Proc. London Math. Soc. (3) 101 (2010) 759–794 © 2010 London Mathematical Society
doi:10.1112/plms/pdq005

Nombre de points rationnels des courbes

Gaël Rémond

Abstract

Let F be a polynomial in two variables with integer coefficients, let D be its degree and let $M \geqslant 3$ be an upper bound for the absolute value of its coefficients. Then the number of rational zeroes of F is either infinite or less than $\exp(5^{D^4}(\log M)(\log\log M))$. We prove this as a special case of a result for number fields. The main new ingredient is an estimate for the theta height of a Jacobian.

1. *Introduction*

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit $F \in \mathbb{Z}[X, Y]$ de degré D et soit $M \geqslant 3$ un majorant de la valeur absolue des coefficients de F. Alors l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ est ou bien infini ou bien de cardinal au plus* $\exp(5^{D^4}(\log M)(\log\log M))$.

Nous expliquerons ci-dessous pourquoi la méthode employée conduit obligatoirement à une borne de cet ordre de grandeur en D. On ignore s'il est nécessaire : le seul renseignement connu sur la dépendance en D nous dit qu'elle doit être au moins quadratique (ceci se voit sur l'exemple élémentaire $F = \prod_{k=1}^{n}(X-k)^2 + \prod_{k=1}^{n}(Y-k)^2$ qui a n^2 solutions en degré $2n$; voir [**23**] pour un raffinement avec $D^2 + 6D$ zéros en degré $D = 6n$). En ce qui concerne le paramètre M, il devrait peut-être disparaître de la borne : ce serait en tout cas une conséquence des conjectures de Lang sur les variétés de type général (voir [**2**]).

Le résultat précédent s'obtient en fait comme cas particulier d'un théorème sur les corps de nombres. Nous y utilisons la hauteur d'un polynôme (logarithmique, absolue et définie par des normes du supremum à l'infini ; voir détails dans la partie suivante).

Théorème 1.2. *Soient K un corps de nombres et $F \in K[X, Y]$ de degré D. Alors, si l'ensemble $\{(x, y) \in K^2 \mid F(x, y) = 0\}$ est fini, il est de cardinal au plus*

$$\exp(5^{D^4}[K : \mathbb{Q}]^5 \max(h_\infty(F), \log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|, 1)\log(h_\infty(F) + 2)).$$

Ce théorème concerne essentiellement les courbes de genre au moins 2. Celles-ci n'ont qu'un nombre fini de points rationnels sur un corps de nombres comme l'a démontré Faltings en 1983 (ex-conjecture de Mordell). Nous bornons ici le nombre de tels points rationnels à partir de la seconde démonstration due à Vojta et de la réécriture qu'en a donnée Bombieri (1991). En explicitant cette approche (et à l'aide d'un résultat de David et Philippon, voir détails en partie 10), nous avons obtenu dans [**19**] la majoration suivante : si C est une courbe lisse sur

. Received 30 April 2009; revised 17 December 2009; published online 25 March 2010.
. 2000 *Mathematics Subject Classification* 11G30, 11G50, 14K15.

un corps de nombres K de genre $g \geqslant 2$ alors

$$\operatorname{Card} C(K) \leqslant (2^{38+2g}[K:\mathbb{Q}]g\max(1,h_\theta))^{(r+1)g^{20}}$$

où $h_\theta = h_\theta^{(4)}(\operatorname{Jac}(C), \Theta_{\mathrm{sym}})$ est la hauteur thêta de la jacobienne de C relative à la puissance seizième d'un translaté symétrique du diviseur thêta et r le rang du groupe $\operatorname{Jac}(C)(K)$.

Notre tâche ici sera de majorer h_θ et r en fonction de la hauteur de C et du corps K. Nous rappellerons en partie 6 la définition de h_θ et donnerons un moyen pratique de l'estimer. Mentionnons d'ores et déjà que cette hauteur d'une variété abélienne est comparable à la hauteur (intrinsèque) de Faltings. En fait, Bost et David ont montré $|h_\theta - (1/2)h_{\mathrm{Falt}}| \leqslant c\log(2+h_\theta)$ pour une constante explicite c (leur manuscrit [**1**] a été repris par Pazuki, voir [**16**] ; une version de ce résultat se trouve citée à la toute fin de [**5**]).

L'ingrédient principal de cet article est donc une majoration de la hauteur thêta. Nous utilisons la hauteur projective des variétés (voir partie suivante).

Théorème 1.3. *Soit C une courbe lisse plongée dans $\mathbb{P}^3_{\bar{\mathbb{Q}}}$ de degré D et de genre g alors $h_\theta^{(4)}(\operatorname{Jac}(C), \Theta_{\mathrm{sym}}) \leqslant m^{20m8^g}(h(C)+1)$ où $m = 4g+2D-2$.*

Ce résultat permet de majorer la hauteur thêta pour toute courbe lisse décrite comme un fermé d'un espace projectif $\mathbb{P}^n$. En effet, si la dimension n est au moins 4, on la fait très facilement chuter à 3. Le résultat suivant donne le contrôle de hauteur dans ce procédé.

Proposition 1.1. *Soient K un sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$ et C une courbe lisse plongée dans $\mathbb{P}^n_K$ avec $n \geqslant 4$ de degré D. Il existe un plongement de C dans $\mathbb{P}^3_{\bar{\mathbb{Q}}}$ de degré D et de hauteur $h(C \hookrightarrow \mathbb{P}^3) \leqslant h(C \hookrightarrow \mathbb{P}^n) + 4D\log(n+1)^4 D$. Si $K = \bar{\mathbb{Q}}$ alors on peut prendre $h(C \hookrightarrow \mathbb{P}^3) \leqslant h(C \hookrightarrow \mathbb{P}^n) + 12D\log(n+1)$.*

Nous nous tournons maintenant vers l'estimation du rang. Celle-ci se base sur une démonstration effective du théorème de Mordell-Weil faible. Ce travail a été effectué par Ooe et Top en 1989 (voir [**14**]). Nous corrigeons légèrement les calculs de leur article dans la proposition 5.1 ci-dessous. Nous obtenons ainsi une borne pour $r+1$ dont il faut signaler deux caractéristiques.

D'une part, elle est toujours plus grande que 2^{8g^2} et fournit par conséquent le terme principal dans les majorations des théorèmes 1.1 et 1.2. En effet, on ne peut faire mieux que de majorer g par $(D-1)(D-2)/2$ ce qui fait que 2^{8g^2} est de l'ordre de 4^{D^4} et l'on a écrit 5^{D^4} pour absorber les termes secondaires. Ceci nous montre en particulier que même une amélioration significative de la borne pour $\operatorname{Card} C(K)$ ne changera pas la dépendance finale en D si ladite borne excède e^r. Or la méthode suivie semble naturellement conduire à une exponentielle du rang car (voir [**19**]) on majore en fait le cardinal de $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ pour un groupe Γ de rang fini r de la jacobienne J (on spécialise ensuite $\Gamma = J(K)$) et ce groupe n'intervient que pour deux arguments de géométrie euclidienne élémentaire dans $\Gamma \otimes \mathbb{R}$: il s'agit de recouvrir l'extérieur d'une boule fixée par de petits cônes et son intérieur par de petites boules ; dans les deux cas, le nombre nécessaire dépend exponentiellement de $r = \dim \Gamma \otimes \mathbb{R}$ (par exemple le nombre de boules de rayon ρ nécessaires pour recouvrir une boule de rayon R excède $(R/\rho)^r$).

D'un autre côté, la borne pour $r+1$ fait intervenir (outre le genre g et le corps K) la mauvaise réduction de J. Dans [**14**] apparaît le conducteur de la variété abélienne J mais un examen de la preuve montre que le radical de celui-ci suffit. Il s'agit donc simplement du produit des idéaux entiers où J a mauvaise réduction et ceci se majore tout aussi bien sur la courbe C.

Nous contrôlons donc ici le conducteur et son radical (ceci utilise notamment un résultat effectif dans le théorème des zéros de Hilbert dû à Krick–Pardo–Sombra ainsi qu'une estimation de Lockhart–Rosen–Silverman).

THÉORÈME 1.4. *Soient K un corps de nombres et C une courbe lisse plongée dans $\mathbb{P}^3_K$ de degré D et de genre g. On note S l'ensemble des places de K où la courbe C a mauvaise réduction et $N_0 \in \mathbb{N}$ le produit des normes des premiers de S. Alors on a $\log N_0 \leqslant 2^{11} D^5$ $[K:\mathbb{Q}]^2 \max(h(C), D \log |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|, D^2)$ et $\log N_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{N}_{\mathrm{Jac}(C)/K}) \leqslant 12 g^2 [K:\mathbb{Q}] \log N_0$.*

Enfin tous les résultats auxiliaires cités jusqu'ici concernent les courbes lisses. Pour obtenir les théorèmes 1.1 et 1.2 il nous faut traiter du cas des courbes singulières. On se ramène aisément au cas d'un polynôme irréductible et on emploie le résultat suivant.

THÉORÈME 1.5. *Soient K un corps de nombres ou $\bar{\mathbb{Q}}$, $F \in K[X,Y]$ un polynôme irréductible dans $\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]$ de degré D et $\tilde{C}$ la courbe lisse birationnelle au schéma des zéros de F. Il existe un plongement de $\tilde{C}$ dans $\mathbb{P}^3_K$ de degré au plus $\max(D, D(D-2))$ et de hauteur au plus*

$$D^{D^3-5}(6h_\infty(F) + 9D^2) + \frac{3}{2} D^7 \frac{\log |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|}{[K:\mathbb{Q}]}$$

(*si $K = \bar{\mathbb{Q}}$ ce dernier terme doit être compris comme nul*).

Signalons encore que nous avons négligé jusqu'ici le cas des courbes de genre 0 ou 1 et que, si le premier ne présente pas de difficultés, nous aurons besoin dans le second cas d'une estimation de la torsion des courbes elliptiques sur un corps de nombres. Nous utilisons pour cela un théorème de Petsche (voir proposition 10.2).

Faisons une ultime remarque sur les calculs. Si nous avons pris soin d'identifier le terme principal de la borne finale et de ne pas le dépasser (voir plus haut), nous n'avons pas en revanche cherché à optimiser tous les résultats intermédiaires et avons parfois majoré largement des termes destinés à être secondaires.

La partie suivante introduit l'outil fondamental de tout ce travail à savoir les hauteurs. Nous décrivons les hauteurs que nous utiliserons : des points, des polynômes, des variétés... et leurs propriétés. Dans la partie 3 nous montrons la proposition 1.1 au moyen d'une projection linéaire suffisamment générale et de petite hauteur. Ensuite le théorème 1.5 est établi dans la partie 4. Nous suivons pour cela l'évolution de la hauteur dans le procédé de normalisation. Nous décrivons un espace $\Gamma(\tilde{C}, \mathcal{L})$ pour $\mathcal{L}$ très ample à l'intérieur du corps des fonctions de $\tilde{C}$. Bien que cet espace soit linéaire, les équations obtenues pour le définir (*via* une clôture intégrale) sont polynomiales. Nous utilisons donc un résultat d'intersection pour contrôler la hauteur de $\Gamma(\tilde{C}, \mathcal{L})$ (proposition 4.2) avant d'appliquer un lemme de Siegel qui fournit des sections de petite hauteur plongeant $\tilde{C}$. Dans la partie 5, nous montrons le théorème 1.4 puis nous revenons sur la majoration du rang (proposition 5.1).

L'estimation de la hauteur thêta (théorème 1.3) occupe les quatre parties suivantes. Notre approche consiste à travailler le moins possible sur la jacobienne et à ramener tous les calculs sur une puissance de la courbe. Ceci est rendu possible par la proposition 6.1 qui exprime la hauteur thêta à l'aide d'une fonction rationnelle f. Celle-ci se définit à travers son diviseur $\mathrm{div}(f)$. Il s'exprime naturellement sur J mais nous montrons dans la partie 7 comment le contrôler sur C^g à partir d'un fermé $L_n \subset C^{2n}$ que l'on peut voir comme le graphe de la relation d'équivalence linéaire dans $C^n \times C^n$ (pour n quelconque). Nous majorons ensuite (partie 8) le degré et la hauteur de L_n. L'estimation de la hauteur thêta elle-même occupe la partie 9 : il s'agit d'évaluer f en certains points de torsion et pour cela il faut majorer la hauteur de polynômes représentant f. Enfin une dernière partie montre comment déduire les théorèmes 1.1 et 1.2 des résultats précédents.

2. *Outils : hauteurs*

Nous rappelons ici un certain nombre de définitions (très classiques) de hauteurs variées et rassemblons ensuite divers lemmes techniques.

Nous définissons la hauteur d'un $(n+1)$-uplet de nombres algébriques $x=(x_0,\dots,x_n)$ par

$$h(x)=\sum_v \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log\|x\|_v$$

où K est un corps de nombres contenant les x_i, l'indice v parcourt les places de K auxquelles on associe des valeurs absolues $|\cdot|_v$ normalisées par $|p|_v\in\{1,p,p^{-1}\}$ pour tout nombre premier p et

$$\|x\|_v=\max_{0\leqslant i\leqslant n}|x_i|_v \quad \text{si } v\nmid\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_v=\left(\sum_{0\leqslant i\leqslant n}|x_i|_v^2\right)^{1/2} \quad \text{si } v\mid\infty.$$

Nous utiliserons la variante suivante de la hauteur

$$h_\infty(x)=\sum_v \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log\max_{0\leqslant i\leqslant n}|x_i|_v$$

qui vérifie visiblement $h_\infty(x)\leqslant h(x)\leqslant h_\infty(x)+\frac{1}{2}\log(n+1)$. De plus ces deux hauteurs sont projectives et induisent donc des hauteurs sur $\mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{Q}})$ que nous notons de la même manière.

Nous aurons également besoin de plusieurs hauteurs sur les polynômes à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$. Si P désigne un tel polynôme, nous notons $h(P)$ et $h_\infty(P)$ les hauteurs correspondantes de la famille de ses coefficients. Pour un polynôme homogène nous verrons encore intervenir la hauteur modifiée $h_{\mathrm{m}}(P)$: si $P\in\bar{\mathbb{Q}}[X_0,\dots,X_n]$ homogène de degré D s'écrit $\sum_{\mathfrak{m}}p_{\mathfrak{m}}\mathfrak{m}$ (où $\mathfrak{m}$ parcourt les monômes de degré D) alors $h_{\mathrm{m}}(P)$ est définie comme $h(P)$ à ceci près que pour une place infinie v la norme $\|P\|_v$ est remplacée par

$$\|P\|_v'=\left(\sum_{\mathfrak{m}}\binom{D}{\mathfrak{m}}^{-1}|p_{\mathfrak{m}}|_v^2\right)^{1/2}$$

où $\binom{D}{\mathfrak{m}}$ désigne le coefficient multinomial, autrement dit le coefficient de $\mathfrak{m}$ dans $(X_0+\dots+X_n)^D$.

Les principales comparaisons entre ces hauteurs sont données par :

$$h_\infty(P)\leqslant h(P),\ \ h_{\mathrm{m}}(P)\leqslant h(P),\ \ h_{\mathrm{m}}(P)\leqslant h_\infty(P)+\sqrt{n}\ \text{ et }\ h(P)\leqslant h_\infty(P)+\frac{1}{2}\log\binom{D+n}{n}$$

où dans les deux dernières formules on suppose P homogène de degré D en $n+1$ variables. Ici les deux inégalités entre $h_\infty(P)$ et $h(P)$ découlent de celles sur les points, la majoration $h_{\mathrm{m}}(P)\leqslant h(P)$ est évidente tandis que la dernière vient du lemme 5.2 page 300 de [**21**].

Nous emploierons encore la notion de longueur d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ définie comme la somme des valeurs absolues de ses coefficients. Pour illustrer un usage typique de la longueur, considérons $P\in\mathbb{Z}[X_0,\dots,X_n,Y_0,\dots,Y_m]$ homogène de degré D en les variables $Y_0,\dots,Y_m$; alors si $y_0,\dots,y_m\in\bar{\mathbb{Q}}$ le polynôme $Q=P(X_0,\dots,X_n,y_0,\dots,y_m)\in\bar{\mathbb{Q}}[X_0,\dots,X_n]$ satisfait $h(Q)\leqslant Dh_\infty(y_0,\dots,y_m)+\log L$ où L est la longueur de P. En pratique on suit l'évolution de la longueur sur des calculs polynomiaux et l'on applique seulement *in fine* une spécialisation de ce type pour passer à la hauteur (voir notamment les démonstrations des propositions 4.2, 8.2 et 9.1).

Après les points et les polynômes, nous en venons aux variétés. On peut distinguer deux approches pour définir la (même) notion de hauteur d'un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$: l'une transite par la forme de Chow (en suivant Philippon), l'autre par la théorie de l'intersection arithmétique (en suivant Faltings, Bost, Gillet, Soulé). Ici nous nous plaçons dans la première et utilisons [**20**] comme référence. Soient donc $X \subset \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ intègre et F sa forme de Chow. Il s'agit d'un polynôme multihomogène en $\dim X+1$ groupes de $n+1$ variables, de degré $\deg X$ en chaque groupe. La hauteur $h(X)$ de X se définit comme une hauteur du polynôme F mais malheureusement elle diffère encore des hauteurs déjà introduites. Nous la noterons $h_{S_{n+1}^{\dim X+1}}(F)$, où $S_{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est la sphère unité, car elle s'obtient en remplaçant dans l'écriture de $h(F)$ la norme $\|\cdot\|_v$ pour v infinie par $M_v(F)$ avec

$$\log M_v(F) = (\dim X+1)(\deg X)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j} + \int_{S_{n+1}^{\dim X+1}} \log|F_v|\sigma$$

où σ est la mesure invariante de masse totale 1 sur $S_{n+1}^{\dim X+1}$ (voir [**20**, p. 96]). De cette façon, si nous notons encore $M_v(F) = \|F\|_v$ pour v finie, nous avons

$$h(X) = h_{S_{n+1}^{\dim X+1}}(F) = \sum_v \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log M_v(F)$$

pour un corps K contenant les coefficients de F. Il est important de noter ici que si x est un point fermé de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ alors sa hauteur $h(x)$ comme sous-schéma fermé coïncide avec celle définie plus haut.

Finalement on définit la hauteur $h(X)$ d'un fermé quelconque de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ comme la somme des hauteurs de ses composantes irréductibles.

Nous citons un lien entre la hauteur d'un fermé X et la hauteur de ses points.

