée ondelette de Haar.
28. Existe il des filtres h de longueur exactement 3 ?

2.2 Ondelettes, filtres et moments nulles

Les capacités d'approximation des bases d'ondelettes reposent sur le nombre de moments nuls de l'ondelettes. On dit qu'une ondelette admet n moments nuls si pour tout entier k entre 0 et $n-1$ on a

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \Psi(x)x^k dx = 0.$$

Si une ondelette a n moments nuls, toutes les ondelettes $\Psi_{j,k}$ sont orthogonales aux fonctions qui sont localement polynomiales sur leur support. Rappelons que si le support de Ψ est de mesure inférieure à L le support de $\Psi_{j,k}$ est de mesure inférieure à $L2^j$.
Par définition une ondelette a toujours un moment nul mais elle peut en avoir plusieurs autres.

29. Comment se traduit $\int_{x\in\mathbb{R}} \Psi(x)x^k dx = 0$ sur la transformée de Fourier de Ψ ?

    Comme $\hat{\Psi}(2\omega) = \hat{g}(\omega)\hat{\Phi}(\omega)$ et comme $\hat{\Phi}(0) \neq 0$ il suit que pour que Ψ admette n moments nuls il faut et il suffit que $\hat{\Phi}$ soit $n-1$ fois dérivable en 0 et que pour tout $k < n$, $(\hat{g})^{(k)}(0) = 0$ ce qui se traduit par $(\hat{h})^{(k)}(\pi) = 0$.
    Or $\hat{h}(\omega)$ est un polynôme trigonométrique i.e à $\hat{h}(\omega) = \sum_n h_n e^{-iwn}$ on peut associer le polynome $P(z) = \sum_n h_n z^n$. Dire que $(\hat{h})^{(k)}(\pi) = 0$ pour tout $k < n$ c'est excatement dire que -1 est une racine d'ordre n de P. On peut ainsi chercher un filtre h associé à une ondelette ayant n moments nuls en cherchant les coefficients d'un polynome P vérifiant un certain nombre de conditions.

30. Quel est le nombre de moments nuls de l'ondelette de Haar ?

2.3 Ondelettes de support 4 ayant 2 moments nuls

Dans cette partie nous allons chercher à déterminer une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ presque nulle associée à une ondelette ayant 2 moments nuls avec un support de taille 4. Plus précisément on suppose que les seuls coefficients du filtre qui sont non nuls sont h_0, h_1, h_2 et h_3. Pour cela on va utiliser le polynome $P(z) = \sum_{n=0}^{3} h_n z^n$.

31. Justifier que si l'ondelette admet 2 moments nuls alors le polynome $P(z) = \sum_n h_n z^n$ associé vérifie les conditions suivantes:

    (a) Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(z) = a(z + 1)^2(z - b)$,
    (b) $P(1) = \sqrt{2}$ et

(c) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sum_n h_n h_{n+2k} = 0$.

32. En déduire les valeurs possibles de h. L'ondelette obtenue est appelée ondelette de *Daubechies 4* en référence à la taille de son support. C'est la seule ondelette de support 4 ayant 2 moments nuls.