

Autour des techniques de remaillage local pour les maillages en tétraèdres

Cécile Dobrzynski

Institut de Mathématiques de Bordeaux

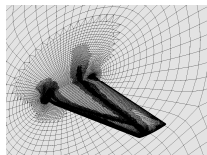
projet ScAlApplix / INRIA Bordeaux - Sud-Ouest

15/01/2008

Introduction : (i) Génération de maillage 3d

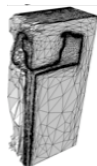
- Différentes approches en 3d :
 - raffinement/déraffinement

[R. Biswas, Y. Kallinderis,
R. Löhner, D.J. Mavriplis,
R.D. Rausch, M.S. Shephard]



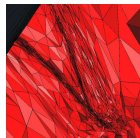
- remaillage local

[T. Coupez, C.C. Pain,
X. Li, A. Tam, CD-PF]



- remaillage global

- méthodes frontales
[R. Löhner, J. Peraire]
- octree modifié [M.S. Shephard]
- méthodes de Delaunay
[T. Baker, P-L. George]



Introduction : (ii) Maillages répondant à des prérequis

Définition : une **métrique** \mathcal{M} est une matrice symétrique définie positive :

$$\mathcal{M} = (a_{ij}(x)) \in \mathcal{M}_3(\mathcal{R}), a_{ii}(x) > 0 \text{ et } \det(\mathcal{M}) > 0$$

une telle matrice \mathcal{M} peut se décomposer comme :

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}$$

Définition : le **produit scalaire** est défini par :

$$\forall u, v \in \mathcal{R}^d, \quad \langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = \langle u, \mathcal{M}v \rangle = {}^t u \mathcal{M} v \in \mathcal{R}.$$

et la **longueur** de u est :

$$\ell_{\mathcal{M}}(u) = \|u\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{\langle u, \mathcal{M}u \rangle}.$$

Plan

Méthodes de remaillage local

- L'insertion de points par Delaunay

- Les opérateurs de modifications locales

- Algorithme de remaillage

Applications des méthodes de remaillage local

- Adaptation de maillages pour les problèmes d'aérodynamique

- Maillage parallèle

- Déplacement de corps rigides

Conclusion et perspectives

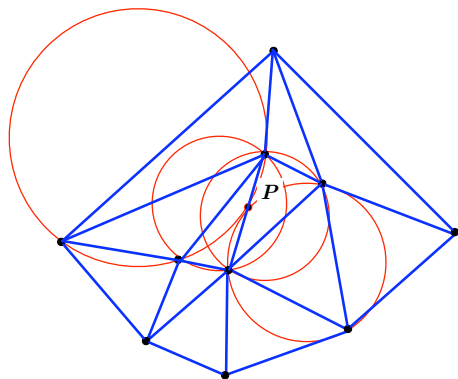
Triangulation de Delaunay :

- \mathcal{T} est un maillage de Delaunay ssi

$$\forall (K, K') \in \mathcal{T}, K = \text{adj}(K') \quad \mathcal{B}(K) \cap \mathcal{V}(K') = \emptyset$$

- mesure de Delaunay et cavité :

$$\alpha(K, P) = \frac{d(P, O_K)}{r_K} \quad K \in \mathcal{C}_P \text{ ssi } \alpha(K, P) \leq 1.$$



Triangulation \mathcal{T}_n

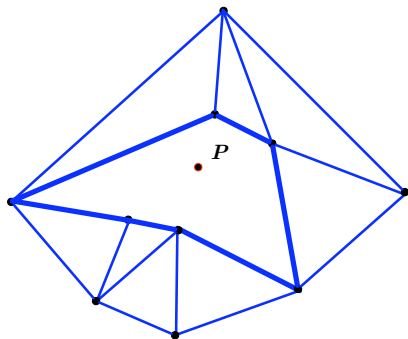
Triangulation de Delaunay :

- \mathcal{T} est un maillage de Delaunay ssi

$$\forall (K, K') \in \mathcal{T}, K = \text{adj}(K') \quad \mathcal{B}(K) \cap \mathcal{V}(K') = \emptyset$$