PROPOSITION 2.1. *Soient X un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et $\varepsilon > 0$. Les points de $X(\bar{\mathbb{Q}})$ de hauteur $\leqslant h(X)/\deg X + \varepsilon$ sont denses dans X et il existe un point de $X(\bar{\mathbb{Q}})$ de hauteur au plus $h(X)/(\dim X+1)\deg X + \varepsilon$. Par ailleurs, pour tout sous-schéma fermé non vide Y de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$, il existe un point de $Y(\bar{\mathbb{Q}})$ de hauteur au plus $h(Y)$ et les points de $Y(\bar{\mathbb{Q}})$ de hauteur au plus $h(Y)+\varepsilon$ sont denses dans Y.*

Démonstration. On rappelle que l'on nomme minimum absolu de X l'infimum des hauteurs des points de X et minimum essentiel l'infimum des réels h tels que les points de X de hauteur au plus h sont denses dans X. On les note $\mu^{\mathrm{abs}}(X)$ et $\mu^{\mathrm{ess}}(X)$. La première partie de l'énoncé signifie alors exactement $\mu^{\mathrm{ess}}(X) \leqslant h(X)/\deg X$ et $\mu^{\mathrm{abs}}(X) \leqslant h(X)/(\dim X+1)\deg X$. Or un théorème de Zhang [**27**, (5.2)] permet d'affirmer $\mu^{\mathrm{ess}}(X) + (\dim X)\mu^{\mathrm{abs}}(X) \leqslant h(X)/\deg X$ (voir aussi [**4**, p. 522]). Ceci nous donne le résultat puisque l'on a évidemment $0 \leqslant \mu^{\mathrm{abs}}(X) \leqslant \mu^{\mathrm{ess}}(X)$. La seconde partie résulte de la première si Y est intègre (avec $\deg Y \geqslant 1$ et $\dim Y \geqslant 1$ si l'on traite séparément le cas évident où Y est un point). Le cas général suit alors facilement par additivité de la hauteur des composantes irréductibles. □

Nous donnons maintenant une version du lemme de Siegel, à la fois sous sa forme classique (sur un corps de nombres) et absolue (sur $\bar{\mathbb{Q}}$). On rappelle que la hauteur de Schmidt $h_S(V)$ d'un sous-espace V de $\bar{\mathbb{Q}}^n$ est la hauteur de ses coordonnées grassmanniennes (autrement dit la hauteur d'un point non nul de la droite $\wedge^{\dim V}V$ dans $\wedge^{\dim V}\bar{\mathbb{Q}}^n$ identifié à $\bar{\mathbb{Q}}^{\binom{n}{\dim V}}$). On pose $\delta_K = \log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|/2[K:\mathbb{Q}]$ lorsque K est un corps de nombres et pour unifier les énoncés on pose $\delta_{\bar{\mathbb{Q}}} = 0$.

Lemme 2.1. *Soit K un corps de nombres ou $\bar{\mathbb{Q}}$. Soit V un sous-espace vectoriel de K^n de dimension d. Il existe une base $x_1, \ldots, x_d$ de V telle que $h(x_1) + \ldots + h(x_d) \leqslant h_S(V) + (d/2)\log d + d\delta_K$.*

Démonstration. La version sur $\bar{\mathbb{Q}}$ suit du théorème de Zhang cité dans la preuve précédente, comme il est expliqué dans [**4**, p. 523–524]. On trouve une base telle que

$$h(x_1) + \ldots + h(x_d) \leqslant h(\tilde{V}) + \varepsilon = h_S(V) + \sum_{j=1}^{d-1}\sum_{\ell=1}^{j} \frac{1}{2\ell} + \varepsilon = h_S(V) + \sum_{\ell=2}^{d} \frac{D}{2\ell} + \varepsilon$$

où $\tilde{V}$ est l'image de V dans $\mathbb{P}^{n-1}(K)$. On utilise alors $\varepsilon = (d/2)(\log d - \sum_{\ell=2}^{d} \frac{1}{\ell})$ pour conclure (on a $\varepsilon > 0$ dès que $d \geqslant 2$ et si $d = 1$ alors $\tilde{V}$ est un point donc $\varepsilon = 0$ convient). Pour un corps de nombres, il s'agit de la version avec normes euclidiennes du lemme de Bombieri–Vaaler qui est évoquée par J. Thunder (voir [**24**, p. 258]). On peut aussi spécialiser au cas commutatif le résultat de la proposition 8.1 de [**12**] avec $\mathrm{vol}(\mathcal{O}) = \sqrt{|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|}$ et l'estimation p. 572. □

Nous utilisons dès à présent ce lemme pour contrôler des générateurs de l'ensemble des éléments de degré donné de l'idéal homogène d'un fermé de $\mathbb{P}^n$.

Proposition 2.2. *Soit K un corps de nombres ou $\bar{\mathbb{Q}}$. Soient X un sous-schéma fermé réduit de $\mathbb{P}^n_K$, I son idéal homogène et D un entier. Il existe des générateurs de I_D dont la somme des hauteurs est au plus*

$$\binom{D+n}{n}\left(Dh(X) + \delta_K + \frac{1}{2}\log\binom{D+n}{n}\right).$$

Si X est de plus irréductible, on a le résultat avec la borne

$$D\binom{D+\dim X}{\dim X}h(X) + \binom{D+n}{n}\left(\delta_K + \frac{1}{2}\log\binom{D+n}{n}\right).$$

Démonstration. Notons d la dimension de $I_D \subset K[X_0, \ldots, X_n]_D$. Par le lemme, l'énoncé vaut avec la borne $h_S(I_D) + d(\delta_K + \frac{1}{2}\log d)$. Il s'agit donc de majorer $h_S(I_D)$ et d. Bien entendu, nous avons $d \leqslant \dim K[X_0, \ldots, X_n]_D = \binom{D+n}{n}$. De plus en cas d'égalité, le résultat est évident (il y a une famille de générateurs de hauteur nulle) donc nous pouvons supposer $d < \binom{D+n}{n}$. Ceci permet de remplacer notre borne par

$$h_S(I_D) - \varepsilon' + \binom{D+n}{n}\left(\delta_K + \frac{1}{2}\log\binom{D+n}{n}\right)$$

pour un certain ε' suffisamment petit. Nous utilisons maintenant le fait (proposition 2.1) que les points de X de hauteur au plus $h(X) + \varepsilon$ sont denses dans X. Si l'on note $\mathcal{E}$ cet ensemble de points, on a donc (X étant réduit)

$$I_D = \{P \in K[X_0, \ldots, X_n]_D \mid \forall y \in \mathcal{E} \quad P(y) = 0\}.$$

En d'autres termes l'orthogonal de I_D dans le dual $(K[X_0, \ldots, X_n]_D)^*$ est engendré par les familles y^D pour $y \in \mathcal{E}$ où y^D désigne la famille des monômes de degré D en des coordonnées de y. Chaque famille est de hauteur au plus $D(h(X) + \varepsilon)$ et d'après l'inégalité de Hadamard

$$h_S(I_D) = h_S(I_D^{\perp}) \leqslant (\dim I_D^{\perp})D(h(X) + \varepsilon).$$

On majore alors simplement $\dim I_D^\perp$ par $\binom{D+n}{n}$ et l'on choisit $\varepsilon = D^{-1}\binom{D+n}{n}^{-1}\varepsilon'$ pour conclure dans le premier cas. Dans le second, on raisonne de même en améliorant deux estimations : d'une part la proposition 2.1 permet de remplacer $h(X)$ par $h(X)/\deg X$ et d'autre part le théorème principal de [3] montre que la fonction de Hilbert $\dim I_D^\perp$ est majorée par $\deg X\binom{D+\dim X}{\dim X}$. □

Nous utiliserons fréquemment le résultat d'intersection suivant.

Proposition 2.3. *Soit X un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Soient $P_1, \ldots, P_s$ des polynômes homogènes de $\bar{\mathbb{Q}}[X_0, \ldots, X_n]$ de degré au plus D et de hauteur modifiée au plus H. Si $\mathcal{V}$ est la famille des composantes irréductibles de l'intersection Y de X avec les zéros de $P_1, \ldots, P_s$ alors*

$$\sum_{V\in\mathcal{V}} D^{\dim V}\deg V \leqslant D^{\dim X}\deg X$$

et, en notant $d = \min\{\dim V \mid V \in \mathcal{V}\}$,

$$\sum_{V\in\mathcal{V}} D^{\dim V+1}h(V) \leqslant D^{\dim X+1}h(X) + (\dim X - d)D^{\dim X}(\deg X)H.$$

En particulier, $\deg Y \leqslant D^{\dim X-d}\deg X$ et

$$h(Y) \leqslant D^{\dim X-d}h(X) + (\dim X - d)D^{\dim X-d-1}(\deg X)H.$$

Démonstration. Si X est irréductible, si $s = 1$ et X n'est pas contenu dans le fermé des zéros de P_1 alors on a $\dim V = \dim X - 1$ pour tout $V \in \mathcal{V}$ puis

$$\sum_{V\in\mathcal{V}} \deg V \leqslant D\deg X \quad \text{et} \quad \sum_{V\in\mathcal{V}} h(V) \leqslant Dh(X) + (\deg X)H$$

(voir le théorème 3.4 et le corollaire 3.6 de [20]). Bien entendu si X est contenu dans les zéros de P_1 alors $Y = X$. Dans le cas général, nous allons démontrer un résultat un peu plus précis que celui de l'énoncé : en notant $\mathcal{V}_0$ la famille des composantes irréductibles de X, nous aurons

$$\sum_{V\in\mathcal{V}} D^{\dim V}\deg V \leqslant \sum_{V_0\in\mathcal{V}_0} D^{\dim V_0}\deg V_0$$

et

$$\sum_{V\in\mathcal{V}} D^{\dim V+1}h(V) \leqslant \sum_{V_0\in\mathcal{V}_0} D^{\dim V_0+1}h(V_0) + \max_{\substack{V\in\mathcal{V}\\ V\subset V_0}}(\dim V_0 - \dim V)D^{\dim V_0}(\deg V_0)H.$$

Ces relations entraînent clairement la proposition. Pour les établir, nous procédons par récurrence sur s. Lorsque $s = 1$ il suffit d'appliquer les majorations obtenues ci-dessus pour X irréductible à chaque composante V_0. On notera de plus que dans ce cas $\{\dim V_0 - \dim V \mid V \in \mathcal{V},\ V \subset V_0\}$ vaut $\{0\}$ ou $\{1\}$ selon que les zéros de P_1 contiennent ou non V_0. Supposons maintenant nos estimations connues pour $s - 1$. Nous notons $\mathcal{V}_1$ la famille des composantes de l'intersection de X avec les zéros de P_1. Par hypothèse de récurrence et le cas $s = 1$, nous savons donc contrôler degrés et hauteurs d'une part de $\mathcal{V}$ en fonction de $\mathcal{V}_1$ et d'autre part de $\mathcal{V}_1$ en fonction de $\mathcal{V}_0$. Il reste à combiner ces inégalités. Pour les degrés, nous avons immédiatement

$$\sum_{V\in\mathcal{V}} D^{\dim V}\deg V \leqslant \sum_{V_1\in\mathcal{V}_1} D^{\dim V_1}\deg V_1 \leqslant \sum_{V_0\in\mathcal{V}_0} D^{\dim V_0}\deg V_0$$

qui donne la relation cherchée au rang s. Pour la hauteur nous majorons d'abord

$$\begin{aligned}
&\sum_{V\in\mathcal{V}} D^{\dim V+1}h(V) - \sum_{V_1\in\mathcal{V}_1} D^{\dim V_1+1}h(V_1)\\
&\quad\leqslant \sum_{V_1\in\mathcal{V}_1} \max_{\substack{V\in\mathcal{V}\\ V\subset V_1}} (\dim V_1 - \dim V)D^{\dim V_1}(\deg V_1)H\\
&\quad\leqslant \sum_{V_0\in\mathcal{V}_0} \sum_{\substack{V_1\in\mathcal{V}_1\\ V_1\subset V_0}} \max_{\substack{V\in\mathcal{V}\\ V\subset V_1}} (\dim V_1 - \dim V)D^{\dim V_1}(\deg V_1)H\\
&\quad\leqslant \sum_{V_0\in\mathcal{V}_0} \max_{\substack{V\in\mathcal{V},\ V_1\in\mathcal{V}_1\\ V\subset V_1\subset V_0}} (\dim V_1 - \dim V) \sum_{\substack{V_1\in\mathcal{V}_1\\ V_1\subset V_0}} D^{\dim V_1}(\deg V_1)H\\
&\quad\leqslant \sum_{V_0\in\mathcal{V}_0} \max_{\substack{V\in\mathcal{V},\ V_1\in\mathcal{V}_1\\ V\subset V_1\subset V_0}} (\dim V_1 - \dim V)D^{\dim V_0}(\deg V_0)H.
\end{aligned}$$

Nous ajoutons ensuite à cette inégalité

$$\sum_{V_1\in\mathcal{V}_1} D^{\dim V_1+1}h(V_1) \leqslant \sum_{V_0\in\mathcal{V}_0} D^{\dim V_0+1}h(V_0) + \max_{\substack{V_1\in\mathcal{V}_1\\ V_1\subset V_0}} (\dim V_0 - \dim V_1)D^{\dim V_0}(\deg V_0)H.$$

Nous obtenons alors le résultat en vertu de

$$\max_{\substack{V_1\in\mathcal{V}_1\\ V_1\subset V_0}} (\dim V_0 - \dim V_1) + \max_{\substack{V\in\mathcal{V},\ V_1\in\mathcal{V}_1\\ V\subset V_1\subset V_0}} (\dim V_1 - \dim V) \leqslant \max_{\substack{V\in\mathcal{V}\\ V\subset V_0}} (\dim V_0 - \dim V)$$

(on rappelle que $\dim V_0 - \dim V_1$ est une constante dans le premier maximum). □

On appelle projection standard un morphisme $\mathbb{P}^n \setminus V\{X_{i_0}, \ldots, X_{i_s}\} \to \mathbb{P}^s$ qui consiste simplement à oublier certaines coordonnées.

Proposition 2.4. *Soient X un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et Y l'image de X par une projection standard. Alors* $\deg Y \leqslant \deg X$,

$$h(Y) \leqslant h(X) + 3(\dim X + 1)(\deg X)\log(n+1)$$

et $h(Y) \leqslant (\dim Y + 1)h(X)$.

Démonstration. Pour la première partie voir le lemme 2.6 de [**11**]. Pour la seconde, par le théorème de Zhang [**27**, (5.2)] (voir démonstration de la proposition 2.6), $h(Y) \leqslant (\dim Y + 1)(\deg Y)\mu^{\mathrm{ess}}(Y)$. Comme la hauteur des points décroît par projection standard, $\mu^{\mathrm{ess}}(Y) \leqslant \mu^{\mathrm{ess}}(X)$. Enfin, à nouveau par l'encadrement de Zhang, on a $(\deg X)\mu^{\mathrm{ess}}(X) \leqslant h(X)$. Cela donne le résultat. □

Nous étudions maintenant le comportement de la hauteur par un automorphisme de $\mathbb{P}^n$.

Proposition 2.5. *Soient M une matrice de $\mathrm{GL}_{n+1}(\bar{\mathbb{Q}})$, X un fermé de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et Y son image par l'automorphisme $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ donné par M. Alors*

$$h(Y) \leqslant h(X) + (\dim X + 1)(\deg X)(h_\infty(M) + 3\log(n+1)).$$

Démonstration. Il n'y a pas de restriction à supposer X intègre. Soit alors F sa forme de Chow et G celle de Y. En notant (a_{ij}) les coefficients de M, on a alors pour une place infinie v

$$\log M_v(G) = (\dim X + 1)(\deg X)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j} + \int_{S_{n+1}^{\dim X+1}} \log\left|F\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a_{kj} z_k^{(i)}\right)_{i,j}\right)\right|_v \sigma$$

où $1 \leqslant i \leqslant \dim X + 1$ et $0 \leqslant j \leqslant n$. Ensuite, si $F = \sum_{\mathfrak{m}} p_{\mathfrak{m}}\mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ parcourt les monômes de multidegré $\delta = (\deg X, \ldots, \deg X) \in \mathbb{N}^{\dim X+1}$, alors $|p_{\mathfrak{m}}|_v \leqslant \binom{\delta}{\mathfrak{m}} M_v(F)$ donc pour $z \in (\mathbb{C}_v^{n+1})^{\dim X+1}$ on a $|F(z)|_v \leqslant \sum_{\mathfrak{m}} \binom{\delta}{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}(|z|_v) M_v(F) = M_v(F)\prod_{i=1}^{\dim X+1}(|z_0^{(i)}|_v + \ldots + |z_n^{(i)}|_v)^{\deg X}$; il suit que pour $z \in S_{n+1}^{\dim X+1}$ on a

$$\begin{aligned}\left|F\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a_{kj} z_k^{(i)}\right)_{i,j}\right)\right|_v &\leqslant M_v(F)\prod_{i=1}^{\dim X+1}\left(\sum_{k,j}|a_{kj}|_v\right)^{\deg X}\\ &\leqslant M_v(F)((n+1)^2 \max_{i,j}|a_{ij}|_v)^{(\dim X+1)\deg X}.\end{aligned}$$

Enfin, en majorant $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j}$ par $\log(n+1)$, il vient

$$M_v(G) \leqslant M_v(F)((n+1)^3 \max_{i,j}|a_{ij}|_v)^{(\dim X+1)\deg X}$$

et cela donne le résultat, avec une estimation immédiate aux places finies. □

Nous citons pour mémoire le résultat donnant la hauteur d'un produit.

LEMME 2.2. *Soient $\varphi : \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^m_{\bar{\mathbb{Q}}} \to \mathbb{P}^{n+m+nm}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ le plongement de Segre, X un fermé de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$, Y un fermé de $\mathbb{P}^m_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et $Z = \varphi(X \times Y)$. Alors*

$$\deg Z = \binom{\dim Z}{\dim X}(\deg X)(\deg Y)$$

et

$$h(Z) = \binom{\dim Z + 1}{\dim Y}(\deg Y)h(X) + \binom{\dim Z + 1}{\dim X}(\deg X)h(Y).$$

Démonstration. Voir par exemple [20], page 103 et corollaire 2.4 page 105. □

Terminons cette partie par une estimation de la hauteur d'une courbe plane.

LEMME 2.3. *Soient F un polynôme homogène de degré D et irréductible dans $\bar{\mathbb{Q}}[X_0, X_1, X_2]$ et C la courbe de $\mathbb{P}^2_{\bar{\mathbb{Q}}}$ qu'il définit. Alors*

$$h(C) \leqslant h_\infty(F) + \tfrac{5}{2}D.$$

Démonstration. D'après la dernière formule du théorème 3.4 page 112 de [20], nous avons $h(C) = h_{S^3}(F) + D/2$. De plus

$$\begin{aligned}h_{S^3}(F) &= \sum_{v \nmid \infty}\frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]}\log\|F\|_v + \sum_{v\mid\infty}\frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]}\int_{S_3}\log|F_v|\sigma + D\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2j}\\ &\leqslant h_\infty(F) + \log\binom{D+2}{2} + \frac{3D}{4}\end{aligned}$$

par un calcul direct. Il reste seulement à majorer $\binom{D+2}{2} \leqslant 3^D \leqslant \exp(5D/4)$. □

Remarquons en complément à ce lemme que si nous plongeons $\mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{P}^3$ comme un plan de coordonnées alors $h(C \hookrightarrow \mathbb{P}^2) = h(C \hookrightarrow \mathbb{P}^3)$ pour toute courbe plane C (voir la remarque sur l'ajout de variables muettes [20] page 97).

3. *Lemme de projection*

Nous montrons la proposition 1.1. Nous nous plaçons sous ses hypothèses.

