Exercice 1

En dimension finie tous les sous espaces vectoriels sont convexes et fermés donc la projection est définie

1) Une base orthonormée (BO) de F est formée du vecteur $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$

En utilisant le fait que pour tout $z = (x, y) \in H$

$P_F(z) = \langle z, e_1 \rangle e_1$ on obtient que

$$P_F(z) = \frac{1}{5}(4x + 2y, 2x + y)$$

2) L'image de A est engendré par ses vecteurs colonnes

ici $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 = (1,2,2)$ et $\varepsilon_2 = (2,2,4)$

On peut orthonormaliser cette base par Gram-Schmidt

on obtient $e_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)$ et $e_2 = \frac{1}{6\sqrt{5}}(4,-10,8)$

En utilisant le fait que

$$P_F(z) = \langle z, e_1 \rangle e_1 + \langle z, e_2 \rangle e_2$$

on obtient que

$$P_F(z) = P_F(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{5}(x_1 + 2x_3), x_2, \frac{2}{5}(x_1 + 2x_3)\right)$$

On pouvait aussi remarquer que

$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (0,1,0)$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)$

qui est une BO de $\operatorname{Im}(A)$.

Exercice 1 (Suite)

3) Si on note $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$

$e_0 = (1,0,0,\dots\ )$
$e_1 = (0,1,0,0\dots\ )$
$e_2 = (0,0,1,0\dots\ )$

$F = \mathrm{Vect}(e_k)_{k \text{ impair}} = \mathrm{Vect}(e_{2j+1})_{j\in\mathbb{N}}$

Les vecteurs $(e_{2j+1})_{j\in\mathbb{N}}$ forment une BON de F donc

$\forall x \in H \quad x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \qquad P_F(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{2j+1}\, e_{2j+1}$

car $\langle x, e_{2j+1}\rangle = x_{2j+1}$.

$P_F(x)$ est ainsi la suite où les termes d'indices pairs de la suite ont été mis à 0.

4) Soit $f \in H$, on note $p = f \times \mathbb{1}_{[1/2,1[}$

$p \in F$ par définition de F

$$\|f-p\|^2 = \int_0^1 |f(t)-p(t)|^2\,dt = \int_0^{1/2} |f(t)-p(t)|^2\,dt + \int_{1/2}^1 |f(t)-p(t)|^2\,dt$$
$$= \int_0^{1/2} |f(t)|^2\,dt$$

Soit $q \in F$

$$\|f-q\|^2 = \int_0^1 |f(t)-q(t)|^2\,dt = \int_0^{1/2} |f(t)-q(t)|^2\,dt + \underbrace{\int_{1/2}^1 |f(t)-q(t)|^2\,dt}_{\geq 0}$$

Comme $q\in F$ q est nulle presque partout sur l'intervalle $]0,\frac{1}{2}[$ donc

$$\|f-q\|^2 \geq \int_0^{1/2} |f(t)|^2\,dt = \|f-p\|^2$$

Ce qui démontre que $p = P_F(f)$.

Exercice 2

1) Comme les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille étagée, $\forall m \in \mathbb{N}$, $(P_i)_{i\in[\![0,m]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$

En calculant les termes de degré $n+1$ et n du polynôme $Q_n(x) = (a_n x + b_n)P_n(x) - P_{n+1}(x)$ on observe que Q_n est de degré $\leq n-1$.

Ce polynôme se décompose ainsi dans la base des $(P_j)_{j\in[\![0,n-1]\!]}$ d'où l'existence des $\mu_{n,j}$.

2) Soit $i \in [\![0, n-2]\!]$.

Comme la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale

$$\langle P_i, \sum_{j=0}^{n-1} \mu_{n,j} P_j \rangle = \mu_{n,i} \|h_i\|^2.$$

Pour les mêmes raisons $\langle Q_n, P_i\rangle$ se réduit à l'intégrale suivante :

$$\langle Q_n, P_i \rangle = \int_{t\in I} a_n t P_n(t) P_i(t) w(t)\, dt$$

Soit R le polynôme de degré $i+1 \leq n-1$

$$R : t \longmapsto a_n t P_i(t)$$

$\langle Q_n, P_i \rangle = \langle P_n, R\rangle = 0$ car P_n est orthogonal aux polynômes de degré inférieurs.

