Université Paris 7 Année 2008/2009
UFR de Mathématiques MT1

COLLE

Suites

△

1. Donner deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
$(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
$(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

2. Étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = e^{-u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Université Paris 7 Année 2008/2009
UFR de Mathématiques MT1

COLLE

Suites

△

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite égale à 3. Montrer que toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.
2. On pose :

$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \middle| u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,\ \forall n\in\mathbb{N} \right\}$$

- Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- Calculer la dimension de E.
- Trouver des suites de E de la forme $u = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $q\in\mathbb{R}$.

Université Paris 7 Année 2008/2009
UFR de Mathématiques MT1

COLLE

Suites

△

1. Montrer que les fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ données par $x\mapsto \cos(x)$ et $x\mapsto\sin(x)$ n'admettent pas de limite en $x\mapsto+\infty$.
2. Les suites suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, donner leur limite.
   - $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   - $\left(\sqrt{n}e^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   - $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   - $\left((-1)^n\log(n+1)+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   - $\left(n\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Université Paris 7 Année 2008/2009
UFR de Mathématiques MT1

COLLE

Suites

△

1. Montrer la propriété : “Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors toute sous-suite de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.”
2. Étudier la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n^2-3u_n+3} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Université Paris 7 — Année 2008/2009
UFR de Mathématiques — MT1

COLLE

Suites

$\triangle$

1. Donner deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. Étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Université Paris 7 — Année 2008/2009
UFR de Mathématiques — MT1

COLLE

Suites

$\triangle$

1. Montrer qu'une sous-suite d'une suite croissante est elle aussi croissante.
2. Étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Université Paris 7 — Année 2008/2009
UFR de Mathématiques — MT1

COLLE

Suites

$\triangle$

1. Donner une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui possède une sous-suite tendant vers 2 et une sous-suite tendant vers -2.
2. On considère :

$$E = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

   - Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   - Trouver les suites de E de la forme $u = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $q \in \mathbb{R}$.
   - Calculer la dimension de E.

Université Paris 7 — Année 2008/2009
UFR de Mathématiques — MT1

COLLE

Suites

$\triangle$

1. Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Donner un exemple de suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Que peut-on dire de $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = e^{-u_n^2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Université Paris 7 Année 2008/2009
UFR de Mathématiques MT1

COLLE

Suites

$\triangle$

1. Donner un exemple de suite admettant trois sous-suites convergentes vers des limites différentes.
2. Étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Université Paris 7 Année 2008/2009
UFR de Mathématiques MT1

COLLE

Suites

$\triangle$

1. Donner trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = e^{u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Université Paris 7 Année 2008/2009
UFR de Mathématiques MT1

COLLE

Suites

$\triangle$

1. Étudier la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = e^{\cos(n\frac{\pi}{2})}.$$

2. Étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Université Paris 7 Année 2008/2009
UFR de Mathématiques MT1

COLLE

Suites

$\triangle$

1. Montrer que toute suite réelle convergente est bornée.
2. Étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$