LEMME 3.1. *Il existe un fermé irréductible X de $\mathbb{P}^n_K$ de dimension au plus 3 et de degré au plus $(n+1)(n+2)D^2 - 2(n+1)D$ contenant toutes les sécantes de C et toutes les tangentes à C.*

Démonstration. Notons Δ la diagonale de $C \times C$ et Z le fermé de $(\mathbb{P}^n)^3$ correspondant aux triplets de points alignés. Alors $\Delta \times \mathbb{P}^n \subset Z$ et si l'on note $Y = (C \times C \times \mathbb{P}^n) \cap Z \setminus \Delta \times \mathbb{P}^n = ((C \times C \setminus \Delta) \times \mathbb{P}^n) \cap Z$ alors l'union des sécantes de C coïncide avec $p_3(Y)$. Les fibres de la projection $p_{12} : Y \to C \times C \setminus \Delta$ sont toutes de dimension 1 donc $\dim Y = 3$. De plus Y est irréductible car tout point $y \in Y$ a un voisinage isomorphe à un ouvert de $C \times C \times \mathbb{P}^1$ (en paramétrant les sécantes localement). Par ailleurs $\dim \Delta \times \mathbb{P}^n = n + 1 > 3$. Il suit de cela que $(C \times C \times \mathbb{P}^n) \cap Z$ a exactement deux composantes irréductibles qui sont $\Delta \times \mathbb{P}^n$ et $\overline{Y}$. Montrons que $X = p_3(\overline{Y}) = \overline{p_3(Y)}$ convient. Par construction, il contient les sécantes de C ; en outre les tangentes à C sont contenues dans l'adhérence des sécantes (car sur $\mathbb{C}$ on peut écrire une tangente comme limite de sécantes). Enfin pour le degré on a : $\deg X = \deg p_3(\overline{Y}) \leqslant \deg \overline{Y} = \deg(C \times C \times \mathbb{P}^n) \cap Z - \deg \Delta \times \mathbb{P}^n$. Ici les degrés sont calculés dans le plongement de Segre $(\mathbb{P}^n)^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)^3-1}$ (ce qui fait de p_3 une projection linéaire et justifie l'inégalité). Maintenant $\deg(C \times C \times \mathbb{P}^n) = ((n+2)!/n!)D^2$ et $\deg(\Delta \times \mathbb{P}^n) = (n+1)\deg \Delta = 2(n+1)D$ (voir lemme 2.2). De plus Z est défini dans $(\mathbb{P}^n)^3$ par l'annulation de mineurs 3×3 qui deviennent des formes linéaires sur $\mathbb{P}^{(n+1)^3-1}$ donc $\deg(C \times C \times \mathbb{P}^n) \cap Z \leqslant \deg(C \times C \times \mathbb{P}^n)$ et ceci donne l'estimation de $\deg X$. □

Il reste à faire une projection depuis un sous-espace linéaire qui ne rencontre pas X.

LEMME 3.2. *Sous les hypothèses de la proposition* 1.1, *il existe une matrice M de $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ avec $h_\infty(M) \leqslant \log(((n+1)(n+2)/2)D^2 - (n+1)D)$ en général et $h_\infty(M) = 0$ si $K = \bar{\mathbb{Q}}$ telle que la composée de $C \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$, de l'automorphisme $\mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$ défini par M et de la projection linéaire standard de $\mathbb{P}^n_K \setminus V(X_0, X_1, X_2, X_3)$ sur $\mathbb{P}^3_K$ est une immersion fermée.*

Démonstration. Notons χ l'automorphisme défini par M. D'après [7, proposition 3.4, p. 309] il suffit de vérifier que $\chi^{-1}(V(X_0, X_1, X_2, X_3))$ ne rencontre aucune sécante ni tangente à C autrement dit $\chi(X) \cap V(X_0, \ldots, X_3) = \emptyset$ avec X défini dans le lemme précédent. La proposition 2.2 de [22] montre que l'on peut choisir M à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de valeurs absolues au plus $\deg X/2$. C'est le résultat pour un corps quelconque. Pour $\bar{\mathbb{Q}}$ on peut choisir M à coefficients dans les racines de l'unité d'où $h_\infty(M) = 0$. □

Démonstration de la proposition 1.1. D'après les propositions 2.4 et 2.5 et le lemme précédent, nous avons l'estimation de hauteur : $h(C \hookrightarrow \mathbb{P}^3) \leqslant h(C \hookrightarrow \mathbb{P}^n) + 2D(h_\infty(M) + 6\log(n+1))$. Pour $K \neq \bar{\mathbb{Q}}$ on majore $h_\infty(M)$ par $2\log(n+1)D$ et ceci est le résultat. □

4. *Normalisation*

L'objectif est ici de démontrer le théorème 1.5. Nous commençons par une réduction facile. On note $G(X,Y,Z) = Z^D F(X/Z, Y/Z)$, de même hauteur que F, et C la courbe définie par G dans $\mathbb{P}^2_K$. Si C est lisse, le théorème devient très facile (on plonge $C \hookrightarrow \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ et l'on utilise le lemme 2.3 avec la remarque subséquente). Nous supposerons donc que C est singulière. Ceci nous permet de supposer dans la suite de cette partie $D \geqslant 4$. En effet si $D \leqslant 3$ et si C n'est pas lisse alors $D = 3$ et C est une cubique singulière. Elle a un unique point singulier qui est donc rationnel sur K. On en déduit $\tilde{C} \simeq \mathbb{P}^1_K$ et il n'y a aucune difficulté à plonger $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^3$ (degré 1, hauteur 0).

Lemme 4.1. *Quitte à augmenter $h_\infty(F)$ d'au plus D^2, nous pouvons supposer que le point $(0:1:0)$ n'appartient pas à C et que la droite $Z = 0$ ne contient pas de point singulier de C.*

Démonstration. Nous choisissons $\alpha \in K$ tel que $G(\alpha, 1, 0) \neq 0$ puis $\beta \in K$ tel que la droite $Z = \beta(X - \alpha Y)$ ne rencontre C qu'en des points lisses. Dans le premier cas, il s'agit d'éviter au plus D valeurs pour α donc nous pouvons choisir $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $|\alpha| \leqslant (D+1)/2$. Dans le second cas, comme pour β variant le point commun des droites est $(\alpha : 1 : 0) \notin C$, il s'agit d'éviter au plus $(D-1)(D-2)/2$ points (car le nombre des points singuliers de C est au plus égal à son genre arithmétique, voir [7, 1.8(a), p. 298]). Par suite $\beta \in \mathbb{Z}$ et $|\beta| \leqslant (D^2 - 3D + 4)/4$ est possible. Maintenant, en posant $H(X,Y,Z) = G(X + \alpha Y, Y, \beta X + Z)$, nous voyons que la courbe C' définie par H, isomorphe à C, vérifie les hypothèses de l'énoncé. Nous remplaçons donc F par $H(X,Y,1)$ et il reste à montrer $h_\infty(H) \leqslant h_\infty(G) + D^2$ pour conclure. Pour une place finie $|H|_v \leqslant |G|_v$ car $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tandis que pour une place infinie $|H|_v |G|_v^{-1}$ est inférieur à la longueur du polynôme $((X + |\alpha| Y) + Y + (|\beta| X + Z))^D$ c'est-à-dire $(3 + |\alpha| + |\beta|)^D$. On conclut en majorant facilement $\log(3 + |\alpha| + |\beta|)$ par D. $\square$

Remarque : sur $\bar{\mathbb{Q}}$ on peut faire un peu mieux en prenant pour α et β des racines de l'unité.

Dorénavant, nous supposons que C satisfait les conclusions du lemme. Nous allons plonger sa normalisée $\tilde{C}$ dans $\mathbb{P}^3$ en contrôlant sa hauteur en fonction de $h_\infty(F)$ et, *in fine*, nous remplacerons $h_\infty(F)$ par $h_\infty(F) + D^2$ pour couvrir le cas général et obtenir le théorème 1.5.

Nous notons E_∞ le diviseur découpé par $Z = 0$ et $E = (D-2)E_\infty$. Comme ces diviseurs sont à support dans le lieu lisse de C, nous pouvons également les voir comme diviseurs de $\tilde{C}$. En outre $\deg(E) = D(D-2)$ donc $\deg(E) \geqslant 2g + 1$ où g est le genre de $\tilde{C}$ (inférieur au genre arithmétique $(D-1)(D-2)/2$ de C). Par conséquent E est très ample sur $\tilde{C}$ (voir [7, p. 308]) et nous allons utiliser ce diviseur pour plonger $\tilde{C}$.

Quitte à multiplier F par une constante non nulle, nous supposons pour simplifier $G(0,1,0) = 1$. Nous notons encore $K(C) = K(\tilde{C})$ le corps de fonctions de notre courbe, $x, y \in K(C)$ les éléments donnés par $x = X/Z$, $y = Y/Z$ puis $A = K[x,y] \subset K(C)$ et $\tilde{A}$ la clôture intégrale de A dans $K(C)$. Enfin $\Delta \in K[x]$ sera le discriminant de $F(x, Y)$ (polynôme unitaire en Y à coefficients dans $K[x]$ de degré D).

Nous voyons les sections de $\mathcal{O}_C(E)$ et $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(E)$ comme éléments de $K(C)$ (le faisceau $\mathcal{O}_C(-E)$ est l'idéal de E inclus dans $\mathcal{O}_C$ ce qui fixe une inclusion $\mathcal{O}_C \subset \mathcal{O}_C(E)$ et donc de $\mathcal{O}_C(E)$ dans le faisceau constant de fibre $K(C)$ voir [7, p. 144–145] ; la même chose vaut pour $\tilde{C}$).

Proposition 4.1. *Dans $K(C)$ nous avons*

$$\Gamma(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(E)) = \tilde{A} \cap \left\{ \frac{P(x,y)}{\Delta} \mid P \in K[X,Y],\ \deg P \leqslant \deg \Delta + D - 2 \right\}.$$

Démonstration. Commençons par rappeler l'inclusion $\tilde{A} \subset \Delta^{-1}A$: on l'obtient facilement en écrivant que $\mathrm{Tr}_{K(C)/K(x)}(zy^i) \in K[x]$ pour $z \in \tilde{A}$ (voir l'argument donné page 264 de [**26**]). Notons ensuite que, comme X ne s'annule pas sur $\mathrm{Supp}(E_\infty)$ (du fait de l'hypothèse $(0:1:0) \notin C$), E_∞ est exactement le diviseur des pôles de $x \in K(C)$ et, plus généralement, le diviseur des pôles de $P \in K[x]$ est $(\deg P)E_\infty$. Maintenant par définition A est l'anneau des sections de $\mathcal{O}_C$ sur l'ouvert $C \setminus \mathrm{Supp}(E_\infty)$ et $\tilde{A}$ celui de $\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ sur $\tilde{C} \setminus \mathrm{Supp}(E_\infty)$. Par conséquent, pour $n \geqslant 0$, l'espace $\Gamma(C, \mathcal{O}_C(nE_\infty))$ coïncide dans $K(C)$ avec les éléments s de A tels que sx^{-n} n'a pas de pôles sur $\mathrm{Supp}(E_\infty)$. La même description vaut pour $\Gamma(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(nE_\infty))$ en remplaçant simplement A par $\tilde{A}$. En utilisant $\tilde{A} \subset \Delta^{-1}A$ il vient :

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(nE_\infty)) &= \tilde{A} \cap \left\{ \frac{s}{\Delta} \,\middle|\, s \in A \text{ et } \frac{s}{\Delta x^n} \text{ sans pôles dans } \mathrm{Supp}(E_\infty) \right\} \\ &= \tilde{A} \cap \left\{ \frac{s}{\Delta} \,\middle|\, s \in A \text{ et } \frac{s}{x^{\deg \Delta + n}} \text{ sans pôles dans } \mathrm{Supp}(E_\infty) \right\} \\ &= \tilde{A} \cap \left\{ \frac{s}{\Delta} \,\middle|\, s \in \Gamma(C, \mathcal{O}_C((\deg \Delta + n)E_\infty)) \right\}.\end{aligned}$$

Pour conclure, il va nous suffire de montrer pour $n \geqslant D-2$

$$\Gamma(C, \mathcal{O}_C(nE_\infty)) = \{P(x,y) \mid P \in K[X,Y],\ \deg P \leqslant n\}.$$

Puisque $\mathcal{O}_C(E_\infty)$ est la restriction de $\mathcal{O}(1)$ de $\mathbb{P}^2$ à C, ceci revient à montrer la surjectivité de l'application

$$\pi : \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \Gamma(C, \mathcal{O}(n)|_C) = \Gamma(C, \mathcal{O}_C(nE_\infty))$$

(on notera que Z^n s'envoie sur 1 lorsque l'on voit les sections de $\mathcal{O}_C(nE_\infty)$ dans $K(C)$). Le noyau de π est $\Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n-D))$ puisque l'idéal de C est engendré par un polynôme de degré D donc de dimension $\binom{n-D+2}{2}$ pour $n \geqslant D-2$. Par suite le rang de φ est $\binom{n+2}{2} - \binom{n-D+2}{2} = nD + 1 - (D-1)(D-2)/2$. Finalement ceci est bien la dimension de $\Gamma(C, \mathcal{O}(n)|_C)$ d'après Riemann-Roch (voir [**7**, 1.9(d), p. 298]) car $\deg \mathcal{O}(n)|_C = nD \geqslant D(D-2) > (D-1)(D-2) - 2$. □

Nous identifions à présent l'espace $V = \{P(x,y)/\Delta \mid P \in K[X,Y],\ \deg P \leqslant \deg \Delta + D - 2\}$ avec K^{N+1} où $N + 1 = D(\deg \Delta + (D-1)/2)$ en choisissant comme base les $\Delta^{-1}x^iy^j$ avec $i + j \leqslant \deg \Delta + D - 2$ et $0 \leqslant j \leqslant D-1$. Nous pouvons alors estimer la hauteur (de Schmidt) du sous-espace $\tilde{A} \cap V$ de V.

Proposition 4.2. *Avec les conventions ci-dessus nous avons*

$$h_S(\tilde{A} \cap V) \leqslant D^{D^3-9}(2D^{-1}h_\infty(F) + \log 16).$$

Démonstration. L'idée consiste à écrire des équations polynomiales pour $\tilde{A} \cap V$ en utilisant les formules de Newton (pour celles-ci voir par exemple [**9**, p. 140]). Si nous notons Σ l'ensemble des plongements de l'extension $K(C)/K(x)$ dans une clôture normale alors un élément $s \in K(C)$ appartient à $\tilde{A}$ si et seulement si pour tout m avec $1 \leqslant m \leqslant D$ on a $\sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(s^m) \in K[x]$: cela vient des formules suscitées que l'on peut inverser puisque $\mathbb{Q} \subset K[x]$. Écrivons maintenant un élément s de V sous la forme $s = \sum_{j=0}^{D-1} \Delta^{-1}P_j(x)y^j$ où $P_j(x) = \sum_{i=0}^{\delta+D-2-j} u_{ij}x^i$ (nous abrégeons dans toute cette démonstration $\delta = \deg \Delta$). Alors

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(s^m) = \Delta^{-m} \sum_{j_1=0}^{D-1} \cdots \sum_{j_m=0}^{D-1} \left(\prod_{i=1}^{m} P_{j_i}(x) \right) \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(y^{j_1+\cdots+j_m}).$$

De plus, pour tout $\ell \geqslant 0$, le terme $\sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(y^\ell)$ est un polynôme en x que nous notons Q_ℓ. Nous obtenons que $s \in \tilde{A}$ si et seulement si pour tout m, $1 \leqslant m \leqslant D$, le reste R_m de la division euclidienne de $S_m = \sum_{j_1,\dots,j_m} P_{j_1} \cdot \ldots \cdot P_{j_m} Q_{j_1+\ldots+j_m}$ par Δ^m est nul. Ce reste R_m s'exprime comme un polynôme en x dont les coefficients sont des polynômes homogènes en les u_{ij} tous de degré m : ce sont les équations cherchées de $\tilde{A} \cap V$. Estimons leurs hauteurs. Tout d'abord les formules de Newton montrent que Q_ℓ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ en les fonctions symétriques élémentaires p_i des $\sigma(y)$ qui est homogène de degré ℓ si p_i est comptée de poids i et de longueur au plus $2^\ell - 1$. Ensuite puisque $F(x,Y)$ s'écrit $Y^D + \sum_{i=1}^{D} (-1)^i p_i(x) Y^{D-i}$ nous avons $\deg_x p_i \leqslant i$ et $h_\infty(1, p_1, \dots, p_D) = h_\infty(F)$. En combinant, nous en déduisons que Q_ℓ est un polynôme sur $\mathbb{Z}$ en x et les coefficients de F, de degré au plus ℓ en chacun de ses groupes de variables et de longueur au plus 4^ℓ (ceci s'obtient en majorant la longueur de p_i par 2^i). Ensuite, S_m s'écrit comme polynôme sur $\mathbb{Z}$ en x, les u_{ij} et les coefficients de F, de degré au plus respectivement $m(\delta + D - 2)$, m et $m(D-1)$ puis de longueur au plus

$$\sum_{j_1,\dots,j_m} 4^{j_1+\ldots+j_m} \prod_{i=1}^{m} (\delta + D - 1 - j_i) \leqslant \left(\sum_{j=0}^{D-1} 4^j (\delta + D - 1 - j) \right)^m \leqslant 4^{mD} (\delta + D)^m.$$

Enfin, pour passer de S_m à R_m, nous utilisons le lemme 2.4 de [**22**] : l'opération consiste à remplacer chaque x^n par $\sum_{i=0}^{m\delta-1} U_{n,i}(\Delta^m) x^i$ où $U_{n,i}$ est polynôme sur $\mathbb{Z}$ en les coefficients de Δ^m de degré au plus n et de longueur au plus 2^n. Si nous faisons ceci pour chaque n entre 0 et $m(\delta + D - 2)$ nous obtenons que chaque coefficient d'une puissance de x dans R_m est un polynôme sur $\mathbb{Z}$ en les u_{ij}, les coefficients de F et les coefficients de Δ^m de degrés respectifs au plus m, $m(D-1)$ et $m(\delta + D - 2)$ de longueur au plus $2^{m(\delta+D-2)} 4^{mD} (\delta + D)^m$. Avec $m \leqslant D$, ceci prouve que la hauteur modifiée de nos équations, vues comme polynômes homogènes en les u_{ij}, est majorée par

$$D(D-1) h_\infty(F) + D(\delta + D - 2) \max_{1 \leqslant m \leqslant D} h_\infty(\Delta^m) + D(\delta + 3D - 2) \log 2 + D \log(\delta + D).$$

Pour continuer, nous majorons maintenant δ et $h_\infty(\Delta^m)$. Nous écrivons Δ comme le résultant de $F(x,Y) = Y^D + \sum_{i=1}^{D} (-1)^i p_i(x) Y^{D-i}$ et de sa dérivée $DY^{D-1} + \sum_{i=1}^{D-1} (-1)^i (D - i) p_i(x) Y^{D-i-1}$. Sur l'écriture comme déterminant, nous voyons que Δ est un polynôme sur $\mathbb{Z}$ en les $p_i(x)$ homogène de degré $D(D-1)$ (si p_i est de poids i) et de longueur au plus $(2D-1)! D^D$. Ceci montre $\delta \leqslant D(D-1)$. Si nous comptons plus simplement chaque p_i de poids 1, nous trouvons que Δ est un polynôme en les coefficients de F de degré au plus $2(D-1)$. Enfin, comme polynôme en x et les coefficients de F, la longueur de Δ est au plus $(2D-1)! D^D 2^{D(D-1)} \leqslant 2^{4D^2}$. Il vient alors

$$h_\infty(\Delta^m) \leqslant 2m(D-1) h_\infty(F) + 4mD^2 \log 2.$$

En combinant nous obtenons comme majorant de la hauteur modifiée des équations définissant $\tilde{A} \cap V$ dans V :

$$D(D-1)(1 + 2D(D^2-2)) h_\infty(F) + (4D^4(D^2-2) + D(D^2 + 2D - 2)) \log 2 + 2D \log D,$$

ce que nous majorons encore (on rappelle ici $4 \leqslant D$) par

$$H = 2D^5 h_\infty(F) + 4D^6 \log 2 - 3D^4.$$

Notons par ailleurs $N + 1 = D(\delta + (D-1)/2) \leqslant D(D-1)(D + 1/2)$.