En utilisant l'égalité (4) on déduit que $\forall i \in [\![0, n-2]\!]$, $\mu_{n,i} = 0$.

Un autre calcul démontre que $\mu_{n,n-1} = c_n = a_n \left(\frac{\lambda_{n-1} h_n}{\lambda_n h_{n-1}}\right)$

ce qui établit la relation (2).

3) Comme P_0 est un polynôme constant et que $\forall n \geq 1$ $\langle P_n, P_0 \rangle = 0$ on en déduit que $\forall n \geq 1$.

$$\int_{t \in I} P_n(t)\, w(t)\, dt = 0$$

Comme w est strictement positif on en déduit que P_n change de signe sur I et par continuité qu'il admet au moins une racine sur I.

Soit Q le polynôme défini par

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)$$ où (x_i) sont les racines de P incluses dans I de multiplicité impaire.

Par définition de Q, $\forall t \in I$, $P_n(t)\, Q_n(t) \geq 0$ et donc $\langle P_n, Q \rangle > 0$.

Comme P_n est orthogonal aux polynômes de degré inférieur à n on en déduit que Q est de degré au moins n.

4) $T_0 = 1$

$T_1 = x$.

5) $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos((n+1)\arccos x) + \cos((n-1)\arccos x)$

On utilise : $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

et on obtient :

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos(n \arccos x)\cos(\arccos x)$$
$$= 2\, T_n(x)\, x.$$

6) La relation (5) semble indiquer que le coefficient dominant de T_{n+1} vaut 2 fois celui de T_n.

Nous allons donc montrer par récurrence la propriété suivante pour tout $n \geq 1$:

$\mathcal{P}(n)$ = " $\forall k \leq n$, T_k est un polynôme de degré k et le terme de plus haut degré T_n vaut 2^{n-1} ".

Initialisation :

$\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la question 4).

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence $\forall k \leq n$, T_k est un polynôme de degré k. De plus comme

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

T_{n+1} est un polynôme.

$\deg(2x T_n(x)) = n+1$

$\deg(T_{n-1}(x)) = n-1$ donc

$\deg(T_{n+1}) = \max(n+1, n-1) = n+1$.

Comme $\deg(T_{n-1}) = n-1$ et $\deg(T_n) = n$

$T_{n-1}(x) = \lambda_{n-1} x^{n-1} + R_{n-1}(x)$ avec $\deg(R_{n-1}) \leq n-2$

$T_n(x) = \lambda_n x^n + R_n(x)$ avec $\deg(R_n) \leq n-1$

$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) = 2\lambda_n x^{n+1} + U_n(x)$ avec $\deg(U_n) \leq n$

Par hypothèse de récurrence $\lambda_n = 2^{n-1}$ donc

$T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + U_n(x)$

Le terme de plus haut degré de T_{n+1} est ainsi 2^n

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 2 (Suite)

7) $T_n(x)=0 \iff \cos(n \arccos x) = 0$

$\iff n \arccos x \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi]$

$\iff \arccos x \equiv \frac{\pi}{2n} \; [\frac{\pi}{n}]$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$

Comme T_n n'admet que n racines on peut se restreindre à n valeurs de k, or $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \in]0, \pi[$ et la fonction cosinus est injective sur $]0,\pi[$ donc si l et k sont deux éléments de $[\![0, n-1]\!]$ distincts

$x_l = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{l\pi}{n}\right) \neq \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = x_k$.

L'ensemble des racines de T_n est donc

$$\left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right), \; k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Par définition de T_n, $\max_{[-1,1]} |T_n(x)| \leq 1$

De plus $T_n(1) = \cos(n \arccos 1) = \cos(0) = 1$

donc $\max_{[-1,1]} |T_n(x)| = 1$

8) Soit n et m deux entiers naturels distincts.

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{t=-1}^{1} \frac{T_n(t)\,T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{t=-1}^{1} \frac{\cos(n \arccos t)\cos(m \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

On effectue le changement de variable $\theta = \arccos t$

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)\right) d\theta$$

$= 0$ car $n+m \neq 0$ et $n-m \neq 0$.

g)

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

$$T_n'(x) = + \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x)$$

$$T_n''(x) = - \frac{n^2}{(1-x^2)} \cos(n \arccos x) + \frac{nx}{(1-x^2)^{3/2}} \sin(n \arccos x)$$

d'où

$$(1-x^2) T_n''(x) - x T_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$