Approximation Hilbertienne, Polynômes orthogonaux.

C. Dossal

Février 2014

1 Distance minimale et projection

1. On cherche à déterminer le minimiseur de la fonctionnelle suivante :

$$F(a,b) = \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt. \tag{1}$$

   Montrer que ce minimiseur correspond au carré de la distance dans un espace euclien entre un point x et un espace vectoriel E. On précisera l'espace en question, le produit scalaire ainsi que le point x et l'espace E.

2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Calculer les valeurs optimales de a et b ainsi que le minimiseur de la fonctionnelle F.

2 Propriétés des polynômes orthogonaux

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire quelconque telle que $deg(P_n) = n$. On note λ_n le coefficient de plus haut degré de P_n, λ'_n le coefficient du monôme de degré $n-1$ et $h_n = \|P_n\|_2^2$. Le but de cet exercice est de montrer la suite P_n vérifie la relation de récurrence suivante :

$$P_{n+1}(x) = (a_n x + b_n)P_n(x) - c_n P_{n-1}(x). \tag{2}$$

avec

$$a_n = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}, \quad b_n = a_n\left(\frac{\lambda'_{n+1}}{\lambda_{n+1}} - \frac{\lambda'_n}{\lambda_n}\right), \quad c_n = a_n\left(\frac{\lambda_{n-1}h_n}{\lambda_n h_{n-1}}\right). \tag{3}$$

1. Justifier l'existence de réels $\mu_{n,j}$ tels que

$$(a_n x + b_n)P_n(x) - P_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_{n,j} P_j(x). \tag{4}$$

2. En effectuant un produit scalaire avec P_i dans l'égalité précédente, montrer que $\mu_{n,i} = 0$ si $i \leqslant n-2$ et en déduire la valeur de c_n.
3. Si le produit scalaire est défini de la manière suivante :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{t\in I} f(t)g(t)w(t)dt \tag{5}$$

   où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et w une fonction strictement positive sur I, montrer que les polynômes P_n admettent n racines distincts sur I.

3 Polynômes de Legendre.

On définit le $n$ième polynôme de Legendre par

$$l_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\frac{(x^2-1)^n}{2^n n!} \tag{6}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $deg(l_n) = n$ et déterminer son coefficient λ_n de plus haut degré.
2. Déterminer la parité de l_n.
3. En remarquant que $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ et en utilisant la formule de Leibniz de la dérivation d'un produit :
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)} g^{(n-k)} \tag{7}$$
déterminer la valeur de $l_n(1)$.
4. Sur l'ensemble des fonctions polynômes on définit le produit scalaire suivant :
$$\langle P, Q\rangle = \int_{t=-1}^{1} P(t)Q(t)dt. \tag{8}$$
En effectuant $m+1$ intégrations par parties on peut montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $m < n$, $\langle l_n, x^m\rangle = 0$ (ce qu'on admettra).
En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, la famille $(l_k)_{k\leqslant n}$ forme une base orthogonale de l'espace des polynômes $\mathbb{R}_n[x]$ pour ce produit scalaire.
5. Déterminer la valeur de $\langle l'_{n+1}, l_n\rangle$. En déduire celle de $\langle x^n, l_n\rangle$ (on pourra utiliser la valeur de λ_n) et enfin la valeur de $\|l_n\|_2$.
6. En utilisant l'exercice précédent, établir une relation de récurrence entre l_{n+1}, l_n et l_{n-1}.

4 Polynômes de Tchebichev

Pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

1. Calculer T_0 et T_1.
2. Etablir que pour tout $n \geqslant 1$
$$T_{n+1}(x) + T_{n-1} = 2xT_n(x). \tag{9}$$
3. En déduire que T_n est un polynôme de degré n dont on précisera le terme de plus haut degré.
4. Expliciter les racines de T_n ainsi que la valeur de $\max_{[-1,1]} |T(x)|$.
5. Montrer que les polynômes de Tchebichev sont orthogonaux pour le produit scalaire définit sur les polynômes par :
$$\langle f, g\rangle = \int_{t=-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$
6. Montrer que le polynôme T_n est soltuion de l'équation différentielle :
$$(1-x^2)y^{(2)} - xy' + n^2 y = 0. \tag{10}$$

5 Visualisation des polynômes orthogonaux.

1. Expliquer ce que réalise la fonction suivante. A quoi correspondent P et C ? La sauver dans votre espace de travail et afficher les 4 premiers polynômes de Tchebichev :

```
function [P,C]=Tchebi(n,N)
t=-1+2*[0:1/(N-1):1];
T=zeros(n+1,n+1);T(1,1)=1;
if n>0
    T(2,2)=1;
end
if n>1
for k=3:n+1
    T(k,2:n+1)=2*T(k-1,1:n);
    T(k,:)=T(k,:)-T(k-2,:);
end
end
P=T(n+1,:);
C=0*t;
for j=1:n+1
   C=C+P(j)*t.^j;
end
plot(t,C);
```

2. En utilisant la formule de récurrence obtenue sur les polynômes de Legendre écrire une fonction matlab qui construit et affiche les polynômes de Legendre sur l'intervalle $[-1,1]$.