A ce stade, nous majorons la hauteur de Schmidt de $\tilde{A} \cap V$ par la hauteur projective de l'espace des droites de $\tilde{A} \cap V$ dans $\mathbb{P}^N$ (qui est l'espace des droites de $V \simeq K^{N+1}$). Pour cette majoration voir par exemple [**4**, p. 523]. Cet espace est de dimension $d = \dim \Gamma(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(E)) - 1$ donc avec la proposition 2.3 nous avons

$$h_S(\tilde{A} \cap V) \leqslant D^{N-d} h(\mathbb{P}^N) + N D^{N-d-1} H.$$

On constate sans peine $DN^{-1} h(\mathbb{P}^N) \leqslant D \log(N+1) \leqslant 3D^2 \leqslant 3D^4$ donc

$$h_S(\tilde{A} \cap V) \leqslant N D^{N-d+5} (2D^{-1} h_\infty(F) + \log 16).$$

Par Riemann–Roch, nous avons $d = D(D-2) - g$ où g est le genre de $\tilde{C}$. Comme C est singulière, $g \leqslant (D-1)(D-2)/2 - 1 = D(D-3)/2$ donc $d \geqslant D(D-1)/2$. Ensuite

$$N - d + 5 \leqslant D(D-1)(D+1/2) - D(D-1)/2 + 4 = D^3 - D^2 + 4 \leqslant D^3 - 12$$

puis

$$ND^{N-d+5} \leqslant D^3 D^{D^3-12} \leqslant D^{D^3-9},$$

ce qui conclut la démonstration, tout au moins lorsque $K = \bar{\mathbb{Q}}$. Dans le cas d'un corps non algébriquement clos, l'argument précédent ne vaut *a priori* pas tel quel puisque le fermé de $\mathbb{P}^n$ trouvé pourrait contenir strictement l'espace des droites de $\tilde{A} \cap V$ tout en ayant les mêmes points rationnels. On constate toutefois que ceci ne se produit pas en raisonnant à la fois sur K et $\overline{K}$ ou, plus simplement, on calcule directement la hauteur de Schmidt sur $\bar{K}$; nous utilisons pour cela le fait que C est géométriquement intègre (voir l'hypothèse du théorème 1.5) et donc que $\tilde{A} \otimes \bar{K} = \widetilde{A \otimes \bar{K}}$ est l'anneau affine de la courbe intègre $\tilde{C} \times \mathrm{Spec}\bar{K}$ normalisée de $C \times \mathrm{Spec}\,\bar{K}$. □

La combinaison des deux propositions précédentes et d'un lemme de Siegel permet de contrôler des générateurs de $\Gamma(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(E))$ et donc, si nous notons $d+1$ comme ci-dessus la dimension de cet espace, de décrire un plongement de $\tilde{C}$ dans $\mathbb{P}^d$. Nous pourrions expliciter ceci puis appliquer la proposition 1.1 pour passer à $\mathbb{P}^3$ mais nous préférons faire les estimations de hauteur directement dans un espace projectif de petite dimension (pour des raisons techniques il s'agira de $\mathbb{P}^5$ plutôt que $\mathbb{P}^3$).

PROPOSITION 4.3. *Il existe trois polynômes $P_1, P_2, P_3 \in K[X,Y]$ tels que chaque quotient $\Delta^{-1}P_i(x,y)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ appartient à $\tilde{A} \cap V$, la famille de sections $1, \Delta^{-1}P_1(x,y), \Delta^{-1}P_2(x,y)$, $\Delta^{-1}P_3(x,y)$ définit une immersion fermée $\tilde{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ et*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 3} h(P_i) \leqslant D^{D^3-9}(2D^{-1}h_\infty(F) + \log 16) + D^3 + (D-1)^2\delta_K.$$

Démonstration. Notons d'abord que $d + 1 = (D-1)^2 - g \leqslant (D-1)^2$. Par le lemme 2.1 il existe une base $(\Delta^{-1}\tilde{P}_i(x,y))_{0\leqslant i\leqslant d}$ de $\Gamma(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(E))$ avec

$$\sum_{i=0}^{d} h(\tilde{P}_i) \leqslant h_S(\tilde{A} \cap V) + (D-1)^2(\log(D-1) + \delta_K).$$

Cette assertion demeure inchangée si nous multiplions chaque $\tilde{P}_i$ par un scalaire non nul donc nous pouvons supposer que, pour tout i, l'un des coefficients de $\tilde{P}_i$ est égal à 1. Par ailleurs, si nous plongeons $\tilde{C}$ dans $\mathbb{P}^d$ à l'aide de cette base, son degré est $D(D-2)$ (le degré de E) donc le lemme 3.1 nous assure que sécantes et tangentes de $\tilde{C}$ sont contenues dans un fermé irréductible X de dimension 3 et de degré au plus $(d+1)(d+2)D^2(D-2)^2 \leqslant D^8$ de $\mathbb{P}^d$. Par conséquent pour construire une immersion fermée dans $\mathbb{P}^3$ (voir l'argument du lemme 3.2) il suffit de trouver quatre éléments de $\Gamma(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(E))$ tels que si L_0, L_1, L_2 et L_3 sont les formes linéaires correspondantes sur $\mathbb{P}^d$ l'on ait $X \cap V(L_0, L_1, L_2, L_3) = \emptyset$. Nous pouvons choisir pour L_0 la forme correspondant à $1 \in \Gamma(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(E))$ car cette section ne s'annule pas identiquement sur $\tilde{C}$ et donc $X \cap V(L_0)$ est de dimension 2. Ensuite comme $X \cap V(L_0, L_1, L_2, L_3) = \emptyset$ se traduit par une non-annulation de la forme de Chow de X nous pouvons choisir les coefficients de L_1, L_2, L_3 dans $\mathbb{N}$ inférieurs ou égaux à D^8 (voir la démonstration de la proposition 2.2 de [**22**]). Ceci signifie que l'on obtient P_1, P_2 et P_3 comme dans l'énoncé chacun de la forme $\sum_{i=0}^{d} \lambda_i \tilde{P}_i$ avec $0 \leqslant \lambda_i \leqslant D^8$. On constate sans peine que la hauteur d'une telle combinaison linéaire est au plus $\log(D^8\sqrt{d+1}) + \sum_{i=0}^{d} h(\tilde{P}_i)$ si bien que, pour conclure, il nous suffit de noter $(D-1)^2\log(D-1)+\log(D^8\sqrt{d+1})\leqslant D^3$ (avec $4\leqslant D$) et de reporter l'estimation de $h_S(\tilde{A}\cap V)$. □

Il nous reste à majorer la hauteur de la courbe.

Proposition 4.4. *Dans le cadre de la proposition précédente, la hauteur de l'image de $\tilde{C}$ dans $\mathbb{P}^3$ est au plus*

$$3D^3(D^2-2)\left(\max_{1\leqslant i\leqslant 3} h(P_i)+3Dh_\infty(F)+5D^2\right).$$

Démonstration. Pour pouvoir écrire commodément des équations nous plongeons en fait $\tilde{C}$ dans $\mathbb{P}^5$ à l'aide de la famille $1,x,y,\Delta^{-1}P_1(x,y),\Delta^{-1}P_2(x,y),\Delta^{-1}P_3(x,y)$ de sections de $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(E)$. Si nous notons $W_0,\ldots,W_5$ les coordonnées de $\mathbb{P}^5$, nous avons sur $\tilde{C}$ les équations homogènes $W_0^DF(W_1/W_0,W_2/W_0)=0$ et

$$\Delta(W_1/W_0)W_{2+i}W_0^{\mu_i-1}=W_0^{\mu_i}P_i(W_1/W_0,W_2/W_0)$$

pour $1\leqslant i\leqslant 3$ où $\mu_i=\max(\deg P_i,\deg\Delta+1)$. De plus, sur l'ouvert défini par $W_0\neq 0$ et $\Delta(W_1/W_0)\neq 0$ dans $\mathbb{P}^5$, ces quatre équations découpent un schéma affine isomorphe à $\operatorname{Spec}A_\Delta$ qui est un ouvert de $\tilde{C}$. Par suite $\tilde{C}$ est une composante du lieu des zéros de ces équations. Maintenant la première est de degré D et de hauteur modifiée $h_{\mathrm{m}}(F)\leqslant h_\infty(F)+\sqrt{3}$ tandis que les trois autres sont de degré $\mu_i\leqslant D^2-2$ et de hauteur modifiée au plus $H=h(\Delta)+\max_{1\leqslant i\leqslant 3}h(P_i)+\log\sqrt{2}$. En coupant successivement par les hypersurfaces définies par ces polynômes nous obtenons (proposition 2.3) :

$$h(\tilde{C}\hookrightarrow\mathbb{P}^5)\leqslant D(D^2-2)^3h(\mathbb{P}^5)+(D^2-2)^3h_{\mathrm{m}}(F)+3D(D^2-2)^2H.$$

Nous passons à $\mathbb{P}^3$ par une projection standard donc (proposition 4.2) la hauteur augmente d'au plus $6D(D-2)\log 6$ puisque $\deg\tilde{C}=D(D-2)$. Ainsi

$$h(\tilde{C}\hookrightarrow\mathbb{P}^3)\leqslant 3D^3(D^2-2)(H+Dh_{\mathrm{m}}(F)+3D^2/2+2D^{-3}\log 6)$$

en majorant $h(\mathbb{P}^5)=87/20\leqslant 9/2$. Ensuite nous utilisons $h(\Delta)\leqslant 2Dh_\infty(F)+4D^2\log 2$ (voir démonstration de la proposition 4.2) et il reste à constater

$$D\sqrt{3}+3D^2/2+\log\sqrt{2}+2D^{-3}\log 6+4D^2\log 2\leqslant 5D^2$$

(toujours avec $D\geqslant 4$). □

En combinant nos résultats nous avons plongé $\tilde{C}$ dans $\mathbb{P}^3$ avec une hauteur au plus

$$\begin{aligned}&3D^3(D^2-2)(D^{D^3-9}(2D^{-1}h_\infty(F)+\log 16)+3Dh_\infty(F)+5D^2+D^3+(D-1)^2\delta_K)\\&\quad\leqslant 3D^{D^3-4}(2D^{-1}h_\infty(F)+\log 16)+3D^5(D-1)^2\delta_K.\end{aligned}$$

Finalement, pour obtenir le théorème 1.5, il faut ajouter D^2 à $h_\infty(F)$ (pour s'affranchir de la réduction du lemme 4.1). Nous majorons donc

$$2D^{-1}(h_\infty(F)+D^2)+\log 16\leqslant 2D^{-1}h_\infty(F)+2D+D$$

pour obtenir la borne finale de

$$D^{D^3-5}(6h_\infty(F)+9D^2)+3D^7\delta_K.$$

5. *Mauvaise réduction et rang*

Pour estimer la mauvaise réduction de la courbe C, nous devons travailler avec des modèles entiers. Nous commençons par un lemme facile sur la hauteur d'un représentant entier d'un point projectif.

LEMME 5.1. *Soient K un corps de nombres et $x \in \mathbb{P}^n_K(K)$. Il existe un système de coordonnées $x_0, \ldots, x_n$ de x dans $\mathcal{O}_K$ avec $h(1, x_0, \ldots, x_n) \leqslant [K : \mathbb{Q}]h(x) + \log \sqrt{2}$ et $h_\infty(1, x_0, \ldots, x_n) \leqslant [K : \mathbb{Q}]h_\infty(x)$.*

Démonstration. On choisit d'abord un système de coordonnées $y_0, \ldots, y_n$ tel qu'il existe i avec $y_i = 1$. Pour un nombre premier p on pose

$$e_p = \frac{1}{\log p} \sum_{v|p} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |y_i|_v$$

qui est un entier naturel. Alors les entiers $x_i = (\prod_p p^{e_p}) y_i$ conviennent. L'estimation pour h_∞ s'écrit

$$\begin{aligned} h_\infty(1, x_0, \ldots, x_n) &= \sum_{v|\infty} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |x_i|_v \\ &\leqslant \sum_p e_p \log p + \sum_{v|\infty} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |y_i|_v \\ &\leqslant [K : \mathbb{Q}] h_\infty(y_0, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Pour la hauteur h le calcul est le même en utilisant

$$1 + \sum_{i=0}^n |x_i|_v^2 \leqslant 2 \left(\prod_p p^{e_p} \right)^2 \sum_{i=0}^n |y_i|_v^2$$

pour une place infinie v. □

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 1.4 et considérons une famille génératrice de la partie de degré au moins D de l'idéal homogène de C, disons $P_1, \ldots, P_s \in K[X_0, \ldots, X_3]$. Nous pouvons trouver de tels générateurs de degré D (théorème de Castelnuovo, voir [6]) et, d'après la proposition 2.2, nous pouvons faire en sorte que la somme de leurs hauteurs soit au plus

$$M = D(D+1)h(C) + \binom{D+3}{3} \left(\delta_K + \frac{1}{2} \log \binom{D+3}{3} \right).$$

Par le lemme précédent on peut remplacer ces générateurs par des multiples à coefficients dans $\mathcal{O}_K$ de sorte que $h_\infty(1, P_1, \ldots, P_s) \leqslant [K : \mathbb{Q}]M$. De plus $s \leqslant \binom{D+3}{3}$.

Nous disposons donc d'un modèle $\mathcal{C} = \operatorname{Proj} \mathcal{O}_K[X_0, \ldots, X_3]/(P_1, \ldots, P_s)$ de notre courbe sur $\mathcal{O}_K$. Soit $\mathcal{J} = (\partial P_i / \partial X_j)_{1 \leqslant i \leqslant s, 0 \leqslant j \leqslant 3}$ la matrice jacobienne. Une fibre de $\mathcal{C} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est lisse si et seulement si l'image de cette matrice est de rang 2 en chacun de ses points. Nous introduisons donc les mineurs de 2×2 de $\mathcal{J}$ notés $Q_1, \ldots, Q_t$ avec $t = \binom{4}{2}\binom{s}{2} = 3s(s-1)$. La fibre au-dessus d'un premier $\mathfrak{p}$ est donc lisse si et seulement si $V(P_1, \ldots, P_s, Q_1, \ldots, Q_t) = \emptyset$ dans $\mathbb{P}^3_{\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}}$. Il nous suffit maintenant de trouver $a \in \mathcal{O}_K$ tel qu'il existe un entier N avec $aX_j^N \in (P_1, \ldots, P_s, Q_1, \ldots, Q_t)$ pour tout $0 \leqslant j \leqslant 3$ pour savoir que tout $\mathfrak{p}$ de mauvaise réduction divise a. Nous pouvons choisir $a = \prod_{j=0}^3 a_j$ où $a_j X_j^N \in (P_1, \ldots, P_s, Q_1, \ldots, Q_t)$ et un tel $a_j \neq 0$ s'obtient à l'aide du théorème des zéros effectif de [11] (théorème 3.6 page 576) en spécialisant

$X_j = 1$ dans nos polynômes. On obtient

$$h_\infty(a_j) \leqslant 48D^3(h_\infty(1, P_1, \ldots, P_s, Q_1, \ldots, Q_t) + \log(s+t) + 10D\log 4).$$

Un coefficient de Q_k est somme d'au plus $2D^2\binom{D+3}{3}$ produits de deux coefficients des P_i donc $h_\infty(1, P_1, \ldots, P_s, Q_1, \ldots, Q_t) \leqslant 2[K:\mathbb{Q}]M + \log 2D^2\binom{D+3}{3}$ et (avec $t+s = 3s^2 - 2s$)

$$h_\infty(a) \leqslant 192D^3(2[K:\mathbb{Q}]M + \log 6D^2\binom{D+3}{3}^3 + 10D\log 4).$$

Il nous reste à simplifier cette expression pour obtenir le théorème 1.4 car, avec les notations de son énoncé, $\log N_0 \leqslant [K:\mathbb{Q}]h_\infty(a)$. Comme $\mathbb{P}^1$ n'a pas de mauvaise réduction, on peut supposer $g \geqslant 1$ et donc $D \geqslant 3$. Ceci entraîne $\binom{D+3}{3} \leqslant D^3$. Nous majorons alors $10D\log 4 \leqslant 20D \leqslant D^4$,

$$\log 6D^2\binom{D+3}{3}^3 \leqslant 13D \leqslant D^4$$

et

$$2M \leqslant \tfrac{8}{3}D^2h(C) + D^3\log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + 3D^4.$$

Il vient

$$\log N_0 \leqslant 192[K:\mathbb{Q}]^2D^3(3D^2h(C) + D^3\log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + 5D^4)$$

d'où l'on déduit immédiatement la borne du théorème ($192 \times 9 \leqslant 2^{11}$). La majoration du conducteur en fonction de N_0 découle quant à elle directement du résultat de [**13**] (en fait, nous n'utiliserons pas le conducteur dans la suite).

Le théorème 1.4 étant maintenant acquis, nous allons en déduire l'estimation du rang que nous utiliserons dans la dernière partie. Tout d'abord nous combinons notre borne avec le résultat de la partie prédédente : si F est un polynôme de $K[X,Y]$ de degré D irréductible dans $\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]$ alors la mauvaise réduction de la normalisée de la courbe (projective) définie par F est contrôlée par :

$$\begin{aligned}\log N_0 &\leqslant 2^{11}[K:\mathbb{Q}]^2(D^2)^5(D^{D^3-5}(6h_\infty(F) + 9D^2) + 2D^7\log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|)\\ &\leqslant 2^{15}[K:\mathbb{Q}]^2D^{D^3+7}\max(h_\infty(F), \log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|, 1).\end{aligned}$$

Pour le rang, nous considérons d'abord le résultat général suivant où l'on note $\mathcal{N}^0_{A/K}$ le radical du conducteur de A c'est-à-dire simplement le produit des idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$ en lesquels la variété abélienne A a mauvaise réduction.

