UFR de Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux I

Année 1999–2000

Licence de Mathématiques et Informatique

Module d'Algorithmique Arithmétique

Examen du 20 janvier 2000

Durée 3 heures

Documents interdits. Le barème (donné sur 20 points) n'est qu'indicatif.

EXERCICE I (9 points)

Soit $A(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme fixé non identiquement nul et tel que $A(x) \geq 0$ pour $x \in [0,1]$. Pour deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on pose

$$< P, Q >= \int_0^1 P(x)Q(x)A(x)\,dx \ .$$

1) Montrer que $< P, Q >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $P_n(X)$ la famille de polynôme orthogonaux pour ce produit scalaire (avec $\deg(P_n) = n$) normalisée en demandant que les P_n soient unitaires.

2) On cherche les polynômes $A(X)$ pour lesquels on ait

$$P_n(X) = \frac{c_n}{A(X)} \frac{d^n}{dX^n}(A(X)X^n(1-X)^n) \ ,$$

où c_n est une constante non nulle convenable.

a) En considérant $P_1(X)$, montrer que les seules racines de $A(X)$ dans $\mathbb{C}$ sont 0 et 1. En déduire que $A(X)$ est de la forme $A(X) = cX^a(1-X)^b$ pour des entiers positifs ou nuls a et b et une constante réelle strictement positive c.

b) Réciproquement, si $A(X)$ est de la forme ci-dessus, montrer qu'il existe des constantes c_n convenables telles que les polynômes

$$P_n(X) = \frac{c_n}{A(X)} \frac{d^n}{dX^n}(A(X)X^n(1-X)^n)$$

forment l'unique famille de polynômes orthogonaux unitaires pour le produit scalaire $< P, Q >$ (on n'oubliera pas de montrer que les $P_n(X)$ sont bien des polynômes).

c) Calculer la constante c_n en fonction de a et de b.

3) On pose

$$P_n(X) = X^n + \lambda_n X^{n-1} + \mu_n X^{n-2} + \dots$$

et on rappelle que la famille P_n vérifie une équation de récurrence du type

$$P_n(X) = (X + a_n)P_{n-1}(X) + b_n P_{n-2}(X)$$

pour des a_n et b_n convenables.

En identifiant les coefficients de X^{n-1} et X^{n-2} dans l'équation de récurrence, calculer a_n et b_n en fonction de λ_n et μ_n.

A partir de maintenant, on étudie le cas particulier $a = 2$, $b = 1$, c'est à dire $A(X) = X^2(1 - X)$.

4) a) Montrer que si $m \geq n$ on a

$$\frac{d^n}{dX^n} X^m = \frac{m!}{(m-n)!} X^{m-n} \quad .$$

b) Calculer explicitement λ_n et μ_n (on remarquera que $2n + 2 = 2(n + 1)$).

c) Déduire de la question 3) les valeurs de a_n et b_n, et donc la formule de récurrence pour les P_n.

Exercice II (5 points)

Soient z et t deux nombres complexes, et posons $z = a + ib$ et $t = c + id$ avec a, b, c et d réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} z & t \\ -\overline{t} & \overline{z} \end{pmatrix} \quad .$$

Le but de l'exercice est de calculer $\exp(A)$.

1) a) Calculer les valeurs propres de A en fonction de a, b, c, d, et montrer qu'elles sont conjuguées. Soient donc λ et $\overline{\lambda}$ ces valeurs propres.

b) Montrer que les valeurs propres sont distinctes, sauf si A est une matrice scalaire (multiple de l'identité). En déduire que A est toujours diagonalisable.

c) En notant A^* la conjuguée de la transposée de A (la transconjuguée), calculer AA^*. En déduire une autre démonstration du fait que A est diagonalisable.

2) On suppose $t \neq 0$ (sinon la matrice A est déjà diagonale). Calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres, et dont la première composante est égale à t. En déduire une diagonalisation de A.

3) Calculer $\exp(A)$. Les dénominateurs des coefficients ne devront faire intervenir que l'expression $\lambda - \overline{\lambda}$.

Exercice III (3 points)

Soient a, b, c trois nombres réels avec $ac \neq 0$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} .$$

1) Calculer $\|A\|^2$, soit en calculant explicitement par une étude de fonctions la quantité

$$\sup_{\theta \in [0,2\pi]} \left((a^2+b^2+c^2) + (a^2-b^2-c^2)\cos(2\theta) + 2ab\sin(2\theta) \right) ,$$

soit en utilisant la décomposition en valeurs singulières de A, et en montrant que la norme d'une matrice est égale à sa plus grande valeur singulière.

2) a) Calculer $\|A^{-1}\|^2$ en fonction de $\|A\|^2$.

b) En déduire que, pour a et c positifs fixés, le conditionnement de A est minimum (donc le meilleur possible) quand $b = 0$.

Exercice IV (3 points)

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

1) Trouver une décomposition en valeur singulière (SVD) de A sous la forme $A = UDV^t$ avec U et V orthogonale et D diagonale.

2) Calculer le pseudoinverse $A^\dagger$ de A, soit en utilisant la SVD trouvée ci-dessus, soit en utilisant sa caractérisation par le fait que $AA^\dagger$ et $A^\dagger A$ sont des matrices symétriques, et que $AA^\dagger A = A$ et $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$.