Université Paris 7 Année 2008/2009
UFR de Mathématiques MT1

Ensembles et applications

1) Soit $A = \{2, 3, 4\}$. Traduire les énoncés suivants en français. Décider s'ils sont vrais ou faux.

a) $\forall x \in \mathbb{N},\ (x \in A)$.

b) $\exists x \in \mathbb{N},\ (x \in A)$.

c) $\forall x,\ ((x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x \in A))$.

d) $\forall x \in \mathbb{N}, \quad \exists y \in \mathbb{N}, \quad y \geq x$.

e) $\exists x \in \mathbb{N}, \quad \forall y \in \mathbb{N}, \quad y \geq x$.

f) $\exists x \in \mathbb{Z}, \quad \forall y \in \mathbb{Z}, \quad y \geq x$.

2) Soit $A = \{2, 3, 4\}$. À partir des énoncés '$x \in A$', '$x \in \mathbb{N}$', '$x = 2z + 1$', '$x \geq 4$' en former d'autres qui expriment que :

a) A contient un entier naturel impair.

b) A contient un entier naturel impair supérieur à quatre (c'est-à-dire ≥ 4).

Les énoncés précédents sont-ils vrais ?

3) Soit E un ensemble de nombres. On considère les énoncés :

$(\mathcal{E})\quad \exists x \in E \quad \forall y \in E \quad (\, x + y = y \,)$. $\qquad (\mathcal{E}')\quad \forall x \in E \quad \exists y \in E \quad (\, x + y = 0 \,)$.

a) L'énoncé $(\mathcal{E})$ est il vrai quand E est l'ensemble des entiers pairs ?
Quand E est l'ensemble des entiers impairs ?

b) L'énoncé $(\mathcal{E}')$ est il vrai quand $E = \mathbb{N}$? Quand $E = \mathbb{Z}$?

4) Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ dans chacun des cas suivants : $\quad E = \emptyset, \quad E = \{0\}, \quad E = \{0, 1, 2\}$.

5) a) Soit E un ensemble et A, B des parties de E.
Simplifier chacune des deux expressions suivantes : $\quad A \cup (A \cap B), \quad A \cup (A \cup B)$.

b) Trouver un ensemble E et trois parties A, B, C de E tels que : $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$.

6) Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$.

a) Décrire $A \cap B$ quand A est l'ensemble des diviseurs de 45 et B l'ensemble des diviseurs de 55.

b) Décrire $A \cup B$ quand A est l'ensemble des multiples de 2 et B l'ensemble des multiples de 4.

7) Représenter dans le plan complexe l'intersection et la réunion des deux parties suivantes de $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 3\} \quad \text{et} \quad B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2\mathrm{i}| < 2\}.$$

8) On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}$: $\quad I = [1, 3]$ et $J = [2, 4]$.
Trouver un élément de $(I \cup J) \times (I \cup J)$ qui n'appartient pas à $(I \times I) \cup (J \times J)$.

9) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $f([0, \pi])$ et $f([-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}])$.

b) Calculer $f^{-1}([-2, 1])$ et $f^{-1}(\{0\})$.

10) Trouver 4 couples (I, J) d'intervalles de $\mathbb{R}$, tels que les applications $s : I \to J$ déterminées par $s(x) = \sin(x)$, $x \in I$, soient définies et correspondent à chacune des situations suivantes :

a) s non injective et non surjective.

b) s injective et non surjective.

c) s non injective et surjective.

d) s bijective.

11) On considère les correspondances suivantes, où X désigne l'ensemble de départ, Y l'ensemble d'arrivée et R le graphe. Lesquelles sont des graphes de fonctions ? Les fonctions ainsi définies sont-elles injectives ? surjectives ?

a) $X = [0, +\infty[, \quad Y = \mathbb{R}, \quad R = \{(x, y) \in X \times Y \mid x^2 = y^2\}$.

b) $X = \mathbb{R}, \quad Y = [0, +\infty[, \quad R = \{(x, y) \in X \times Y \mid x^2 = y^2\}$.

c) $X = [-1, 1], \quad Y = [0, +\infty[, \quad R = \{(x, y) \in X \times Y \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

12) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. Comparer les ensembles :

a) $[0, 1]$ et $f^{-1}(f([0, 1]))$.

b) $[-1, 1]$ et $f\left(f^{-1}([-1, 1])\right)$.

c) $f([0, 1] \cap [-1, 0[)$ et $f([0, 1]) \cap f([-1, 0[)$.

13) Soit $f : E \to F$ une application.

a) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a : $\quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

b) On suppose maintenant que f est injective. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

c) Donner un exemple pour lequel l'inclusion du (a) est stricte.

14) a) Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ y & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } y=0 \\ y-1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$.

b) Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

15) On considère l'application $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

a) Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.

b) Déterminer des intervalles $I \subset]0, +\infty[$ et $J \subset \mathbb{R}^+$ tels que la restriction de f soit une bijection de I sur J.

16) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (x - y, -2x + 2y)$.

a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(a, b) \in f(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $2a + b = 0$.

b) L'application f est-elle surjective ? injective ?

17) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x - y^2$.

a) L'application f est-elle injective ?

b) Montrer que l'application f est surjective.

c) Trouver une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

d) Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, y) = (x + y^2, y)$. Montrer que h est une bijection. Calculer $f \circ h(x, y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

18) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\quad u_n = \sum_{j=1}^{n} j(j+1) = 1.2 + 2.3 + \cdots + n(n+1)$.

Montrer, par récurrence sur n, l'égalité : $\quad u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $n \geq 1$.

19) Montrer par récurrence la propriété $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

---

14. On remarquera aussi que f se restreint en une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. À ce propos, pourriez vous l'utiliser pour en déduire une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

Université Paris 7 Année 2008/2009
UFR de Mathématiques MT1

Nombres complexes

1) a) Trouver les parties réelle et imaginaire de $\frac{3+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ et $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}$.

b) Déterminer le module et l'argument (à $2\pi\mathbb{Z}$ près) de $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $1+\mathrm{i}$, et $\Big((\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)\,\mathrm{i}\Big)^{20}$.

c) Quels sont les $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tels que $z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$?

2) On se donne un nombre réel x.

a) Écrire $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

b) Écrire $(\cos(x))^5$ sous la forme $a_1\cos(x)+a_2\cos(2x)+a_3\cos(3x)+a_4\cos(4x)+a_5\cos(5x)$ où a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 sont des coefficients réels indépendants de x.