PROPOSITION 5.1. *Si A est une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K de degré d alors le rang du groupe $A(K)$ est majoré par*

$$\frac{gd2^{8g^2}}{\log 4}(4dg^2\log|N_{K/\mathbb{Q}}\mathcal{N}^0_{A/K}| + \log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + g^2d^2\log 16) - 1.$$

Démonstration. Ceci est essentiellement le résultat de [**14**] dans lequel il faut corriger quelques calculs. Nous suivons le raisonnement de cet article. En particulier, nous notons L l'extension de K engendrée par les points de 2-torsion de A et $\delta = [L:K]$. Le rang de $A(K)$ est majoré par celui de $A(L)$ qui est lui-même majoré par le nombre de générateurs $\rho(A(L)/2A(L))$ donc (voir [**14**, théorème 2])

$$\operatorname{rang} A(K) \leqslant 2g\operatorname{Card}(S) + 2g\rho(\mathcal{H}_L[2])$$

où, de plus, $\mathrm{Card}(S) \leqslant \delta(\log|N_{K/\mathbb{Q}}\mathcal{N}^0_{A/K}| + 2d)$. Pour borner $\rho(\mathcal{H}_L[2])$, la formule page 265 doit se lire

$$\rho(\mathcal{H}_L[2]) \leqslant [L:\mathbb{Q}](\log|\Delta_{L/\mathbb{Q}}| + 2\log C')/\log 2$$

et il reste à majorer $|\Delta_{L/\mathbb{Q}}|$. La proposition 1 donne $v_{\mathfrak{p}}(\Delta_{L/K}) \leqslant \delta - 1 + d\delta\log\delta/\log 2$ et l'on peut donc préciser la proposition 3 en écrivant (où $[\cdot]$ désigne la partie entière)

$$\Delta_{L/K} \mid (2\mathcal{N}^0_{A/K})^{[\delta-1+d\delta\log\delta/\log 2]}$$

et donc

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\Delta_{L/K}) \mid (2^d N_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{N}^0_{A/K}))^{[\delta-1+d\delta\log\delta/\log 2]}.$$

Maintenant nous avons $|\Delta_{L/\mathbb{Q}}| = |N_{K/\mathbb{Q}}(\Delta_{L/K})|\,|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{[L:K]}$ donc en passant au logarithme il vient

$$\begin{aligned}\log|\Delta_{L/\mathbb{Q}}| &= \delta\log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + \log|N_{K/\mathbb{Q}}(\Delta_{L/K})|\\ &\leqslant \delta\log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + \left(\delta - 1 + d\delta\frac{\log\delta}{\log 2}\right)(d\log 2 + \log|N_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{N}^0_{A/K})|).\end{aligned}$$

En combinant toutes ces inégalités, on trouve comme majorant du rang de $A(K)$:

$$2g\delta\left(1 + \frac{d}{\log 2}\left(\delta - 1 + d\delta\frac{\log\delta}{\log 2}\right)\right)\log|N_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{N}^0_{A/K})| + 2g\frac{d\delta^2}{\log 2}\log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + C''$$

où

$$C'' = 2g\left(2d\delta + 2\frac{d\delta}{\log 2}\log C' + d^2\delta\left(\delta - 1 + \frac{d\delta\log\delta}{\log 2}\right)\right).$$

Si l'on utilise la valeur $C' = N!N^{-N}(2/\sqrt{\pi})^N$ donnée par Lang (citée dans [**14**]) alors on constate avec la formule de Stirling et quelques calculs explicites pour les premières valeurs que $\log C'/\log 2 \leqslant 2 - N$. Ici $N = [L:\mathbb{Q}] = d\delta$ donc

$$C'' \leqslant 2gd\delta\left(6 - d\delta - d + d^2\delta\frac{\log\delta}{\log 2}\right) \leqslant 2gd^3\max\left(\delta^2\frac{\log\delta}{\log 2}, 36\right).$$

Finalement $\delta \leqslant \mathrm{Card}\,(\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{F}_2)) \leqslant 2^{4g^2-1}$ et ceci donne

$$\max\left(\delta^2\frac{\log\delta}{\log 2}, 36\right) \leqslant g^2 2^{8g^2} - 1 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{d}{\log 2}\left(\delta - 1 + d\delta\frac{\log\delta}{\log 2}\right) \leqslant 4g^2\frac{d^2\delta}{\log 2}.$$

En substituant ces majorations dans l'évaluation du rang, on trouve la formule de l'énoncé. □

On notera que dans la preuve ci-dessus c'est bien $\mathcal{N}^0_{A/K}$ et non $\mathcal{N}_{A/K}$ qui intervient car [**14**] utilise le conducteur seulement pour contrôler la mauvaise réduction.

Appliquons ce résultat à la jacobienne J de la normalisée de la courbe plane définie par F comme précédemment. En réunissant nos estimations, le rang r de $J(K)$ vérifie (avec $d = [K:\mathbb{Q}]$) :

$$\begin{aligned} r + 1 &\leqslant \frac{gd2^{8g^2}}{\log 4}(4dg^2 2^{15}d^2 D^{D^3+7} + 1 + g^2d^2\log 16)\max(h_\infty(F), \log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|, 1)\\ &\leqslant \frac{gd^4 2^{8g^2}}{\log 4}(2^{17}g^2 D^{D^3+7} + 1 + g^2\log 16)\max(h_\infty(F), \log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|, 1)\\ &\leqslant g^3 2^{8g^2+17} D^{D^3+7} d^4\max(h_\infty(F), \log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|, 1)\\ &\leqslant 2^{8g^2+14} D^{D^3+13}[K:\mathbb{Q}]^4\max(h_\infty(F), \log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|, 1)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $g \leqslant D^2/2$.

6. *Hauteur thêta : stratégie*

Nous entamons dans cette partie la démonstration du théorème 1.3 (qui se poursuivra dans les trois suivantes). Avant de nous placer sous ses hypothèses, nous étudions de manière indépendante la hauteur thêta sur une variété abélienne principalement polarisée, afin d'en donner une expression concise en termes d'évaluation d'une fonction rationnelle. Dans cette parenthèse où la courbe C et son degré D quittent momentanément la scène, nous nous permettons d'utiliser la lettre D pour désigner un diviseur.

Comme dans l'introduction, lorsque D est un diviseur symétrique définissant une polarisation principale sur une variété abélienne A, nous notons $h_\theta^{(r)}(A, D)$ la hauteur thêta associée à r^2D c'est-à-dire la hauteur de l'origine dans le plongement thêta $A \hookrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(A, \mathcal{O}_A(r^2D))) \simeq \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{r^{2g}-1}$ (voir [**1**, **5**]).

PROPOSITION 6.1. *Soient A une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$, D un diviseur effectif symétrique sur A définissant une polarisation principale et $Q \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que $Q \notin D$ et $2Q \notin D$. Alors pour tout entier pair $r > 0$ le diviseur $r^2D + [r]^*\tau_{2Q}^*D - 2[r]^*\tau_Q^*D$ est principal ; si on l'écrit* $\operatorname{div}(f)$ *avec $f \in K(A)$ alors f est régulière aux points de l'ensemble fini $S = \operatorname{Ker}[r] \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ et l'on a $h_\theta^{(r)}(A, D) = r^{-2}h((f(x))_{x\in S})$.*

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin de revenir sur la définition de la hauteur thêta. Nous nous basons sur la présentation de David et Philippon (voir [**5**]). Ceci nous conduit à ne traiter que le cas $r = 4$ qui est celui que nous utiliserons dans la suite (pour les autres valeurs de r voir ci-dessous).

Pour suivre les notations de [**5**], nous écrivons, si D est comme ci-dessus, $\mathcal{M} = \mathcal{O}_A(D)$ et $\mathcal{L} = \mathcal{M}^{\otimes 4}$. La construction du plongement thêta consiste à définir une famille $(\Delta_{(a,k)}^{(2)})$ de sections de $\Gamma(A, \mathcal{L}^{\otimes 4})$ appelées coordonnées de Mumford modifiées [**5**, p. 651]. Ceci dépend d'un certain nombre de choix (structure thêta, système de représentants) mais nous pouvons en fait caractériser ces coordonnées de manière plus intrinsèque à l'aide de la représentation

$$\rho_2 : \operatorname{Ker}[16] \longrightarrow \operatorname{GL}(\Gamma(A, \mathcal{L}^{\otimes 4}))/\mu$$

(où μ est le sous-groupe des racines de l'unité de $\bar{\mathbb{Q}}$; voir [**5**, p. 653] où le but est PGL c'est-à-dire que l'on fait le quotient par $\bar{\mathbb{Q}}^\times$ plutôt que par μ) dont nous rappelons la définition : si $x \in \operatorname{Ker}[16]$, on choisit un isomorphisme $\varphi_x : \tau_x^*(\mathcal{L}^{\otimes 4}) \simeq \mathcal{L}^{\otimes 4}$ tel que (x, φ_x) est d'ordre fini dans le groupe de Heisenberg $\mathcal{G}(\mathcal{L}^{\otimes 4})$ et on pose $\rho_2(x) \cdot s = \varphi_x(\tau_x^*s)$ pour $s \in \Gamma(A, \mathcal{L}^{\otimes 4})$; ceci donne bien un élément de $\operatorname{GL}(\Gamma(A, \mathcal{L}^{\otimes 4}))/\mu$ car φ_x est unique à multiplication par une racine de l'unité près.

LEMME 6.1. *Si $\bar{\mathbb{Q}}s \subset \Gamma(A, \mathcal{L}^{\otimes 4})$ est une droite fixée par $\rho_2(\operatorname{Ker}[4])$ et Z un système de représentants de* $\operatorname{Ker}[16]/\operatorname{Ker}[4]$ *alors*

$$h_\theta^{(4)}(A, D) = h(((\rho_2(x)s)(0))_{x\in Z}).$$

Démonstration. Nous allons montrer que les $\rho_2(x)s$ donnent les coordonnées $\Delta_{(a,k)}^{(2)}$ de [**5**] à des racines de l'unité près. La clef de cette identification réside dans la proposition 3.4 de [**5**] qui décrit l'action de ρ_2 sur les coordonnées Δ. On rappelle que $\mathcal{H}(\mathcal{L}^{\otimes 4})$ est le groupe des x tels que $\tau_x^*(\mathcal{L}^{\otimes 4}) \simeq \mathcal{L}^{\otimes 4}$. Dans notre situation, $i = 2$ et $\mathcal{H}(\mathcal{L}^{\otimes 4}) = \operatorname{Ker}[16]$. Le groupe K_2 est $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^g$ et $K_2(4) = 4K_2$ tandis que $\mathcal{Z}_2$ représente le quotient $K_2/4K_2$. La formule générale s'écrit

$$\rho_2(x)\cdot\Delta^{(2)}_{(a,k)}=\ell(a-u)\Delta^{(2)}_{(a-u,\pi(\ell)k)}$$

où $a\in\mathcal{Z}_2$, $k\in\widehat{4K_2}$, $u\in K_2$, $\ell\in\hat{K}_2$, π est la projection $\hat{K}_2\to\hat{K}_2/4\hat{K}_2\simeq\widehat{4K_2}$ et $x\in\mathrm{Ker}[16]$ est identifié à (u,ℓ) par un isomorphisme de groupes $\mathrm{Ker}[16]\simeq K_2\times\hat{K}_2$ fixé (qui fait partie de la structure thêta).

Nous nous intéressons maintenant en particulier au cas où $x\in\mathrm{Ker}[4]$. Comme $\mathrm{Ker}[4]=4\mathrm{Ker}[16]$ nous avons $u\in 4K_2$ et $\ell\in\hat{K}_2=\mathrm{Ker}\pi$. Ceci donne $\pi(\ell)=1$ et $\ell(u)=1$. Par ailleurs d'après le fait 3.3(iv) p. 652 de [5] il vient $\Delta^{(2)}_{(a-u,k)}=k(u)\Delta^{(2)}_{(a,k)}$ et donc, en substituant, on décrit l'action de $\rho_2(x)$ par :

$$\rho_2(x)\cdot\Delta^{(2)}_{(a,k)}=\ell(a)k(u)\Delta^{(2)}_{(a,k)}.$$

Ainsi nous voyons que les droites engendrées par les coordonnées Δ sont fixées par $\rho_2(\mathrm{Ker}[4])$. Montrons maintenant que ce sont les seules. Soit pour cela s comme dans l'énoncé. On écrit :

$$s=\sum_{(a,k)\in\mathcal{Z}_2\times\widehat{4K_2}}\lambda_{(a,k)}\Delta^{(2)}_{(a,k)}$$

et donc pour $x\in\mathrm{Ker}[4]$ fixé et identifié à (u,ℓ)

$$\rho_2(x)s=\sum_{(a,k)\in\mathcal{Z}_2\times\widehat{4K_2}}\lambda_{(a,k)}\ell(a)k(u)\Delta^{(2)}_{(a,k)}.$$

Par hypothèse, ces deux expressions sont proportionnelles donc si $\lambda_{(a,k)}\lambda_{(a',k')}\neq 0$ nous trouvons $\ell(a)k(u)=\ell(a')k'(u)$. Ceci vaut pour tout couple $(u,\ell)\in 4K_2\times 4\hat{K}_2$ donc $(a,k)=(a',k')$ (en effet $\ell=1$ fournit $k=k'$ puis $a-a'\in\bigcap\mathrm{Ker}\,\ell=4K_2$ permet de conclure car $a,a'\in\mathcal{Z}_2$). Par conséquent $s=\lambda\Delta^{(2)}_{(a,k)}$ pour un certain couple (a,k).

Finalement si nous faisons agir $\rho_2(\mathrm{Ker}[16])$ sur s nous trouvons toutes les coordonnées Δ (multipliées par une racine de l'unité variable et par λ fixé). Il y en a 16^g en tout mais chaque droite est fixée par $\rho_2(\mathrm{Ker}[4])$. En faisant donc agir seulement $\rho_2(Z)$ nous obtenons chaque coordonnée une fois et une seule. Ceci termine la démonstration car les racines de l'unité ne modifient pas la hauteur. $\square$

Démonstration de la proposition. La principalité de $r^2D+[r]^*\tau^*_{2Q}D-2[r]^*\tau^*_QD$ découle de celle de $r^2D-[r]^*D$ (par symétrie de D) et de celle de $D+\tau^*_{2Q}D-2\tau^*_QD$ (par le théorème du carré). La condition $Q\notin D$ assure que S ne rencontre pas le support de $[r]^*\tau^*_QD$ et donne donc la régularité de f aux points de S. Nous retiendrons que $\mathrm{div}(f)$ s'écrit $r^2D-[r]^*E$ où E est un diviseur linéairement équivalent à D dont le support ne contient pas 0. Comme plus haut, nous écrivons $\mathcal{M}=\mathcal{O}_A(D)=\mathcal{O}_A(E)$. Nous voyons D et E comme les diviseurs de sections s_D et s_E de $\mathcal{M}$ (l'une globale, l'autre pas nécessairement). Nous fixons encore un isomorphisme $[r]^*\mathcal{M}\simeq\mathcal{M}^{\otimes r^2}$ qui induit aussi $[r^2]^*\mathcal{M}\simeq\mathcal{M}^{\otimes r^4}$. Maintenant nous avons $s_D^{\otimes r^2}=f[r]^*s_E$. Par ailleurs pour tout $x\in\mathrm{Ker}[r^2]$ il existe un isomorphisme canonique $\psi_x:\tau^*_x(\mathcal{M}^{\otimes r^4})\simeq\mathcal{M}^{\otimes r^4}$ caractérisé par $\psi_x(\tau^*_x[r^2]^*s)=[r^2]^*s$ pour toute section s de $\mathcal{M}$ (ceci vient simplement de $[r^2]\circ\tau_x=[r^2]$). Nous pouvons donc calculer

$$\psi_x((\tau^*_x[r]^*s_D)^{\otimes r^2})=\psi_x(\tau_x[r]^*f\cdot\tau^*_x[r^2]^*s_E)=\tau^*_x[r]^*f\cdot[r^2]^*s_E.$$

Parce que $0\notin\mathrm{Supp}E$, la section $[r^2]^*s_E$ rigidifie $\mathcal{M}^{\otimes r^4}$ au voisinage de 0 et donc la hauteur de la famille de sections $\psi_x((\tau^*_x[r]^*s_D)^{\otimes r^2})$ évaluée en 0 coïncide avec la hauteur des $f(rx)$. Si x parcourt Z alors rx parcourt $S=\mathrm{Ker}[r]$ et l'on trouve la hauteur $h((f(x))_{x\in S})$ de l'énoncé.

Pour retrouver la hauteur thêta, faisons à présent le lien avec le lemme (pour $r=4$) : tout d'abord la section $s=[r]^*s_D$ engendre dans $\Gamma(A,\mathcal{M}^{\otimes r^2})$ une droite fixée par l'action de $\mathrm{Ker}[r]$

(simplement car si $x \in \mathrm{Ker}[r]$ alors $[r] \circ \tau_x = [r]$). Ainsi la hauteur thêta se calcule comme hauteur des sections $\rho_2(x) \cdot s = \varphi_x(\tau_x^*[r]^* s_D)$ évaluées en 0. Pour conclure il suffit de montrer que ψ_x et $\varphi_x^{\otimes r^2}$ diffèrent par une racine de l'unité. Or ceci découle du fait que (x, ψ_x) et $(x, \varphi_x^{\otimes r^2})$ sont deux éléments d'ordre fini de $\mathcal{G}(\mathcal{M}^{\otimes r^4})$ ((x, ψ_x) est du même ordre que x). □

On constate sans peine que, pour démontrer la proposition pour tout r pair, il suffirait d'établir une version du lemme pour $\mathcal{L}^{\otimes (r/2)^2}$. En fait la preuve que nous avons donnée est valable mot pour mot pour $r \in \{2, 4, 8\}$ car les calculs de [**5**] valent pour $\mathcal{L}^{\otimes 2^i}$ avec $i \in \{0, 2, 4\}$. Dans le cas général, la définition de $h_\theta^{(r)}$ dans [**1**] correspond essentiellement à notre lemme (voir aussi la démonstration de [**18**] p. 303 qui utilise cette référence).

Outre l'expression de la hauteur thêta que nous venons d'établir, nous mettrons en œuvre dans la suite la proposition ci-dessous pour traduire l'équivalence linéaire de diviseurs en termes d'algèbre linéaire.

PROPOSITION 6.2. *Soient X un schéma intègre propre et lisse sur un corps K, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X, E et E' deux diviseurs effectifs sur X et n un entier naturel. On suppose que $\mathcal{L}^{\otimes n}$, $\mathcal{I}_E \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ et $\mathcal{I}_{E'} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ sont engendrés par leurs sections globales et $\Gamma(X, \mathcal{I}_E \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ et $\Gamma(X, \mathcal{I}_{E'} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ ont la même dimension sur K, notée δ. Soient $(s_i)_{i \in I}$ et $(u_k)_{k \in J}$ des familles génératrices de ces deux espaces vectoriels sur K. Alors E et E' sont linéairement équivalents si et seulement si pour tout $i \in I$ il existe $t_i \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \setminus \{0\}$ tel que pour tout $j \in I$ le rang de la famille $\{t_i \otimes s_j\} \cup \{s_i \otimes u_k \mid k \in J\} \subset \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes 2n})$ est au plus δ. Si c'est le cas on a $E - E' = \mathrm{div}(s_i/t_i)$ pour tout $i \in I$ tel que $s_i \neq 0$.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $E' - E$ s'écrive $\mathrm{div}(f)$. Dans ce cas, la multiplication par f induit un isomorphisme $\mathcal{I}_E \to \mathcal{I}_{E'}$ et par suite un isomorphisme $\varphi : \Gamma(X, \mathcal{I}_E \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \to \Gamma(X, \mathcal{I}_{E'} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$. Maintenant pour $i \in I$ définissons t_i : si $s_i = 0$ on choisit t_i non nul quelconque ; sinon on pose $t_i = \varphi(s_i)$. Dans le premier cas, la condition sur le rang est facilement satisfaite (car $\delta \geqslant 1$) ; dans le second on calcule

$$t_i \otimes s_j = \varphi(s_i) \otimes s_j = f s_i \otimes s_j = s_i \otimes f s_j = s_i \otimes \varphi(s_j) \in \mathrm{Vect}(s_i \otimes u_k)_k$$

car $\varphi(s_j)$ est une combinaison linéaire des u_k. De plus on a bien $E - E' = \mathrm{div}(f^{-1}) = \mathrm{div}(s_i/t_i)$.

Réciproquement, supposons que la condition de l'énoncé soit vérifiée. Choisissons $i \in I$ tel que $s_i \neq 0$ et posons $f = t_i/s_i$. Par hypothèse, pour tout $j \in J$, nous avons $t_i \otimes s_j = s_i \otimes v_j$ où v_j est une combinaison linéaire des u_k. Ceci s'écrit encore $s_i \otimes f s_j = s_i \otimes v_j$ d'où $v_j = f s_j$. Par conséquent la multiplication par f définit une application linéaire $\varphi : \Gamma(X, \mathcal{I}_E \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \to \Gamma(X, \mathcal{I}_{E'} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$. Comme les deux espaces ont même dimension, φ est bijective car injective. De plus les deux faisceaux considérés sont engendrés par leurs sections globales donc on en déduit un isomorphisme $\mathcal{I}_E \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \simeq \mathcal{I}_{E'} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ puis $\mathcal{I}_E \simeq \mathcal{I}_{E'}$. Ceci montre l'équivalence linéaire de E et E'. □

Dans les trois parties suivantes, nous utilisons ces deux propositions pour démontrer le théorème 1.3. Nous nous plaçons donc sous ses hypothèses. En particulier, nous travaillons uniquement sur $\bar{\mathbb{Q}}$. De plus, en notant J la jacobienne de C, le théorème est bien évidemment vide si $J = 0$ donc nous supposerons jusqu'à la fin de la partie 9 que $g \geqslant 1$ et, par voie de conséquence, $D \geqslant 3$ (le degré de C retrouve définitivement sa notation D).