- mesure de Delaunay et cavité :

$$\alpha(K, P) = \frac{d(P, O_K)}{r_K} \quad K \in \mathcal{C}_P \text{ ssi } \alpha(K, P) \leq 1.$$



$\mathcal{T}_n - \mathcal{C}_n$

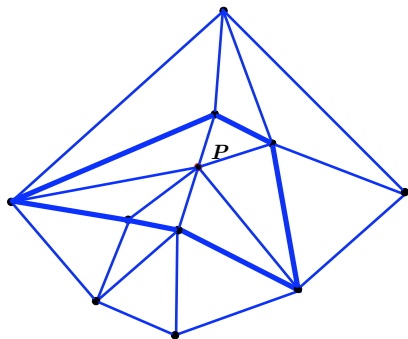
Triangulation de Delaunay :

- \mathcal{T} est un maillage de Delaunay ssi

$$\forall (K, K') \in \mathcal{T}, K = \text{adj}(K') \quad \mathcal{B}(K) \cap \mathcal{V}(K') = \emptyset$$

- mesure de Delaunay et cavité :

$$\alpha(K, P) = \frac{d(P, O_K)}{r_K} \quad K \in \mathcal{C}_P \text{ ssi } \alpha(K, P) \leq 1.$$



$$\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n - \mathcal{C}_n \cup \mathcal{B}_{n+1}$$

Triangulation de Delaunay :

- \mathcal{T} est un maillage de Delaunay ssi

$$\forall (K, K') \in \mathcal{T}, K = \text{adj}(K') \quad \mathcal{B}(K) \cap \mathcal{V}(K') = \emptyset$$

- mesure de Delaunay et cavité :

$$\alpha(K, P) = \frac{d(P, O_K)}{r_K} \quad K \in \mathcal{C}_P \text{ ssi } \alpha(K, P) \leq 1.$$

- extension de la cavité au cas anisotrope :

$$\alpha(K, P)_{\mathcal{M}} = \frac{\ell_{\mathcal{M}}(P, O_K)}{r_K}.$$

Noyau de Delaunay : cas anisotrope

- On utilise le même algorithme que dans le cas classique.
- Il y a plusieurs façons de définir la cavité :

$$\textcircled{1} \quad \alpha(K, P)_{\mathcal{M}(P)} \leq 1,$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha(K, P)_{\mathcal{M}(P)} + \sum_{i=1}^4 \alpha(K, P)_{\mathcal{M}(P_i)} \leq 5,$$

$$\textcircled{3} \quad \alpha(K, P)_{\mathcal{M}(P)} + \sum_{i=1}^4 \omega_i \alpha(K, P)_{\mathcal{M}(P_i)} \leq 1 + \sum_{i=1}^4 \omega_i.$$

- Etoilement de la cavité + connexité :
⇒ procédure de correction de la cavité.

Opérateurs de modifications locales : suppression d'un point

- Il s'agit de réduire une arête AB en un point C .

Trois possibilités :

- ➊ prendre $C = A$,
 - ➋ prendre $C = B$,
 - ➌ trouver un point C entre A et B .
-
- Cette opération est appliquée si :
 - ➊ la boule du point résultant est valide,
 - ➋ la suppression du point ne crée pas de trop longues arêtes.

Opérateurs de modifications locales : retournement d'arêtes

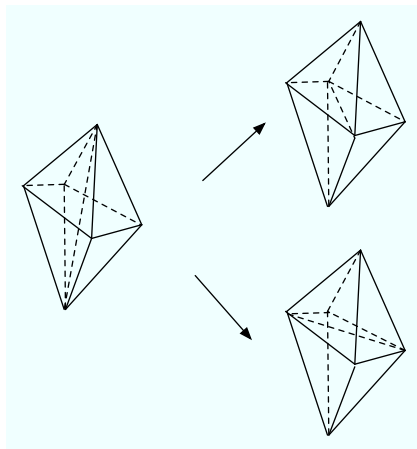


Figure: Exemple de retournement d'arête.

