ANNÉE : 2012/2013
SESSION D'AVRIL 2013

Licence de mathématiques, parcours ingénierie mathématique

$3^{ème}$ année

Master de mathématiques, spécialité enseignement des mathématiques

$1^{ère}$ année

UE K1MAPW21
Analyse numérique

(Durée : 3 heures)
Aucun matériel électronique n'est autorisé
Aucun document n'est autorisé

– **EXERCICE 1**

Sur l'intervalle $[-1, 1]$, on définit le polynôme de Tchebycheff

$$T_n(x) = cos(n\,arccos\,x).$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) - T_n(x).$$

   On pourra utiliser une formule de trigonométrie pour évaluer $T_{n+2}(x)+T_n(x)$ ou faire une double récurrence.
2. Calculer T_0, T_1, T_2 et T_3.
3. Quel est le degré de T_n et son coefficient du monôme de plus haut degré ?
4. Exprimer les monômes 1, x, x^2 et x^3 en fonction des premiers T_n.
5. Calculer le produit scalaire $(T_n, T_l)_\omega$ dans $L^2_\omega(-1, 1)$ pour $\omega = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
6. Quel est le polynôme $\overline{p_2} \in \mathbb{P}_2$ de meilleure approximation de $f(x) = x^3 - x^2 - 1/4x + 1/4$? Comment évolue l'erreur ?
7. Mêmes questions pour $f(x) = |x|$.

.../...

– **EXERCICE 2**

Soient T un nombre réel positif et $f \in \mathcal{C}^\infty([0,T] \times \mathbb{R})$, on veut résoudre le problème de Cauchy

$$(\mathcal{C}) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{array} \right.$$

On suppose que f est L-lipschitzienne en y et on introduit la méthode définie par

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n) \ ; \ t_{n+1} = t_n + h_n.$$

1. Déterminer $\phi(t_n, y_n, h_n)$ pour la méthode d'Euler. Montrer que la méthode est consistante et stable. Qu'en déduisez-vous ?
2. Soit $\phi(t_n, y_n, h_n) = f(t_n, y_n) + \frac{h_n}{2} g(t_n, y_n)$
   avec $g(t_n, y_n) = \partial_t f(t_n, y_n) + f(t_n, y_n) \partial_y f(t_n, y_n)$.
   Etudier la consistance de la méthode résultante.
3. Donner une condition suffisante sur g pour que le schéma soit convergent.
4. Construire une méthode d'ordre 3. Comment faut-il procéder pour obtenir une méthode d'ordre p, $p \in \mathbb{N}$?
5. On pose maintenant $\phi(t_n, y_n, h_n) = f(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n))$.
   Etudier la consistance, l'ordre et la convergence de la méthode. Quelle est cette méthode ?
6. Appliquer le schéma précédent à

$$(\mathcal{C}) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = y(t) sint, \ t \in (0, \Pi) \\ y(0) = 1. \end{array} \right.$$