6 Produit scalaire discret.

On considère le produit scalaire discret suivant sur $\mathbb{R}^N$:

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i y_i. \tag{11}$$

où les $(\lambda_i)_{i\leqslant N}$ sont des réels.

1. Que peut on dire sur les réels $(\lambda_i)_{i\leqslant N}$?
   Dans la suite on note Λ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_{N,N}(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \leqslant N$, $\Lambda(i,i) = \lambda_i$.
2. Si on note x et y sous forme de vecteurs colonnes, exprimer $\langle x,y\rangle$ à l'aide un produit matriciel faisant intervenir x, y et Λ. On notera z^t le vecteur transposé de z.
3. Soit $(a_k)_{k\leqslant K}$ une famille libre de vecteurs et $A \in \mathscr{M}_{N,K}$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $(a_k)_{k\leqslant K}$. On note V l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(a_i)_{i\leqslant K}$. Si $y \in \mathbb{R}^K$, que contient le vecteur $A^t\Lambda y$?
4. Quelle est la dimension de la matrice $A^t\Lambda A$? Montrer que cette matrice est inversible.
5. Soit P la matrice définie par
   $$P = A(A^t\Lambda A)^{-1}A^t\Lambda \tag{12}$$
   Quelles sont les dimensions de P ? Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}^N$, $P(y) \in V$.
6. Montrer que pour tout $k \leqslant K$, $\langle a_k, P(y)\rangle = \langle a_k, y\rangle$.
7. En déduire que $y - P(y) \in V^\perp$ et la nature de l'opérateur P.
8. Si on note $Q(y) = (A^t\Lambda A)^{-1}A^t\Lambda y$, on remarque que $P(y) = AQ(y)$. Quel est la dimension de $Q(y)$? Que représente $Q(y)$?
9. Pour calculer la meilleure approximation au sens d'une norme hilbertienne d'une fonction f donnée, il faut être capable de calculer les produits scalaires avec les polynômes orthogonaux associés à la norme hilbertienne. Chacun de ces produits sclalaires nécessite une intégration. Même s'il existe des situations où on peut calculer ces produits scalaires analytiquement, on est souvent amené à estimer ces produits scalaires par des sommes discrètes. On approche alors le produit scalaire par un produit scalaire discret :
   $$\int_I f(t)g(t)dt \approx \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(x_i)g(x_i) \tag{13}$$
   On peut par exemple approcher $\int_0^1 f(t)g(t)dt$ par la somme de Riemann suivante : $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} f(\frac{i}{n})g(\frac{i}{N})$.
   On peut ainsi calculer la solution du premier exercice de manière approchée.
   Expliquer ce que renvoie le script matlab suivant :
   ```
   K=2;
   N=1000;
   a=0;b=1;
   t0=ones(N,1);
   t1=a+(b-a)*[0:1/(N-1):1]';
   A=zeros(N,K);
   Lambda=zeros(N,N);
   A(:,1)=t0;
   for k=2:K
      A(:,k)=A(:,k-1).*t1;
   end
   t2=t1.^2;
   for j=1:N
   Lambda(j,j)=1/N;
   end
   Q=inv(A'*Lambda*A)*(A')*Lambda*t2
   P=A*Q;
   plot(t1,t2);hold on;plot(t1,P,'r')
   ```
10. Ecrire une fonction similaire qui permet d'estimer la projection d'une fonction sur l'espace vectoriel engendré par les k premiers polynomes de Lengendre. A t on réellement besoin de calculer ces polynômes pour les calculer ?
11. Si on veut faire de même avec les polynômes de Tchebichev, que doit on changer dans la fonction ?

7 Polynômes de Hermite.

Les polynômes de Hermite sont les polynômes orthogonaux unitaires associés à la fonction de poids

$$w(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Le produit scalaire qui lui est associé est noté :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx. \tag{15}$$

Il définit sur $C_w(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que l'intégrale

$$\int_{\infty}^{\infty} |f(t)|^2 e^{-x^2} dx \tag{16}$$

est convergente. Les polynômes de Hermite H_n, $n \geqslant 0$, sont les polynômes orthogonaux unitaires relatifs à ce produit scalaire.

1. Montrer que les intégrales $I_n = \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2} dx$ sont absolument convergente et exprimer leur valeur à l'aide de la fonction Gamma.
2. Calculer H_0, H_1 et H_2.
3. Montrer que $\langle H_n', H_m \rangle = 0$ pour tout $m \leqslant n-2$. En déduire que $H_n' = nH_{n-1}$.
4. Etablir la relation de récurrence d'ordre 2 :

$$H_{n+1} = xH_n - \frac{n}{2}H_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{17}$$

5. Montrer que $H_n^{(2)} - 2xH_n' + 2nH_n = 0$.