Analyse fonctionnelle TD 3

C. Dossal

Février 2012.

1 Equicontinuité et théorème d'Ascoli.

1. Soit $k > 0$ et $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions de $C^1([0,1])$ telles que $\forall t \in]0,1[$, $|f'(t)| \leq k$.
   (a) Montrer que $\mathscr{F}$ est équicontinue.
   (b) Soit (f_n) une suite d'applications $k-$lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_n(0) = 2$. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite convergente de (f_n).
2. Soit $E = C([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme ∞. On considère la suite de fonctions (f_n) de E définie par : $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \sin\sqrt{x + 4n^2\pi^2}$.
   (a) Montrer que la suite de fonctions (f_n) est équicontinue. En déduire que $A = \{f_n, n \geq 0\}$ est relativement compact dans E.
   (b) La suite de fonctions (f_n) converge t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
3. Soit $H = \{f \in C^1(\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} f^2(x)dx + \int_{\mathbb{R}} f'^2(x)dx \leq 1\}$.
   (a) Soit $f \in H$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle tel que $\int_I |f'(t)|^2 dt \leqslant a$,
   montrer que pour tout $(x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant a\sqrt{x-y}$. On pourra utiliser Cauchy-Schwarz.
   (b) En déduire que $x \in I$ et $x + h \in I$, $f(x+h) \geqslant f(x) - a\sqrt{h}$.
   (c) Soit $f \in H$, justifier que pour tout $a > 0$, il existe x_0 tel que $\int_{t=x_0}^{+\infty} |f'(t)|^2 dt \leqslant a$.
   (d) Soit $x_1 > x_0$ et $l = f(x_1)$. Calculer $\displaystyle\int_{t=0}^{(l/a)^2} (l - a\sqrt{t})^2 dt$.
   (e) En déduire que si $f \in H$, $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.
   (f) Soit $f \in H$, supposons qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) \geqslant l > 0$ et que $\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \leqslant a$.
   – Montrer que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \geqslant \frac{l^4}{3a^2}$.
   – En déduire que si $f \in H$, $\|f\|_\infty \leqslant 3^{1/4}$.
   (g) En utilisant la première question de cet exercice, montrer que H est une famille équicontinue
   (h) Soit $\varphi(x) = (x^2-1)^2 1_{|x|\leq 1}$ et $f_n(x) = \varphi(x-n)$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda f_n \in H$; et qu'on ne peut pas extraire de (f_n) de sous-suites convergentes
4. Convergence du schéma d'Euler explicite.
   Le but de cet exercice est de montrer que le schéma numérique d'approximation d'une équation différentielle appelé *Euler explicite* converge (en un certain sens) vers la solution exacte du problème
   $$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$
   sous certaines hypothèses sur la fonction f. Nous ne démontrons pas l'unicité de la solution.
   Cette démonstration utilise le théorème d'Ascoli.
   Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que
   $$\forall t \in [0,1], \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(t,x)| \leqslant M(1 + |x|)$$
   (a) Fixons un entier naturel non nul n. On définit la suite de points x_j^n, $0 \leqslant j \leqslant n$ par
   $$x_0^n = 0, \qquad \forall 0 \leqslant j \leqslant n-1 \qquad x_{j+1}^n = x_j^n + \frac{1}{n} f(j/n, x_j^n)$$
   Montrer que pour tout $0 \leqslant j \leqslant n$, on a
   $$|x_j^n| \leqslant (1 + M/n)^j - 1$$
   et en déduire que $\forall 0 \leqslant j \leqslant n$, $|x_j^n| \leqslant e^M - 1$.
   On pourra utiliser le fait que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant \ln(1+x)$.

(b) Montrer que pour tout $k > j$,

$$x_k^n - x_j^n = \sum_{l=j}^{k-1} \frac{1}{n} f(l/n, x_l^n).$$

(c) Soit g_n la fonction affine par morceaux sur $[0,1]$ définie par :

$$\forall t \in [j/n], (j+1)/n] \quad g_n(t) = x_j^n + (t - j/n) f(j/n, x_j^n).$$

La fonction g_n est ainsi la fonction affine qui passe par les points $(j/n, x_j^n)$.
Montrer qur pour tout $(t,s) \in [0,1]^2$

$$|g_n(t) - g_n(s)| \leqslant M e^M |t - s|.$$

On en déduit que $\|g_n\|_\infty \leqslant M e^M$.
Indication : On pourra d'abord le montrer dans le cas où t et s appartiennent au même intervalle $[j/n, (j+1)/n]$. Ensuite si on suppose $t \in [j/n, (j+1)/n]$ et $s \in [k/n, (k+1)/n]$ avec $j < k$ on pourra utiliser le fait que

$$g_n(s) - g_n(t) = g_n(s) - g_n(k/n) + g_n(k/n) - g_n((j+1)/n) + g_n((j+1)/n) - g_n(t).$$

(d) En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une fonction $g \in C([0,1])$.

(e) Montrer que g est uniformément continue et que $\|g\|_\infty \leqslant M e^M$.

(f) On définit pour tout $t \in [0,1]$

$$G_n(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{[j/n,(j+1)/n[}(t) f(j/n, g_n(j/n)),$$

où $\chi_{[j/n,(j+1)/n[}$ désigne la fonction indicatrice de $[j/n, (j+1)/n[$. Montrer que

$$\forall t \in [0,1], \quad g_n(t) = \int_0^t G_n(s) ds.$$

(g) Justifier le fait que f est uniformément continue sur $[0,1] \times [-Me^M, Me^M]$.

(h) Pour $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ on note j l'entier tel que $j \leqslant n$ tel que $j/n \leqslant t < (j+1)/n$. On a en particulier $|t - j/n| < 1/n$. Soit $\varepsilon > 0$.
– Montrer qu'il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant k_1$ et $\forall t \in [0,1]$,

$$|f\left((j/n_k), g_{n_k}(j/n_k)\right) - f(t, g_{n_k}(j/n_k))| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

– Montrer qu'il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant k_2$ et $\forall t \in [0,1]$,

$$|f\left(t, g_{n_k}(j/n_k)\right) - f(t, g(j/n_k))| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

– Montrer qu'il existe $k_3 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant k_3$ et $\forall t \in [0,1]$,

$$|f(t, g(j/n_k)) - f(t, g(t))| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

(i) Montrer que la sous suite $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $t \mapsto f(t, g(t))$.

(j) Montrer que la suite $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $t \to \int_{s=0}^t f(s, g(s)) ds$.

(k) En déduire que g est de classe C^1 sur $[0,1]$ et vérifie l'équation différentielle

$$\forall t \in [0,1] \quad g'(t) = f(t, g(t)), \; g(0) = 0.$$