Opérateurs de modifications locales : retournement d'arêtes

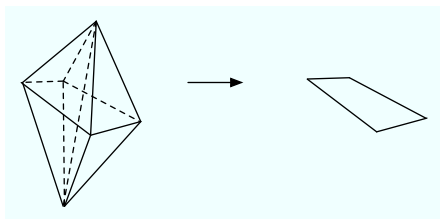


Figure: Coquilles d'arête et "pseudo" polygones associés.

- Nombre de triangulation possible (coquille de $n + 1$ éléments) :

$$Cat(n) = \frac{(2n - 2)!}{n!(n - 1)!},$$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N_n	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862

Table: Nombre de configurations possibles en fonction de la taille de la coquille d'une arête.

Opérateurs de modifications locales : bougé de point

- On veut une nouvelle position P' pour le point P tel que :
 - tous les tétraèdres contenant le point P' aient une meilleure qualité que le plus mauvais des tétraèdres contenant P ,
 - toutes les arêtes issues du point P' soient de longueurs admissibles.
- Détermination de la position optimale :

Pour chaque tétraèdre i contenu dans la boule du point P , la position optimale P_i^{opt} est :

$$P_i^{opt} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \left(P + \frac{\overrightarrow{PP_j}}{l(PP_j)} \right) \quad (1)$$

P' est déterminé *via* une méthode de relaxation comme étant le barycentre de tous les P_i^{opt} calculés :

$$P' = (1 - \omega)P + \omega \left(\frac{1}{n_b} \sum_{i=1, \dots, n_b} P_i^{opt} \right). \quad (2)$$

où ω est un paramètre de relaxation compris entre 0 et 1.

Algorithme de remaillage

Algorithme d'optimisation basé sur :

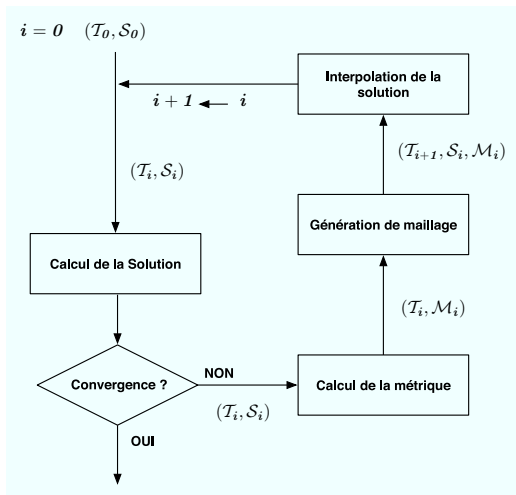
- ① l'analyse des longueurs (insertion, suppression),
- ② la qualité des éléments (bascules, bougés).

Avantages pour l'adaptation :

- ① maillage toujours valide,
- ② un seul maillage en mémoire,
- ③ le nombre de modifications décroît à mesure que le nombre d'adaptations augmente (cas stationnaire),
- ④ traitement des problèmes à frontières mobiles.

Adaptation de maillages : (i) concept

But : calculer une solution précise avec un nombre minimal de degrés de liberté (\Rightarrow réduction du temps CPU).



Adaptation de maillages : (ii) estimateur

- A partir d'un développement de Taylor avec reste intégral, on obtient :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty, K} \leq \frac{9}{32} \max_{x \in K} \max_{\vec{e} \in E_K} \langle \vec{e}, |H_u(x)| \vec{e} \rangle,$$

où $|H_u| = \mathcal{R} |\Lambda| \mathcal{R}^{-1}$ avec $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_i|)$.