3) Soit n un entier naturel. En développant $(1+\mathrm{i})^n$, donner des formules pour les sommes alternées suivantes des coefficients du binôme : $\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\dots$ et $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\dots$

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z :

(A) $z^3=-2$; (B) $z^2=9+40\,\mathrm{i}$;

(C) $(1-\mathrm{i})\,z^2-(7+\mathrm{i})\,z+4+6\mathrm{i}=0$.

5) Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ l'application définie par $f(z)=z^2$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

a) Existe-t-il une application $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ telle que $g\circ f=\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$? Si oui, y a-t-il unicité de l'application g ?

b) Existe-t-il une application $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ telle que $f\circ h=\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$? Si oui, y a-t-il unicité de l'application h ?
Indication : tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ de la forme $z=re^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$ s'écrit $z=\exp Z$ où $Z\overset{\text{déf}}{=}\ln r+\mathrm{i}\theta$.

6) Soit z un nombre complexe non nul. On pose : $u=z+\frac{1}{z}$.

a) Montrer que $u^2+u-1=0$ si et seulement si $z\neq 1$ et $z^5=1$.
(Utiliser l'égalité $u^2+u-1=\frac{1}{z^2}(z^4+z^3+z^2+z+1)$.)

b) En déduire que $\cos(2\pi/5)=(\sqrt{5}-1)/4$ et $\cos(\pi/5)=(\sqrt{5}+1)/4$.

7) Soit $f:\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$ l'application telle que $f(z)=\frac{z^2}{1-z}$ pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

a) Déterminer les sous-ensembles $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{-4\})$, $f^{-1}(\{3\mathrm{i}\})$.

b) Soit $u\in\mathbb{C}$. Combien l'ensemble $f^{-1}(\{u\})$ a-t-il d'éléments ?

c) L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

8) On considère $f:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\end{array}$

a) L'application f est-elle injective ? surjective ?

b) Quelle est l'image réciproque par f de $D\overset{\text{déf}}{=}\{Z\in\mathbb{C}\mid |Z|<1\}$?
(Exprimer $1-|f(z)|^2$ à l'aide de $|z+\mathrm{i}|$ et $\mathrm{Im}(z)$.)

c) Quelle est l'image par f du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega=(2,0)$ et de rayon $r=2$?

9) Soit $z\in\mathbb{C}$. On note I, M et N les points du plan $\mathbb{R}^2$ d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$.
Déterminer z de façon que :

a) les points I, M, N sont alignés ;
(Penser à la caractérisation géométrique du cercle de diamètre $[A,B]$.)

b) le triangle IMN est équilatéral.
(Penser à la caractérisation géométrique de la médiatrice d'un segment.)

Université Paris 7 Année 2008/2009
UFR de Mathématiques MT1

Ensembles et structures

1) Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ (on pourra penser à élever au carré).

2) On définit la relation suivante pour tous $z, z'\in\mathbb{C}$, $z\mathcal{R}z' \quad\Leftrightarrow\quad |z|=|z'|$. La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ? Donner la classe du nombre $1+i$.

3) Pour chacun des ensembles suivants donner, s'ils existent, les majorants, minorants, borne supérieure, borne inférieure, plus petit élément, plus grand élément :

$$[0,1]\cap\mathbb{Q},\qquad]0,1[\cap\mathbb{Q},\qquad \mathbb{N},\qquad \left\{(-1)^n+\frac{1}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

4) Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On définit leur différence symétrique, notée $A\triangle B$, par :

$$A\triangle B = \Big(A\cup B\Big)\backslash\Big(A\cap B\Big).$$

Montrer que pour tous A, B, C de $\mathcal{P}(E)$ on a : $A\triangle A=\emptyset$, $\ A\triangle B=B\triangle A$ et $\ A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$.

5) Considérons l'application : $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}$ définie par $f(2k)=k$ et $f(2k+1)=-k-1$. Montrer que f est une bijection.

6) Considérons l'ensemble $I=\left\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,\middle|\, f \text{ bijective}\right\}$. Montrer que $(I,\circ)$ est un groupe. Est-il fini ? (On pourra penser aux applications $x\longrightarrow ax$ où a est un réel fixé).

7) L'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ muni des lois $+$ et $\times$ est-il un anneau ? Est-il un groupe pour l'une de ces lois ?

8) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $U_n=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, z^n=1\right\}$.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $(U_n,\times)$ est un groupe fini de cardinal n.
- Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $(U_p,\times)$ est un sous-groupe de $(U_{2p},\times)$.
- Considérons l'ensemble $\mathbb{U}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}*}U_n$. L'ensemble $(\mathbb{U},\times)$ est-il un groupe fini ?

9) Posons $K=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{Q}\right\}$. Montrer que $(K,+,\times)$ est un corps.

10) On définit l'ensemble :

$$M_2(\mathbb{Z})=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\,\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Montrer que les lois d'addition et de multiplication matricielle sont des lois internes pour $M_2(\mathbb{Z})$. Cet ensemble est-il un groupe pour l'une de ces lois ?

Université Paris 7 — Année 2008/2009
UFR de Mathématiques — MT1

Algèbre linéaire

1) Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \ \text{ et } \ 2x - y = 0\}$

b) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$.

c) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 1 = 0\}$.

d) $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$.

e) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \leq 4\}$.

f) $L = \{(t, 4t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$.

g) $M = \{(u + v, u - v) \ ; \ u, v \in \mathbb{R}\}$.

2) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $v = (1, 2)$ et $w = (-2, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

a) À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

b) En supposant que w *n'est pas* multiple de v, montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de v et w.

3) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v = (1, -2, -5)$ et $w = (-2, 4, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

a) À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

b) On suppose que w *n'est pas* multiple de v et on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w. Montrer qu'on a

$$P = \{ \, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \, \} \, ,$$

où a, b, c sont des nombres réels, non tous les trois nuls, que l'on déterminera.

4) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (-2, 4, 1)$, $v_2 = (1, -2, 0)$, et $v_3 = (3, b, -1)$, où $b \in \mathbb{R}$.

a) À quelle condition sur le paramètre b le vecteur v_3 est-il une combinaison linéaire de v_1 et v_2 ?

b) On suppose cette condition vérifiée. Montrer que v_1 est une combinaison linéaire de v_2 et v_3 et que v_2 est une combinaison linéaire de v_1 et v_3.

c) On suppose que cette condition n'est pas vérifiée. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3.

5) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble

$$P = \{ \, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \, \} \, .$$

Mettre en évidence deux vecteurs v, w, non colinéaires, appartenant à P et montrer que tout élément de P est une combinaison linéaire de v et w.

6) Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?
Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

a) $u = (3, 2, 1)$ et $v = (4, 2, 0)$;

b) $u = (3, 1, 2)$, $v = (5, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 4)$;

c) $u = (-2, 4, 1)$, $v = (1, -2, 0)$ et $w = (3, m, -1)$ (discuter suivant les valeurs de m).

7) Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (2,3,1)$ et $v_2 = (1,-1,2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $w_1 = (3,7,0)$ et $w_2 = (5,0,7)$.

8) Les familles suivantes sont elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

a) $\mathcal{A} = \big((1,3,2),(0,2,3),(0,0,1)\big)$;

b) $\mathcal{B} = \big((1,4,6),(0,3,2)\big)$.

9) Soient E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille de fonctions $(f_1,\dots,f_4)$:

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1},\ f_2(x) = \frac{1}{x+1},\ f_3(x) = \frac{2}{x^2-1},\ f_4(x) = \frac{x+5}{x^2-1}.$$

a) Montrer que la famille (f_1, f_2) est libre.

b) Déterminer une base de F. (Pensez à la décomposition en éléments simples)

10) a) Prouver que $u_1 = (0,1,2)$, $u_2 = (1,3,5)$ et $u_3 = (5,4,6)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer les coordonnées de $u = (7,4,7)$ dans cette base.

11) Déterminer le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ formée de :
$u_1 = (1,0,2,2)$, $u_2 = (1,-1,3,-2)$, $u_3 = (2,-1,5,0)$.

12) Déterminer une base et la dimension, des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

a) $A = \mathrm{Vect}(a_1,a_2,a_3)$ où $a_1 = (3,3,10)$, $a_2 = (0,3,4)$ et $a_3 = (1,0,2)$;

b) $B = \mathrm{Vect}(b_1,b_2)$ où $b_1 = (1,0,0)$ et $b_2 = (0,1,1)$;

c) $C = \{(2t+u,-u,-2t)\ ;\ t,u \in \mathbb{R}\}$;

d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$;

e) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = 0 \text{ et } 3x - y + z = 0\}$.

13) Comparaison de deux sous-espaces.

a) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs : $v_1 = (1,-1,3,2)$, $v_2 = (3,-1,0,1)$, $v_3 = (1,1,-6,-3)$, et $v_4 = (0,2,-9,-5)$. On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1,v_2,v_3,v_4). Déterminer la dimension de F et en donner une base. Donner un système d'équations cartésiennes de F.

b) Soit $G = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de G.

c) Montrer que $F \subset G$. A-t-on $F = G$?

14) Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1,e_2,e_3), les sous espaces E et F suivants sont-ils supplémentaires ?

a) $E = \{(x,y,z) | x = y = z\}$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$.

b) $E = \{(3t,3t,t), t \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(2u+v, u+2v, u), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.

c) $E = \{(2u+v, u+2v, u+v), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(u+v, u+v, 2u), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.

15) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(w_1,w_2)$ avec $v_1 = (2,1,1)$ et $v_2 = (2,2,1)$, $w_1 = (1,2,-1)$ et $w_2 = (2,1,2)$.

a) Déterminer la dimension de $E_1 \cap E_2$.

b) Déterminer la dimension de $E_1 + E_2$.

c) A-t-on : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$? $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$?

16) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ avec $v_1 = (1, -1, 0, 1)$ et $v_2 = (0, 2, 1, 0)$, $w_1 = (0, 6, -1, 4)$ et $w_2 = (3, 3, 1, 5)$.

a) Donner une base de $E_1 \cap E_2$.

b) Donner une base de $E_1 + E_2$.

c) Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$.

Université Paris 7 Année 2008/2009
UFR de Mathématiques MT1

Systèmes linéaires, matrices

1) Résoudre, par la méthode du pivot de Gauss, les systèmes d'équations linéaires suivants :

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+5y=3 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x-4y+7z=3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y+3z+2t=-2 \\ 2x+3y+4z+t=-1 \\ 3x+7y+z-6t=6 \end{cases}$.

2) Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

a) $\begin{cases} x-3y-2z=-1 \\ 2x+y-4z=3 \\ x+4y-2z=4 \\ 5x+6y-10z=10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y+3z-2t=6 \\ 2x-y-2z-3t=8 \\ 3x+2y-z+2t=4 \\ 2x-3y+2z+t=-8 \end{cases}$.

3) Résoudre et discuter les systèmes suivants d'inconnues x, y et z :

a) $\begin{cases} x+2y-z=a_1 \\ -2x-3y+3z=a_2 \\ x+y-2z=a_3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \lambda x+y+z=a^2 \\ x+\lambda y+z=a \\ x+y+\lambda z=1 \end{cases}$.

4) Résoudre le système suivant : $(\star)$ $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3=a \\ 3x_1+9x_2+4x_3=b \\ x_1+5x_2+3x_3=c \end{cases}$,

avec, successivement, $(a,b,c)=(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

5) On fixe $k\in\mathbb{R}$, $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{R}^4$ et $z=(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{R}^3$. Résoudre et discuter les systèmes :

a) $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-2x_4+5x_5=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4+3x_5=0 \\ -x_1-5x_2+7x_3+kx_4+9x_5=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3=y_1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=y_2 \\ x_1+4x_2+5x_3=y_3 \\ 5x_1+6x_2+kx_3=y_4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+5x_4=z_1 \\ -3x_1+x_2+4x_3+6x_4=z_2 \\ -2x_1+3x_2+5x_3+kx_4=z_3 \end{cases}$.

6) Écrire des systèmes d'équations linéaires dont les solutions sont les ensembles suivants, où u et v parcourent $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x=u+1 \\ y=-u+1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=u \\ y=2u \\ z=-u \end{cases}$; c) $\begin{cases} x=u+v-2 \\ y=-u+2v+1 \\ z=u-v \end{cases}$; d) $\begin{cases} x=u+2v-3 \\ y=-u+v-2 \\ z=2u+2v-1 \\ t=-u-v+3 \end{cases}$.