L'idée consiste bien sûr à appliquer la proposition 6.1 à J et à employer ensuite la proposition 6.2 pour évaluer la fonction rationnelle f. En fait, pour ne pas faire intervenir explicitement la jacobienne, nous tirerons la situation de J à C^g. La tâche principale devient alors de contrôler des diviseurs sur C^g (déduits du diviseur Θ de J) et pour cela nous avons besoin de décrire l'addition de J sur C^g. Nous introduisons plus généralement pour $n \in \mathbb{N}$

$$L_n = C^n \underset{J}{\times} C^n \subset C^{2n}$$

le lieu des $2n$-uplets $(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n)$ de points de C tels que les diviseurs $P_1 + \dots + P_n$ et $Q_1 + \dots + Q_n$ sont linéairement équivalents ; l'écriture comme produit fibré, qui montre que L_n est fermé, présuppose de fixer un diviseur E_n de degré n pour définir $C^n \to J$ par $(P_1, \dots, P_n) \mapsto P_1 + \dots + P_n - E_n$ mais la définition de L_n ne dépend pas de ce choix.

Dans la partie suivante, nous montrons comment la connaissance de L_n permet de faire sur C^g toutes les opérations dont nous avons besoin. Ensuite (partie 8) nous contrôlons L_n lui-même à travers son degré et sa hauteur ; cette étape utilise aussi la proposition 6.2 pour caractériser l'équivalence linéaire sur C. Enfin nous concluons dans la partie 9 comme prévu en combinant les propositions 6.1 et 6.2, la seconde étant cette fois employée pour exploiter une équivalence linéaire sur C^g.

Pour pouvoir parler de degré et hauteur aussi bien de L_n que de diviseurs sur C^g nous fixerons toujours pour $n \geqslant 1$ le plongement de Segre de C^n dans $\mathbb{P}^{4^n-1}$ déduit de $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$.

7. *Hauteur thêta : diviseurs*

Nous choisissons un point $P_0 \in C(\bar{\mathbb{Q}})$ de hauteur $h(P_0) \leqslant h(C)/D$ comme la proposition 2.1 nous y autorise. Ce point nous sert à fixer les morphismes $C^n \to J$ pour $n \geqslant 1$ c'est-à-dire que nous posons $E_n = nP_0$ dans les notations utilisées plus haut. Le diviseur Θ de J apparaît alors comme l'image de $C^{g-1} \to J$. Il n'est pas en général symétrique car $[-1]^*\Theta = \tau_\kappa^*\Theta$ où $\kappa = K - (2g-2)P_0$ pour le diviseur canonique K de C (voir [**25**, proposition 19, page 158]). Nous le remplaçons par un translaté symétrique $\Theta_{\mathrm{sym}} = \tau_\omega^*\Theta$ où $\omega \in J(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifie $2\omega = \kappa$ (le diviseur Θ dépend du choix de P_0 alors que Θ_{sym} est unique à translation près par un point de 2-torsion). Pour appliquer la proposition 6.1 nous choisissons $Q \in J(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que $Q \notin \tau_\omega^*\Theta$ et $2Q \notin \tau_\omega^*\Theta$ et posons

$$E = 16\tau_\omega^*\Theta + [4]^*\tau_{\omega+2Q}^*\Theta \quad \text{et} \quad E' = 2[4]^*\tau_{\omega+Q}^*\Theta.$$

Le but de cette partie est de donner des estimations de degré et de hauteur pour j^*E et j^*E' en fonction des L_n (où $j : C^g \to J$).

Nous commençons par une remarque facile.

Lemme 7.1. *Soit Δ_n pour $n \geqslant 1$ l'image du plongement diagonal de C dans C^n. Pour des points $P_1, \dots, P_m$ de C et des entiers $n_1, \dots, n_k \geqslant 1$, le fermé $\prod_{i=1}^t \Delta_{n_i} \times \prod_{i=1}^m \{P_i\} \times C^s$ de $C^{s+m+n_1+\dots+n_t}$ est défini par des formes linéaires chacune de hauteur modifiée au plus $\max(\max_{1\leqslant i\leqslant m} h(P_i), \log\sqrt{2})$.*

Démonstration. Si nous notons W_{ij} avec $0 \leqslant i, j \leqslant 3$ les coordonnées de $\mathbb{P}^{15}$ pour refléter le plongement de Segre de $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ dans cet espace alors la diagonale est définie (dans $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$) par les formes linéaires $W_{ij} - W_{ji}$ $(i < j)$ de hauteur modifiée $\log\sqrt{2}$. D'autre part si un point P a pour coordonnées $(x_0 : \dots : x_3)$ le fermé $\{P\} \times \mathbb{P}^3$ est découpé par les formes $x_iW_{jk} - x_jW_{ik}$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 3$ et $0 \leqslant k \leqslant 3)$ de hauteur modifiée $h(x_i, x_j) \leqslant h(P)$. On généralise immédiatement ces considérations à un plongement de Segre avec un nombre quelconque de facteurs pour obtenir le résultat annoncé. $\square$

Nous pouvons alors donner un résultat de division sur J.

LEMME 7.2. *Soient $r \geqslant 1$ et $m, n \geqslant 0$ des entiers puis $P_1, \ldots, P_m$ et $Q_1, \ldots, Q_n$ des points de C ainsi que $E_+ = P_1 + \ldots + P_m$ et $E_- = Q_1 + \ldots + Q_n$ les diviseurs correspondants. Soit H un majorant des $h(P_i)$, des $h(Q_i)$, de $h(P_0)$ et de $\log \sqrt{2}$. Soit x un point de $J(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que $rx = E_+ - E_- - (m-n)P_0$. Alors il existe $R = (R_1, \ldots, R_g) \in C^g$ avec $j(R) = x$ et*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant g} h(R_i) \leqslant \frac{1}{r}(h(L_{\max(rg+n,m)}) + 2\max(rg+n,m)\deg(L_{\max(rg+n,m)})H).$$

Démonstration. Imposer que $j(R)$ satisfasse l'équation en x revient à dire

$$rR_1 + \cdots + rR_g + E_- + \max(0, m-n-rg)P_0 \equiv \max(0, rg+n-m)P_0 + E_+$$

autrement dit le point T formé par r copies de R, E_-, $|rg+n-m|$ copies de P_0 et E_+ doit appartenir à $L_{\max(rg+n,m)}$. Nous considérons donc l'intersection F de ce fermé avec $(\Delta_r)^g \times \prod_{i=1}^n \{Q_i\} \times \{P_0\}^{|rg+n-m|} \times \prod_{i=1}^m \{P_i\}$. Par la proposition 2.3 et le lemme précédent, nous trouvons un fermé F de hauteur au plus

$$h(L_{\max(rg+n,m)}) + 2\max(rg+n,m)\deg(L_{\max(rg+n,m)})H.$$

Maintenant dans l'identification $\Delta_r^g \simeq C^g$, le fermé F correspond à l'union des $j^{-1}(y)$ où y parcourt l'ensemble fini des solutions de l'équation $ry = E_+ - E_- - (m-n)P_0$. Par suite, $j^{-1}(x)$ s'identifie à une union de composantes de F donc contient un point de hauteur au plus $h(F)$ (voir proposition 2.1). Nous concluons par $rh(R) \leqslant h(T) \leqslant h(F)$. □

Notons que nous utiliserons plus bas ce lemme pour contrôler la r-torsion de J (voir partie 9). Ici nous allons nous en servir pour le point ω donné par l'équation $2\omega = \kappa = K - (2g-2)P_0$. Il nous faut tout d'abord trouver un représentant de la classe canonique K.

PROPOSITION 7.1. *Il existe un diviseur représentant K, ayant au plus $2D$ pôles et dont le support est formé de points de hauteur au plus $D^5(h(C)+1)$.*

Démonstration. Nous supposons, quitte à permuter les coordonnées, que ni X_0 ni X_1 ne s'annulent sur C et nous considérons le diviseur de la forme différentielle $d(X_1/X_0)$. Ses pôles sont contenus dans $C \cap \{X_0 = 0\}$ donc de hauteur au plus $h(C)$ car la forme linéaire X_0 est de hauteur modifiée nulle (voir proposition 2.3). Parce que $d(X_1/X_0) = (X_i/X_0)d(X_1/X_i) - (X_1X_i/X_0^2)d(X_0/X_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, le diviseur des pôles est majoré par celui de X_0^2 donc de degré au plus $2D$. Il reste à évaluer la hauteur d'un zéro P de $d(X_1/X_0)$. D'après Castelnuovo et la proposition 2.2, l'idéal de C au voisinage de P est engendré par deux polynômes F et G de degré au plus D et dont la somme des hauteurs est au plus $D(D+1)h(C) + \frac{1}{2}\binom{D+3}{3}\log\binom{D+3}{3}$ (en les trois variables $x_i = X_i/X_0$). Dans ces conditions, P est un zéro de dx_1 si et seulement si $\mathcal{J} = (\partial F/\partial x_2)(\partial G/\partial x_3) - (\partial F/\partial x_3)(\partial G/\partial x_2)$ s'annule en P. Par suite P est un point isolé de l'intersection de C avec le lieu des zéros de $\mathcal{J}$ donc $h(P) \leqslant 2(D-1)h(C) + Dh_{\mathrm{m}}(\mathcal{J})$. On constate alors $h_{\mathrm{m}}(\mathcal{J}) \leqslant h(F) + h(G) + 2\log D$ puis $D^2(D+1) + 2(D-1) \leqslant D^4$ et $(D/2)\binom{D+3}{3}\log\binom{D+3}{3} + 2\log D \leqslant D^5$. □

Pour des raisons techniques, nous préférons contrôler la hauteur d'un représentant $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_g) \in C^g$ de $-\omega$ plutôt que de ω. Ceci revient à résoudre l'équation $2x + K = (2g-2)P_0$. Avec les deux résultats précédents, nous pouvons faire ceci de sorte que

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant g} h(\Omega_i) \leqslant \tfrac{1}{2}h(L_{4g-2+2D}) + (4g-2+2D)\deg(L_{4g-2+2D})D^5(h(C)+1).$$

Notons H_ω cette borne.

Disons maintenant comment nous choisissons Q. Là aussi nous travaillons avec un représentant $Q' \in C^g$ de $-Q$. Les conditions mises sur Q reviennent à dire que Q' doit être en dehors d'un certain fermé de C^g. Comme d'après la proposition 2.1 les points à coordonnées de hauteur au plus $h(C)$ sont denses dans C^g, on peut choisir Q' comme cela. De toute façon, nous n'utiliserons que $h(Q'_i) \leqslant H_\omega$.

Nous sommes en position de décrire le type de diviseurs qui nous intéresse.

Lemme 7.3. *Pour des entiers $r \geqslant 1$, $s \geqslant 0$ et $n \geqslant \max(r, s+2)g$, le support du diviseur $j^*[r]^*\tau^*_{\omega+sQ}\Theta$ est de degré au plus $\deg(L_n)$ et de hauteur au plus $h(L_n) + 2n\deg(L_n)(H_\omega + 5g)$. En outre chaque composante de ce diviseur a une multiplicité inférieure à $r^{2g}g!$.*

Démonstration. Un point $R \in C^g$ appartient au support en question si et seulement si $rj(R) + \omega + sQ \in \Theta$ autrement dit s'il existe $S \in C^{g-1} \times \{P_0\}$ tel que rR est linéairement équivalent à $\Omega + sQ' + S + (r-s-2)gP_0$. En introduisant $(n-rg)P_0$ de part et d'autre, nous devons donc former l'intersection F de L_n avec $(\Delta_r)^g \times \prod_{i=1}^{2n+1-(r+1)g}\{P_i\} \times C^{g-1}$ où $h(P_i) \leqslant H_\omega$ (P_i est l'un des Ω_i, l'un des Q'_i ou P_0). Le fermé que nous cherchons est l'image de F dans la projection $C^{2n} \to C^g$ qui conserve les coordonnées d'indices $ir+1$ où $0 \leqslant i \leqslant g-1$. Par intersection (proposition 2.3) il vient $\deg(F) \leqslant \deg(L_n)$ et

$$h(F) \leqslant h(L_n) + 2n\deg(L_n)H_\omega;$$

par projection (proposition 2.4) le degré décroît et la hauteur augmente d'au plus

$$6g\deg(L_n)n\log 4.$$

Ceci fournit l'estimation de l'énoncé en majorant $3\log 4 \leqslant 5$. Pour la dernière assertion, notons que Θ est irréductible comme image de C^{g-1}, que $\tau_{\omega+sQ}$ est un isomorphisme et $[r]$ un morphisme fini de degré r^{2g}. De son côté, j est la composée d'un morphisme fini de degré $g!$ (à savoir $C^g \to C^{(g)}$ quotient par le groupe symétrique) et d'un morphisme birationnel $C^{(g)} \to J$. Le résultat s'en déduit. □

Pour conclure cette partie, rappelons que nous avons posé :

$$E = 16\tau^*_\omega\Theta + [4]^*\tau^*_{\omega+2Q}\Theta \quad \text{et} \quad E' = 2[4]^*\tau^*_{\omega+Q}\Theta.$$

Nos calculs se résument dans le résultat suivant.

Proposition 7.2. *Soit $n = 4g + 2(D-1)$. Pour chacun des deux diviseurs j^*E et j^*E' nous avons : chaque composante est de multiplicité au plus $g!2^{4g+1}$, le degré du support est inférieur à $2\deg(L_n)$ et la hauteur du support est au plus*

$$4n\deg(L_n)(h(L_n) + 5g + n\deg(L_n)D^5(h(C)+1)).$$

Démonstration. Pour la multiplicité, il s'agit d'une conséquence immédiate du résultat précédent. Nous appliquons ensuite trois fois ce lemme avec $(r,s) = (1,0)$, $(4,2)$ puis $(4,1)$ donc à chaque fois $\max(r, s+2)g \leqslant 4g \leqslant n$. Puisque le support de j^*E ou j^*E' s'obtient comme l'union d'au plus deux diviseurs comme dans le lemme nous trouvons un degré inférieur à $2\deg(L_n)$ et une hauteur au plus

$$2h(L_n) + 4n\deg(L_n)(H_\omega + 5g) \leqslant 4n\deg(L_n)(H_\omega + 5g + \tfrac{1}{2}h(L_n)).$$

Avec l'estimation de H_ω, ceci conclut la démonstration. □

8. *Hauteur thêta : équivalence linéaire*

Dans cette partie, nous considérons un entier $n \geqslant D$ et notre but est de majorer le degré et la hauteur de $L_n \subset C^{2n}$ c'est-à-dire de caractériser l'équivalence linéaire de deux diviseurs effectifs de degré n sur C. *In fine* nous utiliserons pour cela la proposition 6.2.

Nous notons $\mathcal{I}_C$ le faisceau d'idéaux de C dans $\mathbb{P}^3$ puis, si E est un diviseur effectif de C, nous écrivons $\mathcal{I}_E \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ son faisceau d'idéaux dans $\mathbb{P}^3$ et $\mathcal{I}_E^{(C)} \subset \mathcal{O}_C$ son faisceau d'idéaux dans C. Posons aussi $B = nD + 1 - g$.

Lemme 8.1. *Si E est un diviseur effectif de degré n sur C alors, dans le diagramme exact*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_E(n)) & \longrightarrow & \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(n)) & \longrightarrow & \Gamma(E, \mathcal{O}_E) \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \| \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(C, \mathcal{I}_E^{(C)}(n)) & \longrightarrow & \Gamma(C, \mathcal{O}(n)) & \longrightarrow & \Gamma(E, \mathcal{O}_E),
\end{array}$$

les deux flèches verticales sont surjectives. De plus, nous avons $\dim \Gamma(C, \mathcal{O}(n)) = B$ *et* $\dim \Gamma(C, \mathcal{I}_E^{(C)}(n)) = B - n$.

Démonstration. La surjectivité de $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(n)) \to \Gamma(C, \mathcal{O}(n))$ pour $n \geqslant D$ est un théorème de Castelnuovo (voir [**6**]) et la seconde surjectivité en découle par le lemme des cinq. Ensuite, nous appliquons Riemann–Roch sous la forme $\dim \Gamma(C, \mathcal{L}) = \deg \mathcal{L} + 1 - g$ si $\deg \mathcal{L} > 2g - 2$, ce qui est possible ici car $\deg \mathcal{O}(n) = nD > \deg I_E^{(C)}(n) = n(D-1) \geqslant D(D-1) > 2g$. □

Nous identifions naturellement $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(n))$ aux éléments homogènes de degré n de $\bar{\mathbb{Q}}[X_0, \ldots, X_3]$ ce qui permet d'écrire des générateurs du sous-espace $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_E(n))$ de $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(n))$. De façon analogue, en degré $2n$, nous contrôlons des générateurs de $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(2n)) \subset \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2n))$.

Lemme 8.2. *Si $E = P_1 + \ldots + P_n$ avec $P_i = (p_{i,0} : p_{i,1} : p_{i,2} : p_{i,3})$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ alors $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_E(n))$ est engendré par l'ensemble des polynômes de la forme*

$$\prod_{i=1}^{n} (p_{i,j_i} X_{k_i} - p_{i,k_i} X_{j_i})$$

où $j, k \in \{0,1,2,3\}^n$. En outre, il existe une famille génératrice $\mathcal{G}_C$ de $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(2n))$ telle que $h_\infty(\mathcal{G}_C) \leqslant D^4(h(C) + 1)$.

Démonstration. La première partie est immédiate. Pour la seconde, on rappelle que l'idéal homogène de C dans $\bar{\mathbb{Q}}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ est engendré en degré supérieur à D par ses éléments de degré D (voir [**6**]). Quitte à multiplier par des monômes (de degré $2n - D$) il suffit de borner la hauteur de générateurs en degré D. Nous faisons ceci grâce à la proposition 2.2 qui fournit des générateurs dont la somme des hauteurs est au plus

$$D(D+1)h(C) + \frac{1}{2}\binom{D+3}{3} \log \binom{D+3}{3} \leqslant D^4(h(C) + 1),$$

cette dernière inégalité s'obtenant grâce à $D \geqslant 3$. □

Notons $\mathcal{G}_E$ la famille de générateurs de $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_E(n))$ décrite dans le lemme. Nous voyons un élément de $\mathcal{G}_E$ comme un polynôme en $X_0, \ldots, X_3$ et en les coordonnées du point

$P = (P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{P}^{4^n-1}$: ses degrés sont alors n et 1 ; il est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et sa longueur est au plus 2^n.

Pour décrire l'équivalence linéaire, nous considérons un second diviseur $E' = P'_1 + \dots + P'_n$ ainsi que le point correspondant P' de $\mathbb{P}^{4^n-1}$. Notre tâche consiste à écrire les conditions que doit remplir le point (P, P') de $\mathbb{P}^{4^{2n}-1}$ pour que E et E' soient linéairement équivalents. Nous utilisons les familles $\mathcal{G}_C$, $\mathcal{G}_E$ et $\mathcal{G}_{E'}$ et, en outre, nous fixons une famille $\{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_B\}$ de monômes dans $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(n))$ dont les images forment une base de $\Gamma(C, \mathcal{O}(n))$.

Écrivons encore $A = \binom{2n+3}{3} - n(D+1) + 1$.