- En pratique, cet estimateur n'est pas facile à évaluer, donc on définit un tenseur de métrique tel que :

$$\max_{x \in K} \langle \vec{e}, |H_u(x)| \vec{e} \rangle \leq \langle \vec{e}, \mathcal{M}(K) \vec{e} \rangle$$

- on peut définir une erreur relative :

$$\left\| \frac{u - \Pi_h u}{u} \right\|_{\infty, K} \leq c \max_{\vec{e} \in E_K} \langle \vec{e}, \frac{\mathcal{M}(K)}{u} \vec{e} \rangle,$$

Adaptation de maillage : (iii) tenseur de métrique

- soit ε un seuil d'erreur, chaque arête e doit vérifier l'égalité :

$$\varepsilon = c \langle \vec{e}, \mathcal{M}(K)\vec{e} \rangle, \forall e \in E_K \Rightarrow \langle \vec{e}, |\widetilde{\mathcal{M}}(K)|\vec{e} \rangle = 1$$

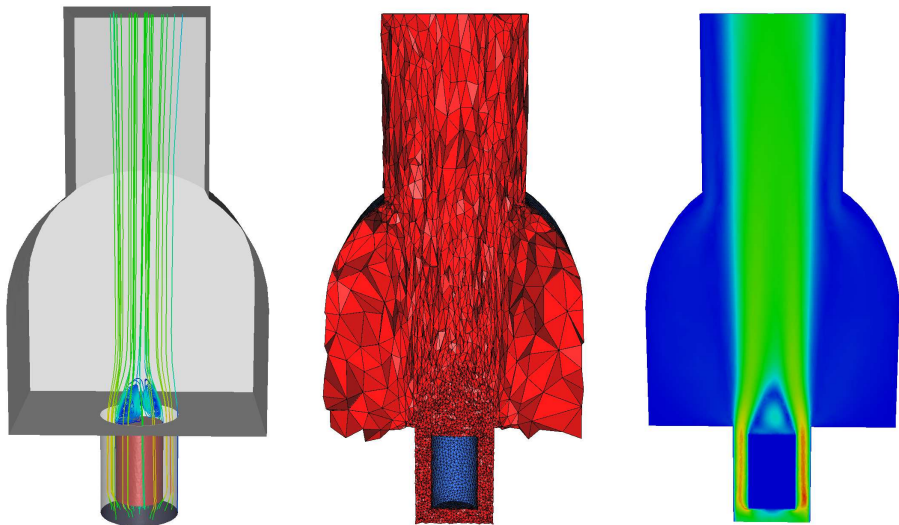
\Rightarrow construction d'un maillage *unité*.

- soient h_{min} et h_{max} longueurs d'arête minimale et maximale, on définit un tenseur de métrique \mathcal{M} comme suit :

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_3 \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}$$

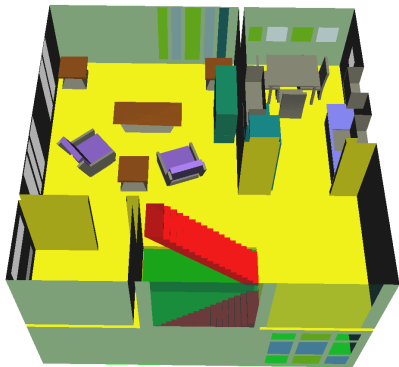
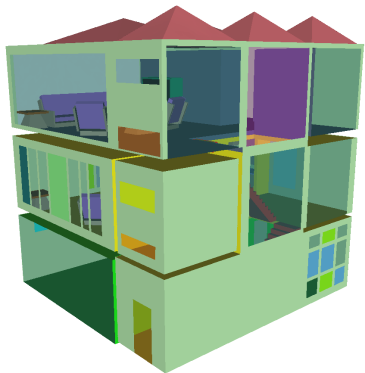
avec $\tilde{\lambda}_i = \min\left(\max\left(\frac{|\lambda_i|c}{\varepsilon}, \frac{1}{h_{max}^2}\right), \frac{1}{h_{min}^2}\right)$

Simulation CEA



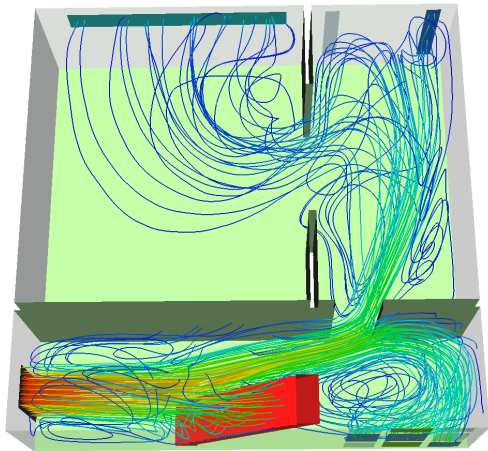
Adaptation de maillage anisotrope utilisant des modifications locales
(31e adaptation).

