Année universitaire 2013-2014
Licence 3 de mathématiques
Espaces de Hilbert et analyse de Fourier - Feuille 4

Exercice 1

Développper en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

En déduire la somme des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2

Les suites suivantes sont-elles la suite des coefficients de Fourier d'une fonction dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$?

1. $\left(\frac{1}{1+n^2}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$
2. $\left(\frac{1}{\sqrt{1+|n|}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$
3. $\left(\frac{1}{1+|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$

Exercice 3

1. Exprimer les coefficients de Fourier de $f \star g$ en fonction de ceux de f et de g.
2. Si f est C^n et 2π-périodique, exprimer les coefficients de Fourier de $f^{(n)}$ en fonction de ceux de f.
3. Donner la décomposition en série de Fourier de la fonction $f(x) = \cos(5x)$.
4. Montrer que si f est de classe C^k et 2π-périodique, alors on a $c_n(f) = o(\frac{1}{|n|^k})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Soit $f(x) = \cos(4x)$ et $g(x) = \sin(-3x)$, $x \in \mathbb{R}$. Déterminer les coefficients de Fourier de $f \star g$. Que peut-on dire de $f \star g$?

Exercice 5

Soit f la fonction $2\pi-$périodique définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \pi]$ et $f(x) = 0$ si $x \in]\pi, 2\pi[$. Calculer les coefficients de Fourier $\hat{f}(n)$. Déterminer $f \star f$ et ses coefficients de Fourier.

Exercice 6

Soit f une fonction continue 2π-périodique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\|S_{f;n}\|_\infty \leqslant 1$. Montrer que $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

Exercice 7

On sait que $\mathcal{TF} : L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \longrightarrow l^{\infty,0}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}),\ f \longmapsto \left(\hat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ où

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On veut montrer que $\mathcal{TF}$ n'est pas surjective. Soit

$$u_k = \frac{1}{i\log k} \text{ si } k \geqslant 2,\ u_k = -\frac{1}{i\log k} \text{ si } k \leqslant -2 \text{ et } u_k = 0 \text{ sinon.}$$

Supposons qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ tel que $\hat{f}(k) = u_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Posons

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que F est continue et $2\pi-$périodique.
2. Montrer que pour tout k, $|k| \geqslant 2$,
$$\hat{F}(k) = -\frac{1}{|k|\log|k|}.$$
3. Montrer que
$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{N} \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{2 \leqslant |k| \leqslant n} \frac{1}{|k|\log|k|} \right) = -\hat{F}(0).$$
4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{2 \leqslant |k| \leqslant n} \frac{1}{|k|\log|k|} \sim 2\log(\log n), \quad n \longrightarrow +\infty.$
5. Conclure.

Exercice 8

On définit une fonction f impaire et de période 2π par

$$f(t) = 1 \text{ pour } t \in]0, \pi[,\ f(0) = f(\pi) = 0.$$

1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geqslant 0} \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}.$$
2. Pour tout entier $n > 1$, on pose
$$f_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}.$$
   (a) Calculer f_n'. Soit $t_n > 0$ la plus petite valeur telle que $f_n'(t_n) = 0$. Montrer que $t_n = \frac{\pi}{2n+2}$.

   (b) Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} f_n(t_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

(c) Que peut-on dire de la convergence de f_n vers f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, on note $S_n(f)$ les sommes partielles de sa série de Fourier et

$$T_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$$

leurs moyennes arithmétiques (appelée sommes de Fejér).

1. Rappeler l'expression du noyau de Fejér K_N tel que

$$T_N(f) = f \star K_N.$$

2. Montrer que $T_N(f)(x)$ tend vers $f(x)$ si f est continue en x et vers $\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}(f(x-t) + f(x+t))$ si cette limite existe.