UFR de Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux I
Année 2000–2001

Licence de Mathématiques et Informatique

Module d'Algorithmique Arithmétique

Examen du 22 janvier 2001

Durée 3 heures

Documents interdits. Le barême (donné sur 20 points) n'est qu'indicatif.

Exercice I (10 points)

1) Question préliminaire. Pour tout nombre réel α on pose

$$I(\alpha) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\, dx \ .$$

a) Montrer que cette intégrale converge pour tout $\alpha > -1$.

b) En intégrant par parties, montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a $I(\alpha) = \alpha I(\alpha - 1)$.

c) En déduire par récurrence sur l'entier $k \geq 0$ que $I(k) = k!$. Pour tout $\alpha > -1$, on posera donc $\alpha! = I(\alpha)$.

d) Montrer brièvement par récurrence que la dérivée k-ième de X^α est égale à

$$\frac{\alpha!}{(\alpha-k)!} X^{\alpha-k} \ .$$

Dans toute la suite de cet exercice on fixe un nombre réel $a > -1$, et pour deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on pose

$$< P, Q >= \int_0^\infty P(x)Q(x)x^a e^{-x}\, dx \ .$$

2) a) Montrer soigneusement que $< P, Q >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $P_n(X)$ la famille de polynôme orthogonaux pour ce produit scalaire (avec $\deg(P_n) = n$) normalisée en demandant que les P_n soient unitaires.

b) Calculer P_0, P_1 et P_2.

3) On pose
$$Q_n(X) = \frac{1}{X^a e^{-X}} \frac{d^n}{dX^n}(X^{n+a}e^{-X}) \ .$$

a) Montrer que $Q_n(X)$ est un polynôme en X de degré exactement égal à n.

b) Soit R un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$, qu'on écrira sous la forme $R(X) = rX^{n+1} + sX^n + \cdots$ pour certaines constantes r et s. Par intégrations par parties, calculer le produit scalaire $< Q_n, R >$ en fonction de r et de s, et en déduire en particulier que $< Q_n, R >= 0$ si R est de degré strictement inférieur à n, c'est à dire si $r = s = 0$.

c) En déduire qu'il existe une constante c_n telle que $P_n(X) = c_n Q_n(X)$, et calculer la constante c_n (on rappelle que les P_n sont choisis unitaires).

4) Calculer explicitement les coefficients du polynôme $P_n(X)$.

5) a) En utilisant le calcul fait à la question 3b), calculer les valeurs de $u_n =< P_n, XP_n >$ et de $v_n =< P_n, P_n >$.

b) On rappelle que toute famille de polynômes orthogonaux unitaires P_n vérifie une récurrence du type
$$P_{n+1}(X) = (X + a_n)P_n(X) + b_n P_{n-1}(X)$$
avec
$$a_n = -\frac{< P_n, XP_n >}{< P_n, P_n >} \quad \text{et} \quad b_n = -\frac{< P_n, P_n >}{< P_{n-1}, P_{n-1} >} \ .$$
Calculer explicitement grâce à ce qui précède la récurrence satisfaite par nos polynômes P_n.

Exercice II (6 points)

Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

1) En calculant uniquement la matrice diagonale D à coefficients positifs ou nuls intervenant dans une décomposition en valeurs singulières $A = UDV^t$, calculer la norme de A, égale à sa plus grande valeur singulière.

2) On prend pour toute la suite $a = 2$. Calculer une décomposition en valeurs singulières complète de A, c'est à dire non seulement la matrice diagonale D, mais également les matrices orthogonales U et V.

3) En utilisant la SVD trouvée à la question précédente, calculer le pseudoinverse $A^\dagger$ de A.

Exercice III (4 points)

On pose $\omega = (1 + i\sqrt{7})/2$.

1) Question préliminaire. Calculer rapidement ω^2 et le conjugué $\overline{\omega}$ comme combinaison linéaire à coefficients entiers de ω et de 1.

2) On pose $K = \{a + b\omega/\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ et $A = \{a + b\omega/\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer rapidement, *mais soigneusement* que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et que A est un sous-anneau de K.

3) Pour $\alpha = a + b\omega \in K$, on pose $\phi(\alpha) = \alpha\overline{\alpha}$, c'est à dire le carré du module de α. Calculer $\phi(\alpha)$ en fonction de a et de b, puis montrer que l'on a aussi

$$\phi(\alpha) = 2(b + a/4)^2 + 7a^2/8\ .$$

4) Pour $\alpha = a + b\omega \in K$, soit u l'entier le plus proche de a, et une fois u choisi ainsi, soit v l'entier le plus proche de $b + (a - u)/4$. En utilisant la question précédente, montrer que $\phi(\alpha - (u + v\omega)) \leq 23/32$, et donc en particulier est strictement plus petit que 1.

5) En déduire que l'anneau A est un anneau Euclidien. Indication : si x et y appartiennent à A avec $y \neq 0$, considerer $\alpha = x/y \in K$ et poser $q = u + v\omega$ et $r = y(x/y - q) = x - qy$, où u et v sont comme dans la question précédente.

Remarque : exactement le même exercice peut être fait avec $\omega = (1 + i\sqrt{3})/2$ et $\omega = (1 + i\sqrt{11})/2$.