Proposition 8.1. *Dans les notations précédentes, nous avons $(P, P') \in L_n$ si et seulement si pour tout $Q \in \mathcal{G}_E$ il existe $t \in K^B \setminus \{0\}$ tel que, pour tout $R \in \mathcal{G}_E$, on ait :*

$$\operatorname{rang}\left(\mathcal{G}_C, \sum_{i=1}^{B} t_i \mathfrak{m}_i Q, R\mathcal{G}_{E'}\right) < A.$$

Démonstration. Nous appliquons la proposition 6.2 avec $X = C$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$. Les espaces $\Gamma(C, \mathcal{I}_E^{(C)}(n))$ et $\Gamma(C, \mathcal{I}_{E'}^{(C)}(n))$ ont bien même dimension $\delta = B - n$. Nous choisissons bien sûr $(s_i)_{i \in I} = \pi(\mathcal{G}_E)$ et $(u_j)_{j \in J} = \pi(\mathcal{G}_{E'})$ où $\pi : \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(n)) \to \Gamma(C, \mathcal{O}(n))$. De cette façon, nous avons l'équivalence cherchée avec la condition

$$\operatorname{rang}\left(\sum_{i=1}^{B} t_i \pi(\mathfrak{m}_i) \otimes \pi(Q), \pi(R) \otimes \pi(\mathcal{G}_{E'})\right) < B - n + 1$$

en lieu et place de celle de l'énoncé. Puisque $\mathcal{G}_C$ engendre le noyau de l'application surjective $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2n)) \to \Gamma(C, \mathcal{O}(2n))$, cette condition se réécrit

$$\operatorname{rang}\left(\mathcal{G}_C, \sum_{i=1}^{B} t_i \mathfrak{m}_i Q, R\mathcal{G}_{E'}\right) < B - n + 1 + \dim \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2n)) - \dim \Gamma(C, \mathcal{O}(n)).$$

Par Riemann–Roch, $\dim \Gamma(C, \mathcal{O}(2n)) = 2nD + 1 - g = B + nD$ et l'on voit ainsi apparaître la valeur de A. $\square$

Ce résultat nous permet de lire les équations de L_n.

Proposition 8.2. *Le fermé L_n est l'intersection de C^{2n} avec les zéros de formes homogènes sur $\mathbb{P}^{4^{2n}-1}$ de degré AB et de hauteur modifiée au plus $AB(D^4(h(C)+1) + \log(4^n AB))$.*

Démonstration. La condition $\operatorname{rang}(\mathcal{G}_C, \sum_{i=1}^{B} t_i \mathfrak{m}_i Q, R\mathcal{G}_{E'}) < A$ se traduit par la nullité des mineurs $A \times A$ de la matrice obtenue en décomposant les différents polynômes dans la base des monômes de $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2n))$. Notons que par construction $\operatorname{rang}(\mathcal{G}_C, R\mathcal{G}_{E'}) < A$ donc il suffit de considérer les mineurs où t intervient. Un tel mineur est alors une forme linéaire en t et un polynôme homogène de degré au plus A respectivement en les coefficients des éléments de $\mathcal{G}_C$, en les coordonnées de P et en celles de P'. En outre sa longueur est au plus $A! 2^n 4^{n(A-1)} \leqslant (4^n A)^A$. Nous noterons $\mathcal{H}$ la famille des coefficients des éléments de $\mathcal{G}_C$. D'après le lemme 8.2 nous avons $h_\infty(\mathcal{H}) = h_\infty(\mathcal{G}) \leqslant D^4(h(C)+1)$. Désignons ensuite par W la famille des coordonnées de (P, P') dans $\mathbb{P}^{4^{2n}-1}$.

Il résulte de ce qui précède qu'il existe une famille $\mathcal{L}_Q$ de formes linéaires en t dont les coefficients sont des polynômes sur $\mathbb{Z}$ bi-homogènes de degré (A, A) en W et $\mathcal{H}$ de longueur au plus $(4^nA)^A$ de sorte que la condition

$$\operatorname{rang}(\mathcal{G}_C, \sum_{i=1}^{B} t_i \mathfrak{m}_i Q, R\mathcal{G}_{E'}) < A \quad \text{pour tout } R \in \mathcal{G}_E$$

équivaut à

$$\ell(t) = 0 \quad \text{pour tout } \ell \in \mathcal{L}_Q.$$

Affirmer qu'il existe un t non nul vérifiant cela revient donc à dire que la famille $\mathcal{L}_Q$ n'est pas de rang B. Ceci s'écrit à son tour à l'aide de nullité de mineurs (de taille $B \times B$) qui sont, de la même façon que précédemment, des polynômes sur $\mathbb{Z}$ bi-homogènes de degré (AB, AB) en W et $\mathcal{H}$ de longueur au plus $B!(4^n)^{AB} \leqslant (4^nAB)^{AB}$. En faisant varier Q nous obtenons les équations cherchées. Comme polynômes en W elles sont de hauteur modifiée au plus $AB(h_\infty(\mathcal{H}) + \log(4^nAB))$ et ceci conclut la démonstration. □

Corollaire 8.1. *Nous avons pour tout $n \geqslant D$*

$$\deg L_n \leqslant n^{18n-2} \quad \text{et} \quad h(L_n) \leqslant n^{18n+4}(h(C)+1).$$

Démonstration. Dans $\mathbb{P}^{4^{2n}-1}$ (plongement de Segre), C^{2n} a pour degré $(2n)!D^{2n}$ et hauteur $n(2n+1)!D^{2n-1}h(C)$ (voir lemme 2.2). Avec la proposition précédente et la proposition 2.3 nous obtenons

$$\deg(L_n) \leqslant (AB)^{2n}(2n)!D^{2n} \quad \text{et}$$

$$h(L_n) \leqslant 2(AB)^{2n}(2n)!D^{2n}\left(n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{h(C)}{D} + nD^4(h(C)+1) + n\log(4^nAB)\right).$$

Nous majorons maintenant $B \leqslant nD \leqslant n^2$ puis

$$A = \tfrac{4}{3}n^3 + 4n^2 + \tfrac{8}{3}n + 2 - nD \leqslant \tfrac{4}{3}n^3 + 4n^2 + 2 \leqslant n^4$$

(on rappelle $n \geqslant D \geqslant 3$). De cette façon, $AB \leqslant n^6$ et

$$\deg(L_n) \leqslant (2n)!n^{14n} \leqslant (2n)^{2n-1}n^{14n} \leqslant n^{18n-2}.$$

Pour la hauteur nous avons

$$h(L_n) \leqslant 2n^{18n-2}(n^2h(C) + n^5(h(C)+1) + n\log(4^nn^6)).$$

On vérifie alors $2\log(4^nn^6) \leqslant n^3$ ce qui donne

$$h(L_n) \leqslant 2n^{18n-2}(\tfrac{3}{2}n^5(h(C)+1)) \leqslant n^{18n+4}(h(C)+1).$$ □

Dans le cadre de la proposition 7.2 (où $g \leqslant n$ et $D \leqslant n/2$) nous avons

$$2\deg(L_n) \leqslant n^{18n-1} \quad \text{et}$$

$$4n\deg(L_n)(h(L_n) + 5g + n\deg(L_n)D^5(h(C)+1)) \leqslant n^{36n+4}(h(C)+1).$$

9. *Hauteur thêta : évaluation*

Dans cette partie, nous appliquons la proposition 6.2 aux diviseurs j^*E et j^*E' introduits dans la partie 7 afin de trouver une fonction rationnelle f telle que $j^*E - j^*E' = \operatorname{div}(f)$. Ensuite, nous utiliserons la proposition 6.1 pour écrire la hauteur thêta que nous cherchons comme hauteur d'une famille de valeurs de f.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à des générateurs des idéaux des diviseurs j^*E et j^*E'. Comme ceux-ci ne sont pas réduits, nous avons besoin d'adapter la proposition 2.2 de la manière suivante.

LEMME 9.1. *Soient X un sous-schéma fermé intègre lisse de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et E un diviseur effectif de X. On suppose que le support de E est de degré au plus Δ et de hauteur au plus H tandis que chaque composante de E est de multiplicité au plus m. On note $\mathcal{I}_E$ le faisceau d'idéaux de E dans X et $\gamma = 2^{\dim X - 1}$. Alors :*

(1) *le faisceau $\mathcal{I}_E(m\Delta^\gamma)$ est engendré par ses sections globales.*

(2) *Pour $n' \in \mathbb{N}$ tel que $\Gamma(\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}(n')) \to \Gamma(X, \mathcal{O}(n'))$ est surjectif, il existe une base de $\Gamma(X, \mathcal{I}_E(n'))$ dont les éléments sont images d'une famille de polynômes de $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(n'))$ de sorte que la hauteur h_∞ de la famille des coefficients de ces polynômes est au plus*

$$d(n'H + n' \log(n+1) + \tfrac{1}{2} \log d)$$

où $d = \dim \Gamma(X, \mathcal{O}(n'))$.

Démonstration. Écrivons $E = \sum_{i=1}^s m_i E_i$ avec E_i irréductible. D'après [8], le faisceau $\mathcal{I}_{E_i}((\deg E_i)^\gamma)$ est engendré par ses sections globales. Comme pour deux diviseurs E et E' nous avons un morphisme

$$\Gamma(X, \mathcal{I}_E(n_1)) \otimes \Gamma(X, \mathcal{I}_{E'}(n_2)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}_{E+E'}(n_1 + n_2))$$

il vient que le faisceau $\mathcal{I}_E(n_0)$ est engendré par ses sections globales pour $n_0 = \sum_{i=1}^s m_i (\deg E_i)^\gamma \leqslant m\Delta^\gamma$. Ceci donne (1). Pour (2) nous imitons la preuve de la proposition 2.2. Si nous fixons une partie dense $\mathcal{E}_i$ de E_i, l'espace $\Gamma(X, \mathcal{I}_E(n'))$ sera caractérisé par des annulations aux points de $\mathcal{E}_i$ à l'ordre m_i pour tout i. Plus précisément, choisissons une famille de monômes de $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(n'))$ dont les images forment une base de $\Gamma(X, \mathcal{O}(n'))$. Ces monômes engendrent un espace $V_0 \simeq \bar{\mathbb{Q}}^d$ et $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_E(n'))$ s'identifie à un sous-espace $V \subset V_0$ avec

$$V = \left\{ P \in V_0 \mid \forall i \ \forall y \in \mathcal{E}_i \ \forall j \in \mathbb{N}^{n+1}, \ |j| < m_i \quad \frac{\partial^j P}{\partial X^j}(y) = 0 \right\}.$$

Par suite l'orthogonal de V est engendré par des vecteurs de la forme $\binom{n'}{j} y^{n'-j}$ (avec un coefficient multinomial) et cela donne

$$h_S(V) = h_S(V^\perp) \leqslant d \left(n' \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \max_{y \in \mathcal{E}_i} h(y) + \max_{j \in \mathbb{N}^{n+1}} \log \binom{n'}{j} \right).$$

D'après la proposition 2.1, on peut choisir $\mathcal{E}_i$ de sorte que le premier maximum soit au plus $H + \varepsilon$. Comme le second est strictement inférieur à $n' \log(n+1)$, en choisissant ε assez petit nous trouvons

$$h_S(V) \leqslant dn'(H + \log(n+1)).$$

Le lemme de Siegel 2.1 fournit alors une base $\mathcal{B}$ de V telle que (avec $\dim V \leqslant d$)

$$\sum_{v \in \mathcal{B}} h(v) \leqslant dn'(H + \log(n+1)) + \frac{1}{2} d \log d.$$

Quitte à multiplier par des scalaires les éléments de $\mathcal{B}$, on peut supposer que chacun a un coefficient égal à 1. Ceci entraîne

$$h_\infty(\mathcal{B}) \leqslant \sum_{v \in \mathcal{B}} h(v)$$

et montre le résultat souhaité. □

Nous ferons encore usage du lemme élémentaire suivant.

LEMME 9.2. *Soient $x_1, \ldots, x_{n_1}$ des éléments de $\bar{\mathbb{Q}}^{n_2}$ et $\ell_1, \ldots, \ell_{n_3} : \bar{\mathbb{Q}}^{n_2} \to \bar{\mathbb{Q}}$ des formes linéaires telles que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n_3$, il existe i, $1 \leqslant i \leqslant n_1$, avec $\ell_j(x_i) \neq 0$. Alors il existe une famille $x'_1, \ldots, x'_{n_1}$ de $\bar{\mathbb{Q}}^{n_2}$ telle que :*

(1) $\mathrm{Vect}(x'_1, \ldots, x'_{n_1}) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{n_1})$,

(2) $\ell_j(x'_1) \neq 0$ *pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n_3$ et*

(3) $h_\infty(x'_1, \ldots, x'_{n_1}) \leqslant h_\infty(x_1, \ldots, x_{n_1}) + 2 \log \min(n_1, n_3)$.

Démonstration. Posons $n = \min(n_1, n_3)$. Quitte à permuter la famille initiale, on peut supposer que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n_3$, il existe i, $1 \leqslant i \leqslant n$, avec $\ell_j(x_i) \neq 0$. Nous prendrons alors $x'_i = x_i$ pour tout $i \geqslant 2$ et $x'_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \in \{-1, 1, \ldots, n\}$. Ceci suffit à assurer (1) et, par un rapide calcul, (3). Il reste à choisir les λ_i pour avoir (2). Ceci revient à exiger la non-nullité de $P = \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_i \ell_j(x_i)$ qui est un polynôme de degré n en les λ_i. Il est non identiquement nul comme produit de formes linéaires non nulles par hypothèse. Il est alors facile de vérifier que le choix indiqué est possible (par exemple en raisonnant par récurrence à partir du fait qu'un polynôme non nul en une variable de degré n a au plus n zéros). $\square$

Notre démarche est maintenant la suivante : la proposition 7.2 jointe au corollaire 8.1 fournit des valeurs pour Δ, H et m (voir la fin de la partie 8) qui permettent d'appliquer le lemme 9.1 aux diviseurs j^*E et j^*E' sur $X = C^g \subset \mathbb{P}^{4^g-1}$. Celui-ci nous donne, pour $n' = m\Delta^\gamma$, des bases $(s_i)_{i \in I}$ de $\Gamma(C^g, \mathcal{I}_{j^*E'}(n'))$ et $(u_k)_{k \in J}$ de $\Gamma(C^g, \mathcal{I}_{j^*E}(n'))$ dont nous contrôlons la hauteur. Alors, comme j^*E et j^*E' sont linéairement équivalents (d'après la proposition 6.1), la proposition 6.2 permet de trouver $t \in \Gamma(C^g, \mathcal{O}(n'))$ tel que $j^*E' - j^*E = \mathrm{div}(s_1/t)$. Nous posons $f = t/s_1$. Par ailleurs, nous fixons (grâce au lemme 7.2) des représentants dans C^g des points de 4-torsion de J, disons $T_1, \ldots, T_{2^{4g}} \in C^g$. Si $E - E'$ s'écrit $\mathrm{div}(f_0)$ sur J alors f et j^*f_0 diffèrent par une constante multiplicative donc la hauteur de la famille des $f(T_i)$ coïncide avec celle des $f_0(x)$, $x \in \mathrm{Ker}[4]$. Finalement, par la proposition 6.1, cette hauteur vaut $16 h_\theta^{(4)}(J, \Theta_{\mathrm{sym}})$.

Il reste donc seulement à estimer les hauteurs à chaque étape de ce procédé. Pour faciliter l'évaluation de $f(T_i)$ nous allons de plus exiger que s_1 ne s'annule en aucun des T_i. C'est ici que le lemme 9.2 intervient pour modifier la base $(s_i)_{i \in I}$: nous considérons les 2^{4g} formes linéaires d'évaluation en les T_i. L'hypothèse du lemme est satisfaite car aucun des T_i n'appartient au support de j^*E' (puisque $\mathrm{Ker}[4] \cap E' = [4]^*(\{0\} \cap \tau^*_{\omega+Q}\Theta) = \emptyset$ par le choix de Q) et donc la conclusion nous permet de supposer $s_1(T_i) \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant 2^{4g}$ quitte à augmenter la borne de hauteur de $8g \log 2$.

Voyons maintenant les estimations. Nous notons

$$n = 4g + 2D - 2, \quad m = g! 2^{4g+1}, \quad \gamma = 2^{g-1},$$
$$\Delta = n^{18n-1}, \quad n' = m\Delta^\gamma \quad \text{et} \quad H = n^{36n+4}(h(C) + 1).$$

Pour mettre en œuvre le lemme 9.1, on notera que $n' \geqslant D$ entraîne la surjectivité de

$$\Gamma(\mathbb{P}^{4^g-1}, \mathcal{O}(n')) \longrightarrow \Gamma(C^g, \mathcal{O}(n'))$$

et que la dimension de ce second espace vaut $(n'D + 1 - g)^g \leqslant (n'D)^g$ par la formule de Künneth et le théorème de Riemann–Roch. Ainsi la borne de hauteur du lemme 9.1 est majorée par $(n'D)^g(n'H + n' \log(4^g) + (1/2) g \log(n'D))$ que l'on peut même remplacer par

$$H_u = (n'D)^{g+1}(H + 2g).$$

Ceci signifie que les bases décrites plus haut, notées en abrégé s et u, peuvent être choisies avec $h_\infty(u) \leqslant H_u$ et, après la modification due au lemme 9.2, $h_\infty(s) \leqslant H_u + 8g\log 2$. Rappelons ici que ces écritures sous-entendent que les vecteurs de ces bases sont représentés par des polynômes (fixés) de $\Gamma(\mathbb{P}^{4^g-1}, \mathcal{O}(n'))$. Il en ira de même de la section t plus bas.

Pour calculer la hauteur de t, nous faisons intervenir des générateurs de l'idéal de C^g de manière analogue à ce que nous avons fait dans la partie précédente. Notons $\mathcal{I}$ l'idéal de C^g dans $\mathbb{P}^{4^g-1}$.

Lemme 9.3. *Il existe une famille génératrice $\mathcal{G}$ de $\Gamma(\mathbb{P}^{4^g-1}, \mathcal{I}(2n'))$ telle que*

$$h_\infty(\mathcal{G}) \leqslant (2n'+1)^{4^g}(h(C)+1).$$

Démonstration. En raisonnant par récurrence à partir du lemme 2.2 on a dans $\mathbb{P}^{4^g-1}$

$$\deg C^g = g!D^g \quad \text{et} \quad h(C^g) = \frac{g}{2}(g+1)!D^{g-1}h(C).$$

Si l'on applique la proposition 2.2 il vient

$$h_\infty(\mathcal{G}) \leqslant 2n'\binom{2n'+g}{g}h(C^g) + \frac{1}{2}\binom{2n'+4^g-1}{2n'}\log\binom{2n'+4^g-1}{2n'}.$$

Comme $D^{g-1} \leqslant \Delta$ et $g(g+1)! \leqslant m$ on a $h(C^g) \leqslant n'h(C)$ donc

$$\begin{aligned} h_\infty(\mathcal{G}) &\leqslant (2n'+1)^{g+2}h(C) + \tfrac{1}{2}(2n'+1)^{4^g-1}(4^g-1)\log 2n' \\ &\leqslant (2n'+1)^{g+2}h(C) + (2n'+1)^{4^g} \end{aligned}$$

en utilisant par exemple $\log 2n' \leqslant \sqrt{2n'}$ et $4^g \leqslant \sqrt{n'}$. On conclut alors par $g+2 \leqslant 4^g$. □

Venons-en à la détermination de la section t.