Simulation maison



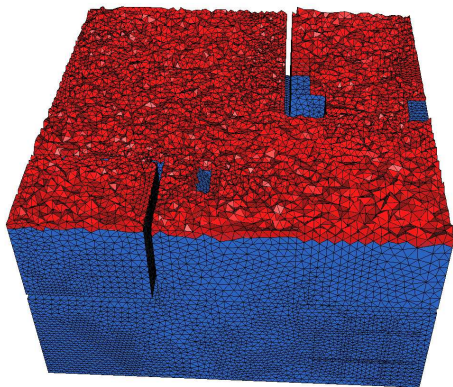
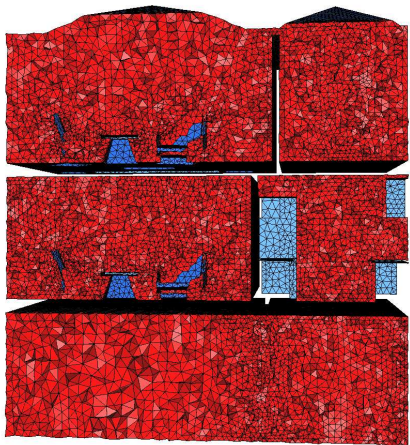
Simulation de climatisation dans une maison meublée :
géométrie.

Simulation maison



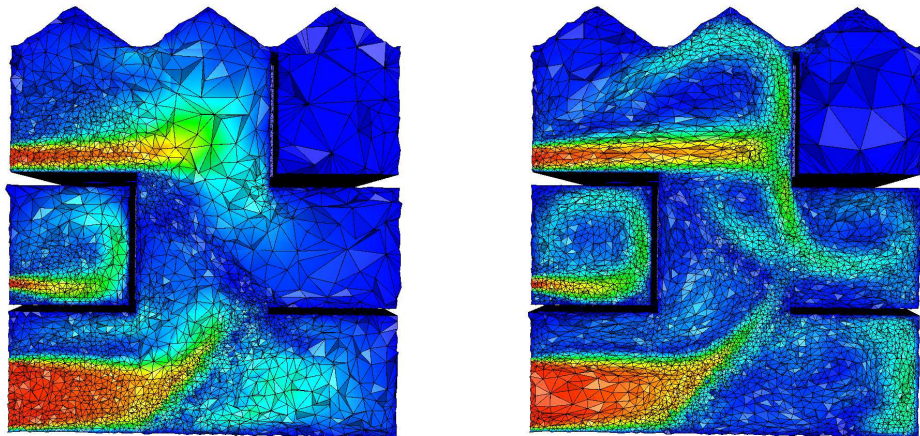
Simulation de climatisation dans une maison meublée :
lignes de courant de l'écoulement.

Simulation maison



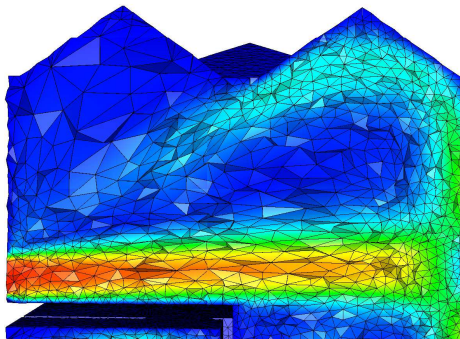
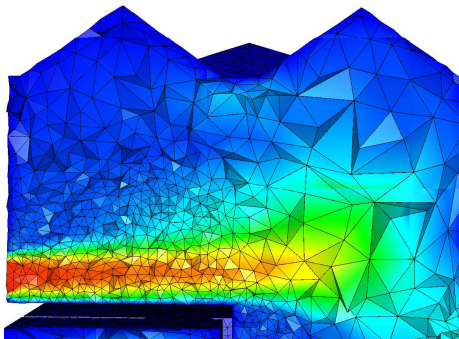
Simulation de climatisation dans une maison meublée :
géométrie.