7) Soit le système (S) $\begin{cases} x+3y+4z=0 & (L_1) \\ 3x+2y+4z=0 & (L_2) \\ x+2y+3z=0 & (L_3) \end{cases}$.

On remplace L_1 par $L_1'=L_2-L_1$, L_2 par $L_2'=L_2-L_3$ et L_3 par $L_3'=L_1-L_3$.

Le système (S) est-il équivalent au système (S') $\begin{cases} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{cases}$?

8) Effectuer tous les produits possibles de deux matrices choisies parmi les quatre suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 0&1&3&0 \\ 8&5&0&6 \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0&1 \\ 0&0 \\ 3&3 \\ 9&5 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0&1&3 \\ 8&5&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 1&3 \\ 5&0 \end{pmatrix}.$$

9) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$, les parties suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a) l'ensemble E des matrices inversibles ;

b) l'ensemble F des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ où a et b parcourent $\mathbb{R}$;

c) l'ensemble G des matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

10) Pour chacune des matrices suivantes, calculer son inverse ou montrer qu'elle n'est pas inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} ; \ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} ; \ D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11) Soient $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (2,0,2)$, $v_3 = (1,2,-1)$, $v_4 = (0,2,-2)$, $v_5 = (-1,1,3)$, $v_6 = (2,3,-1)$. Montrer que $(v_1,...,v_6)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, et en extraire une base.

12) On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. On se donne une droite D et un point A.
Démontrer qu'il existe une unique droite D' passant par A et parallèle à D.

13) a) Écrire l'équation générale d'une droite Δ du plan $\mathbb{R}^2$ passant par un point $A_0 \left| \begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix} \right.$.

b) Soient $D : ax + by + c = 0$ et $D' : a'x + b'y + c' = 0$ deux droites distinctes de $\mathbb{R}^2$ passant par le point A_0. On note $E(x,y) = ax + by + c$ et $E'(x,y) = a'x + b'y + c'$.
Montrer que les équations des droites passant par A_0 sont $(\star)$ $\lambda E + \lambda' E' = 0$, où $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda, \lambda') \neq (0,0)$.

14) Soient $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} \right.$ et $B \left| \begin{matrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \right.$ dans $\mathbb{R}^3$.
Équation cartésienne de la droite (AB) ?

15) On considère le plan $P : 3x + 4y - 2z = 1$ dans $\mathbb{R}^3$.
Équation cartésienne du plan P' parallèle à P passant par $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$?

16) Soient $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \right.$, $B \left| \begin{matrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \right.$, $C \left| \begin{matrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right.$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que A, B, C ne sont pas alignés.

b) Équation cartésienne du plan (ABC) ?

17) Les points $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$, $B \left| \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$, $C \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \right.$, $D \left| \begin{matrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \right.$ de $\mathbb{R}^3$ sont-ils coplanaires ?

18) Soient $A_1 \left| \begin{matrix} a \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$, $A_2 \left| \begin{matrix} b \\ 1 \\ 4 \end{matrix} \right.$, $u_1 \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$, $u_2 \left| \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{matrix} \right.$ dans $\mathbb{R}^3$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Trouver les couples (a,b) pour lesquels les droites D_1 et D_2 de repères cartésiens (A_1, u_1) et (A_2, u_2) sont concourantes.

b) Dans ce cas, déterminer une équation cartésienne du plan affine P engendré par D_1 et D_2.

19) Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équation $D : 2x + y - z = 1$ et $x - z = 2$.

a) Montrer qu'il existe un unique plan P de $\mathbb{R}^3$ passant par $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$ et contenant D.

b) Trouver une équation cartésienne de P.

20) Soient A, B, C et D quatres points de $\mathbb{R}^2$ parmi lesquels trois points quelconques sont non alignés.
Montrer que $(AB)//(CD)$ et $(AC)//(BD)$ si et seulement si $[A,D]$ et $[B,C]$ ont même milieu.

Limites, continuité, suites

1) Étudier les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :
   a) $a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+3n+1}$ $(n \geq 0)$;
   b) $b_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ $(n \geq 1)$;
   c) $c_n = \sqrt{n} + (-1)^n$ $(n \geq 0)$;
   d) $d_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$ $(n \geq 0)$;
   e) $e_n = \dfrac{n}{2} \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n \geq 0)$;
   f) $f_n = \dfrac{2-(-1)^n}{n+\cos n}$ $(n \geq 0)$.
   g) $g_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$ $(n \geq 1)$.

2) a) Écrire une relation de récurrence vérifiée par la suite de terme général $u_n = \tan n$, $n \geq 0$. (On admet que π est irrationnel.)
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3) Le « développement en base 10 » d'un nombre réel $x > 0$, noté $x = \alpha_k ... \alpha_0, \alpha_{-1}\alpha_{-2}...$, est déterminé par : $\forall n \in \mathbb{Z}\quad \alpha_{-n} = E(10^n x) - 10\,E(10^{n-1}x)$.
   On note $\alpha_0, \alpha_{-1}\alpha_{-2}...$ le développement en base 10 de $\sqrt{2}$.
   a) Montrer que pour $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\alpha_n \in \{0, 1, ..., 9\}$.
   b) On pose $u_n = \alpha_0 + \alpha_{-1}10^{-1} + \cdots + \alpha_{-n}10^{-n}$ pour tout $n \geq 0$.
   Montrer que pour $n \geq 0$, on a : $u_n \leq \sqrt{2} < u_n + 10^{-n}$.
   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément de $\mathbb{R}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ (bien qu'elle soit croissante et majorée dans $\mathbb{Q}$).

4) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Étudier la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone.
   c) Discuter suivant a l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

5) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ déterminée par :
   $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
   a) Étudier la fonction $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.
   b) Montrer que : $\forall\, n \geq 1\quad |u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{4}{9}\,|u_n - u_{n-1}|$.
   c) Montrer que la fonction $f \circ f$ est croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$; en déduire que les suites $(u_{2p})_{p\geq 0}$ et $(u_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont adjacentes ; calculer leur limite commune r.
   d) Montrer qu'on a : $\forall\, n \geq 1\quad |u_{n+1} - r| \leq \dfrac{4}{9}\,|u_n - r|$; quelle valeur suffit-il de donner à l'entier n pour avoir $|u_n - r| \leq \dfrac{1}{1000}$?

6) En utilisant la définition de la continuité :

a) montrer la continuité en 2 de la fonction définie par $f(x) = x^2$;

b) montrer la continuité en 3 de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

c) montrer que la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ pour $0 < x \leq 1$ n'est pas continue en 0.

