Ondelettes et moments nuls

Ch. Dossal

2015

Les capacités d'approximation des bases d'ondelettes reposent sur le nombre de moments nuls de l'ondelettes. On dit qu'une ondelette admet n moments nuls si pour tout entier k entre 0 et $n-1$ on a

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \Psi(x)x^k dx = 0.$$

Si une ondelette a n moments nuls, toutes les ondelettes $\Psi_{j,k}$ sont orthogonales aux fonctions qui sont localement polynomiales sur leur support. Rappelons que si le support de Ψ est de mesure inférieure à L le support de $\Psi_{j,k}$ est de mesure inférieure à $L2^j$.
Par définition une ondelette a toujours un moment nul mais elle peut en avoir plusieurs autres.

1. Comment se traduit $\int_{x\in\mathbb{R}} \Psi(x)x^k dx = 0$ sur la transformée de Fourier de Ψ ?

   Comme $\hat{\Psi}(2\omega) = \hat{g}(\omega)\hat{\Phi}(\omega)$ et comme $\hat{\Phi}(0) \neq 0$ il suit que pour que Ψ admette n moments nuls il faut et il suffit que $\hat{\Phi}$ soit $n-1$ fois dérivable en 0 et que pour tout $k < n$, $(\hat{g})^{(k)}(0) = 0$ ce qui se traduit par $(\hat{h})^{(k)}(\pi) = 0$.
   Or $\hat{h}(\omega)$ est un polynôme trigonométrique i.e à $\hat{h}(\omega) = \sum_n h_n e^{-iwn}$ on peut associer le polynome $P(z) = \sum_n h_n z^n$.

2. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

   (a) $(\hat{h})^{(k)}(\pi) = 0$ pour tout $k < n$

   (b) -1 est une racine d'ordre n de P.

   On peut ainsi chercher un filtre h associé à une ondelette ayant n moments nuls en cherchant les coefficients d'un polynome P vérifiant un certain nombre de conditions.

3. Quel est le nombre de moments nuls de l'ondelette de Haar ?

   Nous allons maintenant chercher à déterminer une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ presque nulle associée à une ondelette ayant 2 moments nuls avec un support de taille 4. Plus précisément on suppose que les seuls coefficients du filtre qui sont non nuls sont h_0, h_1, h_2 et h_3. Pour cela on va utiliser le polynome $P(z) = \sum_{n=0}^{3} h_n z^n$.

4. Justifier que si l'ondelette admet 2 moments nuls alors le polynome $P(z) = \sum_n h_n z^n$ associé vérifie les conditions suivantes:

   (a) Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(z) = a(z + 1)^2(z - b)$,

   (b) $P(1) = \sqrt{2}$ et

   (c) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sum_n h_n h_{n+2k} = 0$.

5. En déduire les valeurs possibles de h. L'ondelette obtenue est appelée ondelette de *Daubechies 4* en référence à la taille de son support. C'est la seule ondelette de support 4 ayant 2 moments nuls.