Simulation maison



Simulation de climatisation dans une maison meublée :
coupe volumique au temps $t = 2$ et $t = 26$ sec.

Simulation maison



Simulation de climatisation dans une maison meublée :
Coupe volumique au temps $t = 2$ et $t = 26$ sec (Zoom).

Simulation maison : caractéristiques de la simulation

	Maillage initial	Maillage adapté
nb de points	351 441	202 741
nb de tetras	1 915 548	990 700
ratio aniso prescrits : max		14
ratio aniso obtenus : max		13,84
ind. eff.		0,8441
$0.71 < \ell < 1.41$		87%
$Q < 3$		96,92%
Q moy		1,61
temps maillage		5 min sur 1 proc.
temps solveurs		15 h sur 8 proc.

Adaptation de maillage en parallèle : (i) introduction

- **Motivations :**

- traitement de maillages volumineux
⇒ place mémoire requise énorme
- couplage avec des solveurs parallèles
- rapidité de remaillage

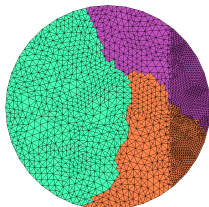
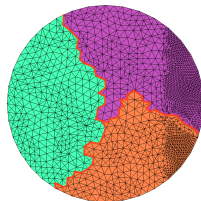
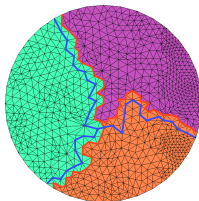
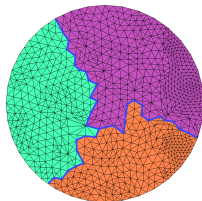
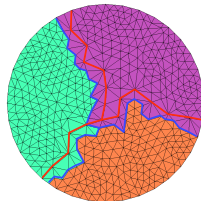
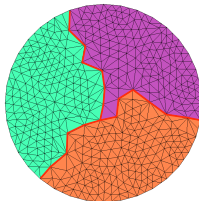
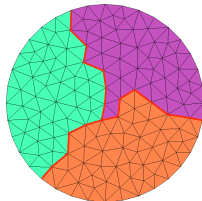
- **Difficultés :**

