Analyse fonctionnelle TD 2

C. Dossal

Janvier 2012.

1 Densité des polynômes trigonométriques dans l'ensemble des fonctions continues $2\pi-$périodiques.

On considère l'ensemble E des fonctions continues 2π-périodiques à valeurs complexes, le but de cet exercice est de construire une suite d'approximants pour la norme uniforme sous la forme de polynômes trigonométriques.
On considère l'espace F des fonctions continues à valeurs complexes définit sur $\mathbb{U}$, le cercle unité de $\mathbb{C}$: $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$.

1. Enoncer les propriétés que doit vérifier une famille de fonctions pour pouvoir appliquer le théorème de Stone Weierstrass dans le cas complexe.
2. Vérifier que l'espace vectoriel engendré par les fonctions $(z^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie les hypothèse du théorème de Stone Weierstrass dans l'espace F.
3. En déduire que pour toute fonction $g \in F$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite α_n telle que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|g(z) - \sum_{n=-N}^{n} \alpha_n z^n| \leqslant \varepsilon$, c'est à dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|g(e^{it}) - \sum_{n=-N}^{n} \alpha_n e^{int}| \leqslant \varepsilon$.
4. Soit θ la fonction définie par $\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & [0, 2\pi[\\ z & \mapsto & t \text{ tel que } z = e^{it} \end{array}$. A toute fonction f définie sur $[0, 2\pi[$ on associe la fonction $g = f \circ \theta$.
   Montrer que si f est continue sur $[0, 2\pi[$, $g = f \circ \theta$ est continue sur $\mathbb{U}\backslash\{1\}$.
5. En calculant les deux limites suivantes :
$$\lim_{u\to 1, Im(u)\geqslant 0} g(u) \quad \text{et} \quad \lim_{u\to 1, Im(u)<0} g(u)$$
   montrer que si $f \in E$ alors g est continue en 1 et que $g \in F$.
6. En déduire que pour tout $f \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite α_n telle que pour tout $t \in [0, 2\pi[$, $|f(t) - \sum_{n=-N}^{n} \alpha_n e^{int}| \leqslant \varepsilon$.
7. En déduire que les polynômes trigonométriques sont denses dans E.

Nous verrons que le noyau de Fejer permet une construction explicite d'une suite approximante de polynômes trigonométriques.

2 Complétude de l'espace $\ell_p(\mathbb{N})$

Le but de cet exercice est de montrer que l'espace de suites $\ell_p(\mathbb{N})$ est complet.
Pour cela on considère une suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy d'éléments de $\ell_p(\mathbb{N})$.

1. Montrer que la suite $(\|u^n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On note u_k^n le kième terme de la suite u^n.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une valeur u_k. Dans la suite on note u la suite dont le kième terme est u_k.
3. Montrer qu'il existe M tel que pour tout $q \in \mathbb{N}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=1}^{N} |u_k^q|^p \leqslant M$$
4. En déduire que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$.
5. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $q > n_0$, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a
$$\sum_{k=1}^{N} |u_k^q - u_k|^p \leqslant \varepsilon^p.$$
6. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $q > n_0$, $\|u^q - u\|_p \leqslant \varepsilon$. Conclure.

3 Fonctions continues

1. Pour $k \in \mathbb{R}^{+*}$, soit H_k le sous-espace de $C([0,1\})$ défini par :

$$H_k = \{f \in C([0,1]) / |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|\}$$

   On pose $H = \bigcup_{k \in \mathbb{R}^{+*}} H_k$.

   (a) Montrer que $C^1([0,1]) \subset H$ mais que $\sqrt{x} \notin H$.

   (b) Montrer que, pour tout k, H_k est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_\infty$.

   (c) Montrer qu'il existe une suite de fonctions de H qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers $\sqrt{x}$. En déduire que H n'est pas complet pour la norme uniforme.

   (d) On pose $\|f\| = \sup\limits_{x \neq y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} + |f(0)|$.

   Montrer que cette application est une norme sur H et que H est complet pour cette norme.

2. Soit E l'espace des séries convergentes dans $\mathbb{R}$; on pose : $\|u\| = \sup\limits_{n \geq 0} |\sum_{k=1}^{n} u_k|$.

   (a) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E et que E est complet pour cette norme.

   (b) L'espace l_1 des séries absolument convergentes est un sous-espace de E; montrer que les normes $\|.\|$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes (on pourra considérer la suite de terme général $u_k = \frac{(-1)^k}{k}$, $u_k \in E$.

3. Soit E un compact et (f_n) une suite de fonctions de $C(E,E)$ qui converge uniformément vers une fonction f.

   (a) Montrer que si (x_n) est une suite de points qui converge vers x, la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.

   (b) On suppose que pour tout n, f_n admet un point fixe. Montrer que f a un point fixe.

   (c) Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application de K dans K tellle que : $\forall x, y \in K$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$:

   En considérant les fonctions f_n définies sur K par $f_n(x) = \frac{1}{n} f(x_0) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$, $x_0 \in K$, montrer que f a un point fixe.

4. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $f \in E$ telle que $\int_0^1 f(x) x^n dx = 0$, $\forall n \geq 0$.

   Montrer que $f = 0$. On pourra utiliser une suite de polynômes qui converge vers f pour une norme adéquate.

5. Soit f une application continue de E dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe n telle que f^n soit contractante. On note x_0 le point fixe de f^n.

   (a) Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de f^n.

   (b) Montrer que si x est un point fixe de f^n, il en est de même de $f(x)$;

   (c) En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f.