7) a) Trouver une fonction continue et bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1,\ f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(\frac{3}{2}) = 4$.

b) Trouver une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1,\ g(1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.

8) Préciser l'ensemble de définition de la fonction donnée par $k(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{\exp(x)-1}$ et expliquer brièvement pourquoi elle y est continue.

9) Calculer les limites des quantités suivantes (lorsqu'elles sont définies) :

a) $\sqrt{1+x^2} - x \quad (x \to \pm\infty)$;

b) $\dfrac{x-3}{x^2-3x} \quad (x \to \pm\infty)$;

c) $\dfrac{x-3}{x^2-3x} \quad (x \to 3)$;

d) $\sqrt{x} - x \quad (x \to +\infty)$;

e) $\dfrac{1-e^x}{1+e^x} \quad (x \to \pm\infty)$;

f) $\ln(x^2+1) - 2\ln(x) \quad (x \to +\infty)$;

g) $x^3 + \cos(x) \quad (x \to \pm\infty)$.

10) Étudier suivant les valeurs du nombre réel a la limite suivante : $\lim\limits_{x\to-\infty} ax + \sqrt{x^2+1}$.

11) Étudier les limites en $+\infty$ des fonctions f et g définies par $f(x) = x\sin x$ et $g(x) = \sin(x^2)$.

12) Prolongements par continuité.

a) Montrer que la fonction définie par $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet un prolongement par continuité en 0.

b) La fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^3+8}{|x+2|}$ admet-elle un prolongement par continuité en -2 ?

13) Soit f la fonction définie par $f(x) = x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Étudier les limites à droite et à gauche de f en 0 et en déduire que f admet un prolongement par continuité en 0. (Utiliser le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x - 1 < E(x) \leq x$.)

b) Étudier les limites à droite et à gauche de f en 1 et en déduire que f n'est pas continue en 1.

14) On étudie ici la quantité x^n avec $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer $\lim\limits_{x\to1^-}(\lim\limits_{n\to+\infty} x^n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lim\limits_{x\to1^-} x^n)$.

Université Paris 7 — Année 2008/2009
UFR de Mathématiques — MT1

Fonctions, Continuité

1) En utilisant le *théorème des valeurs intermédiaires*, montrer que la fonction $x \mapsto \tan x$ admet un point fixe dans l'intervalle $]\pi/2, 3\pi/2[$.

2) L'équation $(\cos x)(\ln x) = 1$ admet-elle une solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$?

3) Soit $J = [a, b]$ un segment et $f : J \to J$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe. *Indication :* appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie.

4) a) Soient f, g des fonctions continues, définies sur $\mathbb{R}$, telles que

$$(\star) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |f(x)| = |g(x)|\,.$$

On suppose que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'on a $f = g$ ou $f = -g$.

b) Donner un exemple de deux fonctions continues f et g, définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant la propriété $(\star)$, telles que $f \neq g$ et $f \neq -g$.

5) Soit I un intervalle. Soit f une fonction continue *injective*, définie sur I.

a) Soient α, β, x, y des éléments de I tels que $\alpha < \beta$ et $x < y$. On pose

$$\forall t \in [0,1] \quad : \quad g(t) = f((1-t)\beta + ty) - f((1-t)\alpha + tx)\,.$$

Montrer que la fonction g est définie et continue sur $[0, 1]$; montrer qu'elle ne s'annule pas ; en déduire que $f(y) - f(x)$ est du même signe que $f(\beta) - f(\alpha)$.

b) Montrer que f est strictement monotone.

6) Donner une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ continue et non monotone.

7) Donner une fonction monotone de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ dont les points de discontinuité soient les nombres $1/n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

8) a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est bornée.

b) Donner une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de limites en $-\infty$ et $+\infty$.

9) On pose $h(x) = x^2 - 3x + 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quel sont les segments $[a, b]$, avec $a < b$, tels que h se restreint en une bijection h_0 de $[a, b]$ sur $h([a, b])$? Dans ce cas, déterminer h_0^{-1}.

10) Donner des exemples d'applications continues et bijectives des types suivants : $f_1 :]0, 1[\to]1, 4[$, $f_2 : [0, 1[\to]1, 4]$, $f_3 :]0, 1[\to \mathbb{R}$, $f_4 :]0, 1[\to]0, +\infty[$, $f_5 : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$.

11) Peut-on trouver une application continue et bijective de $[0, 1[$ sur $]0, 1[$? (*Suggestion :* si f est une telle application, considérer l'ensemble $f(]0, 1[)$.) Une application continue et injective de $]0, 1[$ dans $[0, 1[$? Une application continue et injective de $[0, 1[$ dans $]0, 1[$? Une application continue et surjective de $]0, 1[$ sur $[0, 1[$? Une application continue et surjective de $]0, 1[$ sur $[0, 1]$?

12) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$.

a) Montrer qu'il existe un segment $[a,b]$, avec $a < b$, tel que

$$x \notin [a,b] \quad \Rightarrow \quad g(x) > g(0)\,;$$

b) En considérant la restriction de g à l'intervalle $[a,b]$, montrer qu'il existe au moins un réel un x_0 tel que

$$\min_{x\in\mathbb{R}} g(x) = g(x_0)$$

13) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq f(a)$. Montrer qu'il existe dans $\mathbb{R}^2$ au moins un point du graphe de f dont la distance à (a,b) est minimum. *Indication :* on appliquera l'exercice précédent à la fonction

$$g(x) = (x-a)^2 + (f(x)-b)^2\,.$$

Illustration numérique : calculer $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)$, où

$$g(x) = (x-1)^2 + (x^2-2)^2\,.$$

On notera que g' est un polynôme du troisième degré ayant une racine « évidente ».

14) Simplifiez les expressions suivantes :

$$\arcsin(\sin 2x), \quad \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}, \quad \arccos(\sin x), \quad \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

15) Établir la formule

$$\arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab}$$

pour tous nombres a, b tels que $ab < 1$. *Indication :* on utilisera la formule trigonométrique donnant $\tan(\alpha+\beta)$. Y-a-t'il une ou des formules analogues pour $ab \geq 1$?
En déduire que les nombres suivants sont tous égaux à $\pi/4$ (il s'agit de formules utilisées historiquement pour calculer π) :

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}, \quad 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}\,,$$

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} \quad (\mathit{Strassnitzky}, 1840)\,,$$

$$2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7}.$$

Retrouver ces formules par une méthode purement géométrique.