- gestion des interfaces
- répartition des charges
- critère d'arrêt

- **Idées :**

- interfaces "mobiles"
- remailleur séquentiel

Adaptation de maillage en parallèle : (ii) algorithme

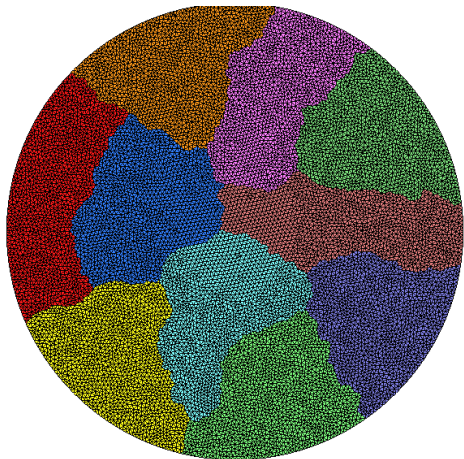


Adaptation de maillage en parallèle : exemple 2d

Capture de deux spirales d'Archimède

	nb points	nb triangles
init.	12 705	25 016
adapt.	745 000	1 490 000

nproc	CPU	migr.
1	199	-
2	146	29
4	85	18
8	53	9
16	43	5
32	36	3

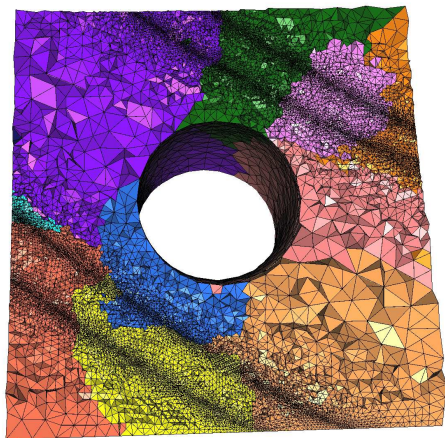


Adaptation de maillage en parallèle : exemple 3d

Portions de spirales d'Archimède

	nb points	nb tetras
init.	2992	16 653
adapt.	430 000	2 500 000

nproc	CPU	migr.
1	1297	-
2	386	147
4	244	143
8	202	114
16	179	106
32	144	72



Applications aux mouvements de corps rigides

- **Données** : déplacement v_0 prescrit en tous points d'une frontière Γ_m .

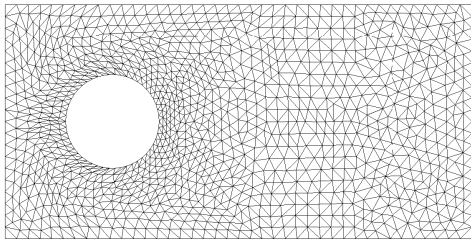
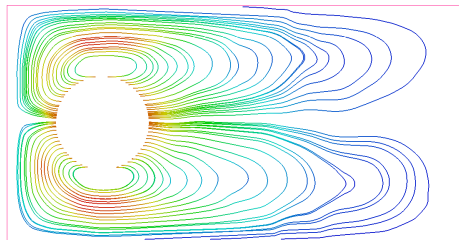
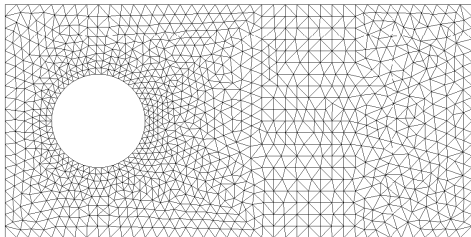


- **But** : obtenir un maillage de bonne qualité dans lequel les points de la surface auront bougé.
- **Méthode** : propagation du déplacement dans le volume pour aider au déplacement de l'objet.

Propagation du déplacement : élasticité linéaire

$$\begin{cases} \lambda \Delta v + \mu \nabla(\nabla \cdot v) = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = v_0 & \text{sur } \Gamma_m \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_f \end{cases}$$

avec λ et μ les coefficients de Lamé,

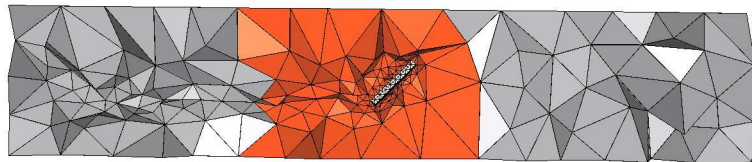


Déplacement de corps rigides : algorithme



- i) propagation du déplacement dans le domaine :
résolution d'une équation d'élasticité linéaire,
élément finis P^1 .
- ii) déplacement du maillage,
- iii) optimisation du maillage volumique, 2 choix :
 - en gardant constant le nombre de points :
⇒ retournement d'arêtes, bougés de points,
 - avec adaptation de maillage :
⇒ tous les outils de remaillage.

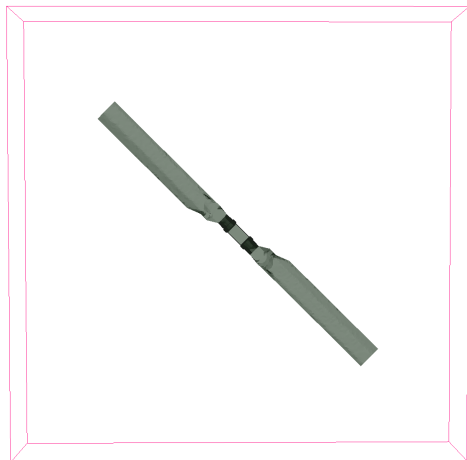
Exemple 1 : mouvement d'une plaque (nb points constant).



angle de rotation : 45° vecteur de translation : $(0; 0.1; 0)$

	initial	23e bougé	67e bougé	203e bougé
nb de points	1418	1418	1418	1418
nb de tetras	5692	5628	5627	5677
$1 < Q < 3$	99.27%	93.31%	92.09%	93.50%
Q moy.	1.57	1.83	1.83	1.82
Q pire	4.32	8.43	7.81	8.23
CPU maill.		0.83 s	0.80 s	0.77 s

Exemple 2 : rotation d'une pale d'hélicoptère.

