Année universitaire 2012-2013
Licence 3 de mathématiques
Espaces de Hilbert et analyse de Fourier - Feuille 1

Exercice 1

Posons $E = \mathcal{C}([-1;1];\mathbb{C})$. Pour tout $f \in E$, on note $H(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(-t)\overline{f(t)}\mathrm{d}t$. Vérifier que H est une forme hermitienne sur E. Est-elle positive ?

Exercice 2 : lemme de Blichfeldt

Soient r un réel > 0 et E un espace préhilbertien réel. Pour tout $x \in E$, on pose $\rho(x) = \max\Big(1 - \dfrac{2}{r^2}\|x\|^2; 0\Big)$.

a. Soient n un entier ≥ 1 et $(x_1; \cdots; x_n) \in E^n$. Montrer la relation suivante :

$$n\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 = \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\|^2 + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\|x_j - x_i\|^2 \quad .$$

b. Soient $y_1, \cdots, y_m$ des éléments r-bien espacés de E, *i.e.* pour tout $(i;j) \in \{1;\cdots;m\}^2$ vérifiant $i < j$, on a $\|y_j - y_i\| \geq r$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\rho(y_i) \leq 1$.

Exercice 3 : inégalité de Selberg

Soit E un espace préhilbertien complexe. Fixons n éléments non nuls $e_1, \cdots, e_n$ de E. On pose $L_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\langle e_i; e_k\rangle|$ pour tout $i \in \{1;\cdots;n\}$.

a. Soit $(\lambda_1; \cdots; \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Prouver que $\Big\|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\Big\|^2 \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 L_i$. En déduire la majoration $\Big|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\langle e_k; x\rangle\Big|^2 \leq \|x\|^2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 L_i$ pour tout $x \in E$.

b. Montrer l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{|\langle x; e_k\rangle|^2}{L_k} \leq \|x\|^2$ pour tout $x \in E$.

Exercice 4

On munit $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{C})$ de la norme $\|\ \|$ définie par $\|f\|^2 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|^2\mathrm{d}t$ pour tout $f \in E$. Soit $a \in]0;1[$. Notons $\varphi : E \to \mathbb{C}$ l'application (linéaire) qui à

f associe $\displaystyle\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que φ est continue et calculer sa norme d'opérateur.

b. Existe-t-il $g \in E$ tel que $\varphi(f) = \langle f; g\rangle$ pour tout $f \in E$? (*indication :* on pourra considérer $f \in E$ définie par $f(t) = (a-t)(g(t)-1)$ pour $t \in [0; a]$ et $f(t) = (t-a)g(t)$ pour $t \in [a; 1]$)

Exercice 5

Calculer $\displaystyle\inf_{(a;b;c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 6 : inégalité de Hilbert

a. Montrer la formule $\displaystyle\int_0^1 P(t)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = -\frac{i}{2}\int_0^{2\pi} P(e^{it})e^{it/2}\mathrm{d}t$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

b. En déduire la majoration $\displaystyle\int_0^1 P(t)^2\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2\mathrm{d}t$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

c. Soient n un entier naturel et $(a_0; \cdots; a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer les inégalités suivantes :

$$0 \leq \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k+1/2} \leq \pi \sum_{j=0}^{n} a_j^2 \quad .$$

Exercice 7 : matrice de Gram

Soit E un espace hermitien de dimension n. Soit $(x_1; \cdots; x_n) \in E$. On définit la matrice $G \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par $G = [\langle x_i; x_j\rangle]$.

a. Soit $(e_1; \cdots; e_n)$ une base orthonormée de E. Considérons la matrice $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $x_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_k$ pour tout $i \in \{1; \cdots; n\}$. Exprimer G en fonction de A.

b. En déduire que $\det(G) \geq 0$, et que : $\det(G) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1; \cdots; x_n)$ est liée.

c. Soit $(y_1; \cdots; y_n) \in E^n$. Prouver que la matrice $[\langle x_i; x_j\rangle\langle y_i; y_j\rangle]$ est hermitienne positive.

Exercice 8

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $T : E \to E$ une application linéaire continue. Notons B la boule unité fermée de E. On pose $q(x) = \langle Tx; x\rangle$ pour tout $x \in E$, et $c(T) = \sup_{x \in B} |q(x)|$.

a. Montrer que $c(T) \leq \|T\|$, et que $|q(x)| \leq c(T)\|x\|^2$ pour tout $x \in E$.

On suppose maintenant que $\langle Tx; y\rangle = \langle x; Ty\rangle$ pour tout $(x; y) \in E^2$.

b. Soit $(x; y) \in B^2$. Exprimer $\langle Tx; y\rangle$ en fonction de $q(x+y)$ et $q(x-y)$. En déduire l'inégalité $|\langle Tx; y\rangle| \leq c(T)$.

c. Montrer que $c(T) = \|T\|$.

Exercice 9

Soit $\langle\ ;\ \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{C}[X]$.

a. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(P_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}[X]$ telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} |a_k|^2$ converge. Montrer que la suite $(Q_n)_{n\geq 0}$ définie par $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k P_k$ est une suite de Cauchy.

c. En déduire que $(\mathbb{C}[X]; \langle\ ;\ \rangle)$ n'est pas un espace de Hilbert.