16) Résoudre les équations suivantes :

$$\arcsin x - \arccos x = 2\arctan 2x - \frac{\pi}{2}, \quad \arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}\,,$$

$$\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} = \arcsin x, \quad \sin\left(2\arccos\left(\mathrm{cotan}(2\arctan x)\right)\right) = 0.$$

Dérivabilité

1) La fonction $f : x \mapsto x\,|x|$ est elle continue sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$? de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ converge vers e^x.

3) Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera l'intervalle ouvert de validité du calcul) :
$a(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\arcsin x\right) - x$
$b(x) = e^x \ln(\sin x)$
$c(x) = \arccos(\ln x)$
$d(x) = x^{\arcsin x}$

4) Soit a un réel non nul. On pose : $f(x) = \arctan\dfrac{a+x}{1-ax}$.
Soit I un intervalle où la fonction f est définie.
a) Calculer la dérivée de f sur I.
b) En déduire que, sur l'intervalle I, la fonction $x \mapsto f(x) - \arctan x$ est constante ; calculer cette constante.
c) Retrouver ainsi, en la généralisant, la formule établie dans l'exercice 15 de la feuille 4.

5) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.
À l'aide d'une formule trigonométrique, en déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.
b) Calculer les limites des fonctions suivantes :

$$\frac{\tan x}{x}\quad (x\to 0),\qquad \frac{x\sin x}{1-\cos x}\quad (x\to 0),\qquad \frac{\tan x - \sin x}{x^3}\quad (x\to 0)\,,$$
$$\frac{\tan^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}\quad (x\to 0),\qquad \frac{\sin 3x}{1-2\cos x}\quad (x\to\frac{\pi}{3}),\qquad x\ln(\sin x)\quad (x\to 0^+).$$

6) On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = x^n \sin\dfrac{1}{x}$.
a) Montrer que f_n se prolonge par continuité en 0 si et seulement si $n \geq 1$. *Dans la suite de l'exercice, on suppose $n \geq 1$ et on note encore f_n le prolongement de f_n à $\mathbb{R}$ tout entier.*
b) Montrer que f_n est dérivable si et seulement si $n \geq 2$.
c) Montrer que f_n est continûment dérivable si et seulement si $n \geq 3$.

7) Montrer qu'on peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction $f(x) = x - x^3$ sur les intervalles $[-1,0]$ et $[0,1]$. Déterminer dans chaque cas la valeur de c.

8) Peut-on appliquer le théorème de Rolle à la fonction $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ sur l'intervalle $[0,4]$? à la fonction $f(x) = \tan x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$?

9) Soit p et q deux nombres réels et un entier $n > 0$. On pose $f(x) = x^n + px + q$.

a) Montrer que si f admet k racines réelles, f' en admet au moins $k - 1$.

b) En déduire que si n est pair, f a au plus 2 racines réelles et que si n est impair, f en admet au plus 3.

10) Prouver l'encadrement $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{15} < \arcsin(0,6) < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{8}$.

11) Soit $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) On suppose que f est dérivable sur $]0, a]$ et que f' admet une limite finie en 0.

Montrer que f est dérivable en 0.

b) Donner un exemple d'une fonction f qui soit dérivable sur $[0, a]$ mais dont la dérivée ne soit pas continue en 0.

c) À l'aide du a), montrer que la fonction d de l'exercice 3 a une dérivée à gauche en 1.

12) Soient f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x + 1$,

et la suite (u_n) telle que : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer l'inclusion $f([0, \pi/2]) \subseteq [0, \pi/2]$.

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite, que l'on notera α, vérifie $f(\alpha) = \alpha$.

c) Montrer que, pour tous réels x, y, on a $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$; en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi}{2}.$$

d) Trouver un entier n tel que $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{10}$.

Développements limités, courbes paramétrées

1) Calculer $\operatorname{ch} 3x$ en fonction de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{ch}^3 x$.

2) Calculer $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \operatorname{sh} 3x + \cdots + \operatorname{sh} nx$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln(\operatorname{ch} x))$.

4) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

5) Écrire la formule de Taylor pour la fonction exponentielle sur $[0,1]$ à l'ordre n et en déduire que :
$$\Big| \mathrm{e} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}) \Big| < \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}.$$
En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!},\ n \in \mathbb{N}$.

6) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)^2}$.
En déduire la limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7) Effectuer les développements limités suivants :
   a) $\frac{x}{\sin(x)}$ à l'ordre 5 en 0 ;
   b) $\sin(x + x^3)$ à l'ordre 5 en 0 ;
   c) $\ln(\frac{\sin x}{x})$ à l'ordre 4 en 0 ;
   d) $\exp(\frac{4+3x}{2+x})$ à l'ordre 3 en 0 ;
   e) 3^x à l'ordre 3 en 1 ;
   f) $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$;
   g) $\arcsin x$ à l'ordre 5 en 0 ;
   h) $\mathrm{e}^{\sqrt{\cos x}}$ à l'ordre 5 en 0 ;
   i) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 5 en 0.

8) Donner les développements limités des fonctions suivantes :
   a) $x \mapsto \frac{\sin x \operatorname{sh} x}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 3 en 0 ;
   b) $x \mapsto \sin(\operatorname{sh} x)$ à l'ordre 3 en 0 ;
   c) $x \mapsto \operatorname{ch}(\ln(1+x))$ à l'ordre 3 en 0.

9) Déterminer a et b pour que la fonction $f(x) = \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ ait pour développement limité nul à l'ordre 5 en 0 , c'est à dire $f(x) = x^5\epsilon(x)$.

10) Étudier les limites suivantes :

a) limite en 0 de $f(x) = \frac{\cos(\sin x)-\cos(x)}{x^4}$;

b) limite en 1 de $g(x) = \frac{\sqrt{3x-2}-x^{\frac{1}{4}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}$;

c) limite en 0 de $h(x) = (\tan(\frac{\pi}{4}+ax))^{\frac{1}{x}}$;

d) limite en 1 de $j(x) = \frac{x^x-x}{(x-1)^2}$.

e) limite en 0 de $k(x) = \frac{\ln(\cos x)+\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}}{\sin^4 x}$;

f) limite en 0 de $l(x) = \frac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1-\cos 3x)\arctan(x)}$.

11) Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}\ln(1+x)$.

En déduire la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.

12) Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Étudier, au voisinage de 0, la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g définies par : $f(x) = \exp(\frac{x}{a})$ et $g(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

13) Déterminer les points d'inflexion de la courbe suivante :

$$M(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = t^2 - t \\ \\ y(t) = t^3 \end{array} \right. .$$

14) Étudier les points stationnaires (c-à-d les points en lesquels la dérivée est nulle) des courbes suivantes :

$$A(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = \mathrm{e}^{t-1} - t \\ \\ y(t) = t^3 - 3t \end{array} \right. ; \qquad B(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = t^2 + 2t \\ \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \end{array} \right. ; \qquad C(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = t^2(1+t^3) \\ \\ y(t) = 2\ln(1+t^2) - \arctan(t^2) \end{array} \right. .$$

(On ne peut espérer obtenir un point de rebroussement qu'en un point stationnaire !)

15) Étudier les branches infinies des courbes suivantes :

$$A(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{1}{t} \\ y(t) = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{t} \end{array} \right. ; \qquad B(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = \dfrac{t^2-3t}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{3t^2-1}{t-1} \end{array} \right. .$$

16) Étudier en détail les courbes suivantes :

$$A(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{-2t+1}{(t^2+1)^2} \end{array} \right. ; \qquad B(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = t\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = \dfrac{(t-1)^2}{t} \end{array} \right. ; \qquad C(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = \dfrac{1}{\cos(3t)} \\ y(t) = \dfrac{1}{\sin(2t)} \end{array} \right. .$$

Exercice 1.
Dans $\mathbb{R}^4$ on considère

$$a_1 = (2, -2, 3, 1) \qquad \text{et} \qquad a_2 = (-1, 4, -6, -2).$$

1.a) Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

1.b) Déterminer un système d'équations pour le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par a_1 et a_2.

Exercice 2.
Dans $\mathbb{R}^4$ on considère

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\mid\; x + y + z + t = 0\} \qquad \text{et} \qquad F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\mid\; x = y = z = t\}.$$

2.a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

2.b) Déterminer des bases de E et de F.

Exercice 3.
Soit E_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1, 3, 0, 4)$ et $(2, 0, 1, 2)$; soit E_2 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1, 1, 2, 3)$ et $(4, -1, 0, 2)$.
Les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 4. (Partiel du 1 décembre 2007, MT1)
Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$E = \{(u - 2v, u + v, 5u) \mid u,\ v \in \mathbb{R}\}.$$

4.a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4.b) Donner une base $\mathcal{B}$ de E et déterminer la dimension de E.

4.c) Compléter la base $\mathcal{B}$ de E en une base de $\mathbb{R}^3$.

4.d) Trouver un système d'équations linéaires définissant E.

Exercice 5. (Partiel du 1 décembre 2007, MT1)
Soient A et B les deux matrices données par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

5.a) Le produit AB est-il bien défini ? Si oui calculer le. Même question pour BA.

5.b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui calculer A^{-1}. Mêmes questions pour B.

5.c) Résoudre $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. (Examen juin 2007, M1-MASS)

6.a) À quelle(s) condition(s) sur les nombres complexes a, b et c la matrice A suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

6.b) Inverser les matrices B et C données par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. (Examen du 13 juin 2007, MT1)
On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, -1, 2, 2), \qquad u_2 = (1, 1, 0, 2) \qquad \text{et} \qquad u_3 = (1, -3, 4, 0).$$

7.a) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2 et u_3. Déterminer une base, la dimension et un système d'équations de F.

7.b) On considère le vecteur $w_1 = (2, 1, 1, 2)$. Sans les calculer, montrer qu'il existe deux vecteurs w_2 et w_3 dans F tels que (w_1, w_2, w_3) soit une base de F.

7.c) Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z + 2t = 0\}$. Déterminer une base et la dimension de G.

7.d) Déterminer une base de $F \cap G$. Quelle est la dimension de $F \cap G$?

7.e) Calculer $\dim(F + G)$ et en déduire $F + G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

7.f) Trouver un supplémentaire de $F \cap G$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8. (Examen du 13 juin 2007, MT1)
Soit m un paramètre réel. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -1 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.a) Calculer le rang de A en fonction de m.

8.b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice A est inversible et pour une telle valeur de m calculer l'inverse de A, en expliquant clairement la méthode utilisée.

Exercice 9. (Examen du 10 janvier 2007, MT1)
Dans un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$, quand dit-on que des vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ de V engendrent V ? Les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ $(0, 0, 1)$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$? En est-il de même lorsque l'on retire le premier de ces quatre vecteurs ? le deuxième en gardant les trois autres ?

Exercice 10. (Examen du 10 janvier 2007, MT1)
On considère dans $\mathbb{R}^4$ les sous-espaces vectoriels définis par

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\} \qquad \text{et} \qquad F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}.$$

On pose

$$u_1 = (1, 1, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad u_2 = (1, 2, 3, 4)$$

et on note A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

10.a) Quelle est la dimension de E ? Celle de F ?

10.b) Vérifier que u_1 et u_2 appartiennent à E et compléter (u_1, u_2) en une base (u_1, u_2, u_3) de E.

10.c) Trouver un vecteur de F qui n'est pas dans E et, sans calcul, montrer que $E+F=\mathbb{R}^4$. Quelle est la dimension de $E\cap F$? En donner une base.

10.d) Trouver tous les vecteurs X de $\mathbb{R}^4$ (assimilés à des matrices colonnes) tels que $AX=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-2\end{pmatrix}$.

Exercice 11.
Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \quad | \quad \begin{cases} x+y+2t=0 \\ x+2z-t=0 \end{cases}\}.$$

Soit α un réel. Posons $u=(-1,\alpha,1,1)$ et $v=(1,1,\alpha,-1)$. Notons $F=\mathrm{Vect}(u,v)$.

11.a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

11.b) Donner une base de E; en déduire la dimension de E.

11.c) Montrer qu'il existe une unique valeur α_0 de α pour laquelle F est inclus dans E.

11.d) Montrer que F est inclus dans E si et seulement si $\dim F=1$.

11.e) Déterminer $E\cap F$. En déduire suivant les valeurs de α la dimension de $E\cap F$. En déduire que pour $\alpha\neq -1$ les sous-espaces E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

11.f) Donner suivant les valeurs de α un système d'équations de F.