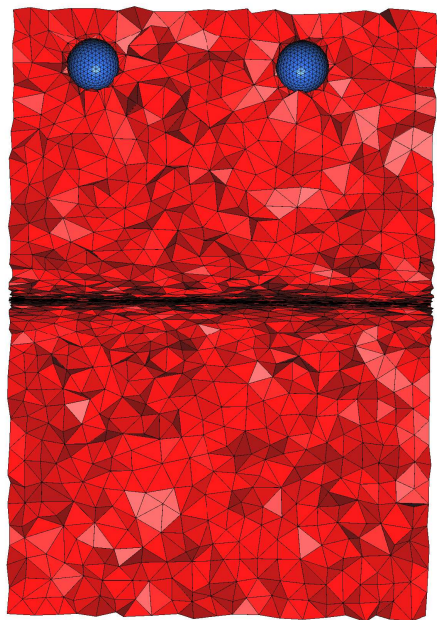


angle de rotation : 1°

	initial
nb de points	69 891
nb de tetras	380 827
$1 < Q < 3$	97.28%
Q moy.	1.37
Q pire	30.6

	360e	720e
nb de points	69 891	69 891
nb de tetras	379 112	380 093
$1 < Q < 3$	97.61%	98.06%
Q moy.	1.54	1.48
Q pire	39.2	33.7

Exemple 3 : déplacement de sphères dans un maillage anisotrope.



	initial	25e bougé
nb de points	12 200	12 189
nb de tetras	60 323	60 283
$1 < Q < 3$	98.53%	98.86%
Q moy.	1.43	1.43
Q pire	5.8	6.7
CPU maill.		1.58 s

34e bougé	100e bougé
12 219	12 438
60 380	61 476
98.59%	98.68%
1.45	1.45
7.6	6.7
2.0 s	1.84 s

Conclusion et perspectives

- **Efficacité et robustesse** des méthodes de construction de maillages anisotropes par modifications locales pour :
 - adaptation de maillages,
 - maillage parallèle,
 - mouvement de corps rigides.
- **Mailleur** :
 - traitement de la surface,
 - amélioration de la qualité des éléments.
- **Maillage parallèle** :
 - répartition des charges,
 - découpage *a priori*.
- **Déplacement d'objet** :
 - meilleure résolution de l'élasticité linéaire,
 - vers la déformation des objets.

Mesure de qualité :

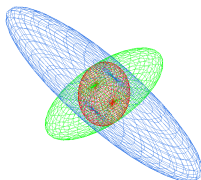
Pour un élément K :

$$Q_K = \beta \frac{\left(\sum_{1 \leq i < j \leq 6} {}^t P_i P_j \mathcal{M}_{moy} P_i P_j \right)^3}{\sqrt{\text{Det}(\mathcal{M}_{moy})} V_K},$$

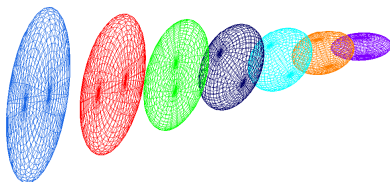
$$Q_K \in [1, +\infty[.$$

Adaptation de maillages : (iv) opérations sur les métriques

- intersecter : $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$



- interpoler : $\mathcal{M}(P) = \left(t \mathcal{M}(A)^{-\frac{1}{k}} + (1-t) \mathcal{M}(B)^{-\frac{1}{k}} \right)^{-k}$



- lisser :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_A &= \mathcal{M}_A \cap \mathcal{M}_B (1 + \alpha l_A(AB))^{-2} \\ \mathcal{M}_B &= \mathcal{M}_B \cap \mathcal{M}_A (1 + \alpha l_B(AB))^{-2} \end{cases}$$