UFR de Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux I

Année 2000–2001

Licence de Mathématiques et Informatique

Module d'Algorithmique Arithmétique

Session de septembre 2001

Durée 3 heures

Documents interdits. Le barème (donné sur 20 points) n'est qu'indicatif.

Exercice I (10 points)

Pour deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on pose

$$< P, Q >= P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(x)Q'(x)\,dx\ ,$$

où $P'(x)$ et $Q'(x)$ désignent les dérivées de P et Q.

1) Démontrer **avec soin** que $< P, Q >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On notera $P_n(X)$ la famille de polynômes orthogonaux pour ce produit scalaire (avec $\deg(P_n) = n$) normalisés en demandant que les P_n soient unitaires.

2) En appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram–Schmidt à $(1, X, X^2, X^3)$, calculer explicitement $P_0(X)$, $P_1(X)$, $P_2(X)$ et $P_3(X)$.

3) Pour $n \geq 0$, on pose

$$Q_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}\left((X(1-X))^{n+1}\right)\ .$$

a) Démontrer que $Q_n(X)$ est un polynôme en X, et préciser son degré et son terme constant $Q_n(0)$.

b) Par des intégrations par parties successives, montrer que pour tout polynôme $A(X)$ de degré au plus égal à $n+1$, on a $< Q_n, A >= 0$.

c) En déduire qu'il existe une famille de constantes c_n telles que pour $n \geq 2$ on ait $P_n(X) = c_n Q_{n-2}(X)$, où $P_n(X)$ sont les polynômes orthogonaux normalisés comme ci-dessus (les polynômes $P_0(X)$ et $P_1(X)$ ont été calculés à la question (2)).

d) Calculer la constante c_n en calculant explicitement le coefficient dominant de Q_n.

4) On rappelle que toute famille de polynômes orthogonaux, et en particulier la famille $P_n(X)$, vérifie une récurrence du type

$$P_{n+1}(X) = (u_n X + v_n)P_n(X) + w_n P_{n-1}(X)$$

pour certaines suites u_n, v_n et w_n.

a) Expliquer (en une ligne) pourquoi $u_n = 1$.

b) En développant $(1-X)^{n+1}$ par la formule du binôme, calculer explicitement tous les coefficients du polynôme $Q_n(X)$, puis les coefficients du polynôme $P_n(X)$.

c) Ecrivons $P_n(X) = X^n + a_n X^{n-1} + b_n X^{n-2} + \cdots$. En identifiant les coefficients de X^n et de X^{n-1}, exprimer v_n et w_n en fonction de a_n et b_n.

d) En déduire les valeurs explicites de v_n et w_n.

Exercice II (5 points)

1) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} .$$

a) Trouver une décomposition en valeur singulière (SVD) de A sous la forme $A = UDV^t$ avec U et V orthogonale et D diagonale.

b) On rappelle que la norme d'une matrice carrée est égale à sa plus grande valeur singulière. En déduire la norme de A.

2) Calculer le pseudoinverse $A^\dagger$ de A.

Exercice III (5 points)

On pose $\omega = (1 + i\sqrt{11})/2$.

1) Question préliminaire. Calculer rapidement ω^2 et le conjugué $\overline{\omega}$ comme combinaison linéaire à coefficients entiers de ω et de 1.

2) On pose $K = \{a + b\omega /\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ et $A = \{a + b\omega /\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer rapidement, *mais soigneusement* que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et que A est un sous-anneau de K.

3) Pour $\alpha = a + b\omega \in K$, on pose $\phi(\alpha) = \alpha\overline{\alpha}$, c'est à dire le carré du module de α. Calculer $\phi(\alpha)$ en fonction de a et de b, puis montrer que l'on a aussi

$$\phi(\alpha) = 3(b + a/6)^2 + 11a^2/12 .$$

4) Pour $\alpha = a + b\omega \in K$, soit u l'entier le plus proche de a, et une fois u choisi ainsi, soit v l'entier le plus proche de $b + (a-u)/6$. En utilisant la question précédente, montrer que $\phi(\alpha - (u + v\omega)) \leq 47/48$, et donc en particulier est strictement plus petit que 1.

5) En déduire que l'anneau A est un anneau Euclidien. Indication : si x et y appartiennent à A avec $y \neq 0$, considerer $\alpha = x/y \in K$ et poser $q = u + v\omega$ et $r = y(x/y - q) = x - qy$, où u et v sont comme dans la question précédente.