11.g) Trouver, lorsque $\alpha\neq -1$, une base d'un supplémentaire de F dans E.

Exercice 12. (Examen juin 2008, MT1)
On considère les matrices

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\2&3&-2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}\qquad \text{et} \qquad C=\begin{pmatrix}4&-1&-2\\-2&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

12.a) Calculer CB; en déduire que B est inversible.

12.b) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

12.c) Déterminer les matrices M telles que $CMB=I_3$.

Exercice 13. (Examen juin 2008, MT1)
Soit $\mathcal{C}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et

$$u_1=(1,2,-2,-2)\,,\qquad u_2=(-1,2,0,1)\,,\qquad u_3=(0,5,-1,0)$$
$$u_4=(1,-2,-1,-2)\,,\qquad u_5=(0,4,-2,-1)\,,\qquad u_6=(1,-6,1,-1)\,.$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1 et u_2; soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_4, u_5 et u_6.

13.a) Montrer que $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.

13.b) Soit $v=(x,y,z,t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Donner ses coordonnées x', y', z' et t' dans la base $\mathcal{B}$.

13.c) i) Montrer que v appartient à E si et seulement si $z'=t'=0$.
ii) En déduire des équations de E dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

13.d) Extraire de $\{u_4,u_5,u_6\}$ une base de F; donner un système d'équations de F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

13.e) i) Trouver une base de $E\cap F$.
ii) En déduire le rang de $\{u_1,u_2,u_4,u_5,u_6\}$.
iii) Retrouver ce rang par une méthode directe.

Exercice 1. (Examen de Juin 2007, MM1)
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{3n^2-5n-9},\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n\arctan n}{2n+1},\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin(n^3)}{n^2-2}\qquad\text{et}\qquad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x).$$

Exercice 2. (Examen de Janvier 2007, MPQ1)
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-6x^2+11x-6},\qquad \lim_{n\to+\infty}\arctan\left(ne^{\frac{1}{n}}\right),\qquad \lim_{n\to+\infty}\arctan\left((ne)^{\frac{1}{n}}\right)\qquad\text{et}\qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)-\frac{x^2}{2}}{2x^4+4x^6}.$$

Exercice 3. (Examen de Juin 2007, MPQ1)
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-x-2}{x^3+x^2-5x-5},\qquad \lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+x^2-5x-5}\qquad\text{et}\qquad \lim_{n\to+\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}\left(n^2e\right)^{\frac{1}{n}}\right).$$

Exercice 4. (Examen de Janvier 2007, M1-MASS)
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)},\qquad \lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\qquad\text{et}\qquad \lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}.$$

Exercice 5. (Examen de Juin 2007, M1-MASS)
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+2|x|}{x},\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2|x|}{x},\qquad \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}\qquad\text{et}\qquad \lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$$

Exercice 6. (Examen de Juin 2007, MM1)
Donner en les justifiant de la manière qui vous convient, les développements limités à l'ordre 3, au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\arctan x,\quad f_2(x)=\tan x,\quad f_3(x)=\sinh x,\quad f_4(x)=\sqrt{1+\sin(x^2)}\quad\text{et}\quad f_5(x)=x+x^4\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 7. (Examen de Juin 2007, MT1)
Soit f la fonction réelle définie par

$$f\,:\ [0,1]\to\mathbb{R},\qquad\qquad x\mapsto\frac{1}{4}(1+\sqrt[3]{x})$$

7.a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur l'intervalle $[0,1]$ ainsi que ses variations. Peut-on appliquer le théorème des accroissements à f sur cet intervalle ? Tracer le graphe de la fonction f.

7.b) Montrer que $f\left(\left[\frac{1}{8},1\right]\right)\subseteq\left[\frac{1}{8},1\right]$.

7.c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution dans $\left[\frac{1}{8},1\right]$.
On notera ℓ cette solution.

7.d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ? Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et en déduire qu'elle converge vers ℓ.

(b) Montrer que

$$\forall\, n \geq 0, \qquad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{3}|u_n - \ell|$$

Indication : utiliser le théorème des accroissements finis sur un intervalle bien choisi.

Exercice 8. (Examen de juin 2008, MT1)
Soit f la fonction de variable réelle définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

8.a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

8.b) Calculer un développement limité de f à l'ordre 2 quand x tend vers 0 en étant différent de 0.

8.c) En déduire que f se prolonge par continuité au point 0 en une fonction φ que l'on précisera.

8.d) Montrer que φ est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente en 0 au graphe de φ.

8.e) Étudier, au voisinage de 0, la position du graphe de φ par rapport à sa tangente.

Exercice 9. (Examen de juin 2008, MT1)

9.a) Montrer que l'application $u : \begin{array}{ccc}]-\infty, 0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{1}{x} - x^2 \end{array}$ est strictement monotone.

9.b) Montrer que u est bijective, et que sa réciproque $v : \mathbb{R} \to]-\infty, 0[$ est dérivable.

9.c) Calculer $v(0)$ et $v'(0)$.

9.d) Déterminer le développement limité de u à l'ordre 3 au point -1.

9.e) Soit $a > 0$. On considère l'équation (E_a) $x^3 + ax + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que l'équation (E_a) n'a aucune solution dans $\mathbb{R}^+$.
En déduire que $v(a)$ est l'unique solution solution de (E_a).

9.f) On admet que v est de classe C^∞ et l'on note $b_0 + b_1\, t + b_2\, t^2 + b_3\, t^3$ le développement limité de $v(t)$ à l'ordre 3 au point 0. Calculer les coefficients b_0, b_1, b_2 et b_3.
Indication : on écrira un développement limité de $v \circ u$ au point -1.

Exercice 10. (Examen du 10 janvier 2007, MT1)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (x^2 + 2x)\ln(2 + x) - \frac{x^2}{2}$$

10.a) Quel est l'ensemble de définition I de f? Calculer $f'(x)$.

10.b) Déterminer $J = f(I)$ et montrer que l'application de I dans J qui envoie x sur $f(x)$ admet une réciproque g dont on précisera la monotonie.

10.c) En quels points de J la fonction g est-elle continue ? dérivable ? Calculer $g'(0)$.

10.d) Montrer que f et g admettent des développements limités en 0 à l'ordre 4. Calculer le développement limité à l'ordre 4 de f en 0 puis celui de g à l'ordre 2 en 0.