Proposition 9.1. *Il existe une représentation polynomiale de t telle que*

$$h(t) \leqslant (n'D)^g(2n'+1)^{4^g-1}(h_\infty(\mathcal{G}) + 2H_u + n').$$

Démonstration. Nous fixons un sous-espace $V_0 \subset \Gamma(\mathbb{P}^{4^g-1}, \mathcal{O}(n'))$ engendré par des monômes de sorte que l'on ait un isomorphisme $V_0 \simeq \Gamma(C^g, \mathcal{O}(n'))$ par restriction à C^g. Nous cherchons $t \in V_0$. D'après la proposition 6.2, les conditions que doit vérifier t s'écrivent : pour tout j

$$\operatorname{rang}(\mathcal{G}, ts_j, (s_1u_k)_k) \leqslant A'$$

(voir la démonstration de la proposition 8.1). Ici A' est une quantité bien déterminée que nous ne chercherons pas à calculer mais majorerons simplement dans la suite par $\dim\Gamma(\mathbb{P}^{4^g-1}, \mathcal{O}(n'))$ et même par $(2n'+1)^{4^g-1}$. Maintenant chaque condition se traduit comme une forme linéaire en t qui comme polynôme sur $\mathbb{Z}$ est homogène de degré au plus A' en chaque groupe $\mathcal{G}$, s et u ainsi que de longueur au plus $A'!(\dim\Gamma(C^g, \mathcal{O}(n')))^{A'}$. Par suite la hauteur h d'une forme linéaire est au plus :

$$A'(h_\infty(\mathcal{G}) + h_\infty(s) + h_\infty(u) + 2\log(2n'+1)^{4^g-1}).$$

Comme $\dim\Gamma(C^g, \mathcal{O}(n')) \leqslant (n'D)^g$ la hauteur de Schmidt de l'espace de ces formes linéaires en t est plus petite que

$$(n'D)^gA'(h_\infty(\mathcal{G}) + 2H_u + 8g\log 2 + 2^{2g+1}\log(2n'+1)).$$

De plus t est déterminé à une constante près par les conditions données donc la hauteur de Schmidt précédente est $h_S((\bar{\mathbb{Q}}t)^\perp) = h_S(\bar{\mathbb{Q}}t) = h(t)$. On vérifie facilement $8\log 2 + 2^{2g+1}\log(2n'+1) \leqslant n'$ et l'on en déduit la borne de l'énoncé. $\square$

In fine, nous voulons évaluer

$$h\left((f(T_i))_{1\leqslant i\leqslant 2^{4g}}\right) = h\left(\left(\frac{t}{s_1}(T_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant 2^{4g}}\right) = h\left(\left(t(T_i)\prod_{j\neq i} s_1(T_j)\right)_{1\leqslant i\leqslant 2^{4g}}\right)$$

où, pour que la dernière écriture ait un sens, on suppose fixées des coordonnées des T_i. En utilisant ici $h \leqslant h_\infty + g\log 4$ puis Cauchy–Schwarz pour majorer les expressions du type $|t(T_i)|_v$, cette hauteur est au plus

$$h_\infty(t) + (2^{4g}-1)h_\infty(s) + n'\sum_{i=1}^{2^{4g}} h(T_i) + g\log 4$$

(on rappelle que t et s_1 sont représentés par des polynômes de degré n'). Pour majorer $h(T_i)$ nous utilisons le lemme 7.2 avec $r=4$, $E_+=0$ et $E_-=2(D-1)P_0$. Ceci permet de prendre $x\in \mathrm{Ker}[4]$ et montre que l'on peut choisir T_i avec des coordonnées de hauteur au plus

$$\tfrac{1}{4}(h(L_n) + 2n\deg(L_n)\max(h(P_0), \log\sqrt{2}))$$

(noter que notre n correspond bien au $\max(rg+n, m)$ du lemme). Avec le corollaire 8.1 cette quantité se majore facilement par $n^{18n+4}(h(C)+1)$. Par suite

$$\sum_{i=1}^{2^{4g}} h(T_i) \leqslant 2^{4g} g n^{18n+4}(h(C)+1) \leqslant H.$$

Comme la hauteur des $f(T_i)$ vaut $16h_\theta^{(4)}(J,\Theta_{\mathrm{sym}})$, nous trouvons à ce stade

$$\begin{aligned} h_\theta^{(4)}(J,\Theta_{\mathrm{sym}}) &\leqslant \tfrac{1}{16}(h(t) + (2^{4g}-1)(H_u+6g) + n'H + 2g) \\ &\leqslant \tfrac{1}{16}(h(t) + 2^{4g}H_u). \end{aligned}$$

En faisant intervenir la proposition 9.1, il vient

$$h_\theta^{(4)}(J,\Theta_{\mathrm{sym}}) \leqslant \tfrac{1}{16}(n'D)^g(2n'+1)^{4^g-1}(h_\infty(\mathcal{G}) + 3H_u).$$

Vu les définitions de H et H_u nous avons

$$H_u \leqslant (2g+1)(n'D)^{g+1}H \leqslant (n')^{g+2}H \leqslant (n')^{g+2}\Delta^3(h(C)+1).$$

Lorsque $g\geqslant 2$ ceci est largement majoré par la borne donnée pour $h_\infty(\mathcal{G})$ (voir lemme 9.3) et donc

$$\begin{aligned} h_\theta^{(4)}(J,\Theta_{\mathrm{sym}}) &\leqslant (n'D)^g(2n'+1)^{2.4^g-1}(h(C)+1) \\ &\leqslant (2n'+1)^{2^{2g+1}+g}(h(C)+1). \end{aligned}$$

Enfin $2m+1\leqslant n^{n/2}$ donc $2n'+1\leqslant n^{37n\gamma/2}$ et il reste à majorer $37\gamma(2^{2g}+g/2)$. Toujours si $g\geqslant 2$ on a $g\leqslant 2^{2g-3}$ d'où $37\gamma(2^{2g}+g/2)\leqslant ((37\times 17)/32)8^g \leqslant 20.8^g$. Ceci termine la démonstration dans le cas où $g>1$. Lorsque $g=1$ on utilise plutôt $\max(2n'+1, n'D)\leqslant n^{18n+2}$ ce qui montre que $h_\infty(\mathcal{G})$ et H_u sont majorés par la même quantité $2n^{4(18n+2)}(h(C)+1)$ puis

$$h_\theta^{(4)}(J,\Theta_{\mathrm{sym}}) \leqslant n^{8(18n+2)}(h(C)+1) \leqslant n^{146n}(h(C)+1)$$

et $146n$ est bien inférieur à $160n = 20n8^g$. Le théorème 1.3 est donc entièrement démontré.

10. *Conclusion*

Dans cette partie nous combinons toutes nos estimations pour établir les théorèmes principaux. Nous nous plaçons tout d'abord dans le cadre du théorème 1.2. Pour alléger, nous notons dans la suite $H_1 = \max(h_\infty(F), \log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|, 1)$ et $H_2 = H_1[K:\mathbb{Q}]^5 \log(h_\infty(F)+2)$.

Proposition 10.1. *Si F est irréductible dans $\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]$ et définit une courbe de genre (géométrique) au moins 2 alors* $\log \mathrm{Card}\{(x,y)\in K^2 \mid F(x,y)=0\} \leqslant 5^{D^4-64}H_2$.

Démonstration. Nous désignons par C la courbe définie par $Z^D F(X/Z, Y/Z)$ dans $\mathbb{P}^2$ et par $\tilde{C}$ sa normalisée. Nous allons majorer $\mathrm{Card}\, C(K)$. Nous nous basons sur l'estimation suivante pour $\tilde{C}$ (il s'agit du résultat de [**19**] combiné avec celui de [**5**] ; voir [**5**, p. 643]) :

$$\mathrm{Card}\,\tilde{C}(K) \leqslant (2^{34}[L:\mathbb{Q}]\max(1, h_\theta^{(4)}(\mathrm{Jac}(\tilde{C}), \Theta_{\mathrm{sym}}))\deg_{16\Theta}\tilde{C})^{(r+1)g^{20}},$$

où $r = \mathrm{rang}\,\mathrm{Jac}(\tilde{C})(K)$, le diviseur Θ_{sym} est un translaté symétrique du diviseur thêta et L un corps de définition de $(\mathrm{Jac}(\tilde{C})(K), \Theta_{\mathrm{sym}})$. Avec les notations de la partie 7, nous pouvons choisir pour L un corps de définition de ω, ce qui permet de prendre $[L:\mathbb{Q}] \leqslant 2^{2g}[K:\mathbb{Q}]$ puisque ω est un point de 2-division d'un point de $\mathrm{Jac}(\tilde{C})(K)$. En outre nous avons $\deg_{16\Theta}\tilde{C} = 16\deg_\Theta \tilde{C} = 16g$. Ceci nous donne la majoration citée dans l'introduction

$$\mathrm{Card}\,\tilde{C}(K) \leqslant (2^{38+2g}[K:\mathbb{Q}]g\max(1,h_\theta))^{(r+1)g^{20}}.$$

Maintenant $\mathrm{Card}\,C(K) \leqslant \mathrm{Card}\,\tilde{C}(K) + D^2$ car C a au plus D^2 points non lisses. En majorant $g \leqslant D^2/2$ on en déduit

$$\mathrm{Card}\,C(K) \leqslant (2^{38+2g}[K:\mathbb{Q}]D^2\max(1,h_\theta))^{(r+1)g^{20}}.$$

D'après le théorème 1.3 nous avons

$$\max(1,h_\theta) \leqslant m^{20m8^g}(h(\tilde{C})+1)$$

où $h(\tilde{C})$ est la hauteur de $\tilde{C}$ dans un plongement $\tilde{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ de degré $\tilde{D}$ et $m = 4g + 2\tilde{D} - 2$. En outre avec le théorème 1.5 nous pouvons choisir $\tilde{D} = D(D-2)$ (on note que l'hypothèse $g \geqslant 2$ entraîne $D \geqslant 4$) et $h(\tilde{C}) \leqslant D^{D^3-5}(6h_\infty(F) + 9D^2)$. D'une part il vient $h(\tilde{C}) + 1 \leqslant D^{D^3-3}5(h_\infty(F)+2)$. D'autre part la majoration $2g \leqslant (D-1)(D-2)$ donne $m \leqslant 2(2D-1)(D-2) \leqslant 4D^2$. En utilisant encore $D \leqslant 2^{D/2}$ nous arrivons à

$$2^{38+2g}D^2\max(1,h_\theta) \leqslant (h_\infty(F)+2)^{42+2g+D+D(D^3-3)/2+(D+2)20m8^g}.$$

Pour simplifier l'exposant, nous écrivons $m(D+2) \leqslant 2D^2(2D-1) \leqslant D^4$ et $42 + 2g + D \leqslant D^4$. Ainsi notre exposant est au plus $24D^4 8^g$. Par suite

$$\log \mathrm{Card}\,C(K) \leqslant (r+1)g^{20}24D^4 8^g[K:\mathbb{Q}]\log(h_\infty(F)+2).$$

La majoration $r + 1 \leqslant 2^{8g^2+14}D^{D^3+13}[K:\mathbb{Q}]^4 H_1$ obtenue à la fin de la partie 5 nous mène à

$$\log \mathrm{Card}\,C(K) \leqslant 2^{8g^2+3g+19}D^{D^3+17}g^{20}H_2.$$

Avec $g \leqslant D^2/2$ nous arrivons à $2^{8g^2+3g-1}D^{D^3+57}H_2$. Si nous réutilisons $D \leqslant 2^{D/2}$ nous pouvons écrire $D^{57} \leqslant 4^{D^3}$. Par ailleurs $2g + 1 \leqslant D^2 - 2D$ et $8g^2 + 3g - 1 \leqslant 2(2g+1)^2$. En combinant, notre majoration devient

$$4^{(D^2-2D)^2+D^3}D^{D^3}H_2 \leqslant (4^{D-2}D)^{D^3}H_2.$$

Enfin on constate aisément que $D/4 \leqslant (5/4)^{D-1}$ donc $4^{D-2}D \leqslant 5^{D-1}$. En substituant et en minorant D^3 par 64 on voit apparaître la borne annoncée. □

Nous examinons ensuite le cas du genre 1. Il s'agit donc de majorer le nombre de points de torsion définis sur K d'une courbe elliptique. On sait, par un théorème de Merel rendu effectif par Parent (voir [**15**]), donner une borne ne dépendant que de $[K:\mathbb{Q}]$. Toutefois la dépendance devient doublement exponentielle pour ce paramètre alors que nous souhaitons une borne de la même forme que précédemment. Nous suivons donc une autre méthode, à partir d'une estimation de Petsche (après Hindry et Silverman) qui fait intervenir le quotient de Szpiro que nous pouvons contrôler par un terme de hauteur.

PROPOSITION 10.2. *Si F est irréductible dans $\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]$ et définit une courbe de genre (géométrique) 1 et si $\{(x,y)\in K^2 \mid F(x,y)=0\}$ est fini alors son cardinal est au plus* $\exp(5^{D^4-2}H_2)$.

Démonstration. On note C et $\tilde{C}$ comme dans la démonstration précédente et l'on a encore $\operatorname{Card} C(K) \leqslant \operatorname{Card} \tilde{C}(K) + D^2$. Si $\tilde{C}(K)=\emptyset$ ceci donne le résultat ; sinon $\tilde{C}$ est une courbe elliptique et par hypothèse $\tilde{C}(K)=\tilde{C}(K)_{\mathrm{tors}}$. Fixons une extension L de K de degré au plus 6 au-dessus de laquelle sont définis tous les points d'ordre 2 de la courbe elliptique $\tilde{C}$. D'après le théorème de Petsche (voir [**17**, théorème 1]) on a

$$\operatorname{Card} \tilde{C}(K) \leqslant \operatorname{Card} \tilde{C}(L)_{\mathrm{tors}} \leqslant 2^{18}[L:\mathbb{Q}]\sigma_{\tilde{C}/L}^2 \log(2^{17}[L:\mathbb{Q}]\sigma_{\tilde{C}/L}^2)$$

où $\sigma_{\tilde{C}/L}$ est le quotient de Szpiro. Nous majorons celui-ci par $\log|N_{L/\mathbb{Q}}\Delta_{\tilde{C}/L}|/\log 2$ où $\Delta_{\tilde{C}/L}$ est le discriminant minimal de notre courbe elliptique. Maintenant l'hypothèse faite sur L permet d'affirmer que $\tilde{C}$ admet un modèle d'équation $y^2=x(x-1)(x-\lambda)$ avec $\lambda\in L$. D'après le lemme 5.1, il existe $u\in\mathcal{O}_L$ tel que $u\lambda\in\mathcal{O}_L$ et $h_\infty(1,u,u\lambda)\leqslant[L:\mathbb{Q}]h_\infty(1,\lambda)$. Par conséquent nous disposons aussi du modèle $y^2=x(x-u^2)(x-u^2\lambda)$ à coefficients dans $\mathcal{O}_L$. Ainsi $\Delta_{\tilde{C}/L}$ divise le discriminant de ce dernier modèle qui vaut $16u^{12}\lambda^2(1-\lambda)^2$. Nous en déduisons

$$\log|N_{L/\mathbb{Q}}\Delta_{\tilde{C}/L}| \leqslant [L:\mathbb{Q}]h_\infty(1,16u^{12}\lambda^2(1-\lambda)^2) \leqslant [L:\mathbb{Q}](6\log 2+12h_\infty(1,u,u\lambda)).$$

En combinant, il vient

$$\sigma_{\tilde{C}/L} \leqslant \frac{[L:\mathbb{Q}]}{\log 2}(6\log 2+12[L:\mathbb{Q}]h_\infty(1,\lambda)) \leqslant 2^5[L:\mathbb{Q}]^2\max(1,h_\infty(1,\lambda))$$

grâce à $2/3\leqslant\log 2\leqslant 1$. Si nous reportons dans la borne de Petsche, elle-même plus petite que $2^{22}[L:\mathbb{Q}]^2\sigma_{\tilde{C}/L}^3$, nous trouvons

$$\operatorname{Card}\tilde{C}(K) \leqslant 2^{37}[L:\mathbb{Q}]^8\max(1,h_\infty(1,\lambda))^3 \leqslant 2^{58}[K:\mathbb{Q}]^8\max(1,h_\infty(1,\lambda))^3.$$

On sait ensuite que le paramètre λ s'écrit comme la puissance quatrième du quotient de deux fonctions thêta associées à $r=2$: $\lambda=(\theta_1/\theta_2)^4$ (voir [**10**, page 187]) et donc $h_\infty(1,\lambda)\leqslant 4h_\theta^{(2)}(\tilde{C},\Theta)$ (on peut en fait montrer que $4h_\theta^{(2)}(\tilde{C},\Theta)=h(1,\lambda,1-\lambda)$; ici $\Theta=\Theta_{\mathrm{sym}}$ est l'origine). En vertu du fait 3.3(ii) de [**5**], nous avons ensuite $h_\theta^{(2)}(\tilde{C},\Theta)\leqslant h_\theta^{(4)}(\tilde{C},\Theta)$ ce qui nous permet d'utiliser les calculs des parties 6 à 9, autrement dit le résultat du théorème 1.3. Nous en déduisons

$$\begin{aligned} h_\infty(1,\lambda) &\leqslant 4(2\tilde{D}+2)^{320(\tilde{D}+1)}(h(\tilde{C})+1)\\ &\leqslant 4(2D^2)^{320D^2}(D^{D^3-5}(6h_\infty(F)+9D^2)+1)\end{aligned}$$

avec le théorème 1.5. En utilisant $D\geqslant 3$ (qui résulte de l'hypothèse sur le genre) il vient

$$\begin{aligned} h_\infty(1,\lambda) &\leqslant 24(2D^2)^{320D^2}D^{D^3-5}D^2(h_\infty(F)+2)\\ &\leqslant D^{321D^3}(h_\infty(F)+2)\end{aligned}$$

et donc

$$\operatorname{Card}\tilde{C}(K) \leqslant D^{965D^3}[K:\mathbb{Q}]^8(h_\infty(F)+2)^3.$$

Comme $\operatorname{Card} C(K) \leqslant \operatorname{Card}\tilde{C}(K) + D^2$, nous obtenons une borne pour $C(K)$ en remplaçant 965 par 966 que nous pouvons encore majorer par D^7. En passant au logarithme, il vient facilement

$$\log \operatorname{Card} C(K) \leqslant D^{12}[K:\mathbb{Q}]\log(h_\infty(F)+2) \leqslant D^{12}H_2$$

et l'on majore encore brutalement $D^{12} \leqslant 5^{D^4-2}$. □

Nous allons conclure en examinant les cas dégénérés où aucune des deux propositions précédentes ne s'applique.

Lemme 10.1. *Si F est irréductible dans $K[X,Y]$ et si $\{(x,y) \in K^2 \mid F(x,y)=0\}$ est fini alors cet ensemble est de cardinal au plus* $\exp(5^{D^4-2}H_2)$.

Démonstration. Supposons tout d'abord que F soit irréductible dans $\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]$. Par ce qui précède il suffit d'établir le cas où la normalisée $\tilde{C}$ de la courbe C est de genre nul. Comme $\tilde{C}(K)$ est fini, il est vide. Par suite $\operatorname{Card} C(K) \leqslant D^2$ et cela donne le résultat (noter $D \geqslant 2$ et $H_2 \geqslant \log 2$). Si F n'est pas irréductible dans $\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]$, nous considérons un diviseur $G \in \bar{\mathbb{Q}}[X,Y]$ irréductible de F. Nous pouvons supposer que l'un des coefficients de G appartient à K. Ceci entraîne que tout conjugué $\sigma(G)$, $\sigma \in \operatorname{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K)$, distinct de G est premier avec G. Comme $\sigma(G) \mid F$, le polynôme F est divisible par le produit des conjugués distincts de G donc, par irréductibilité, F est égal à ce produit multiplié par un élément de K. Maintenant si $(x,y) \in K^2$ avec $F(x,y)=0$ on a $\sigma(G)(x,y)=0$ pour un certain $\sigma \in \operatorname{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K)$ donc pour tous (car (x,y) est fixe). Les zéros de F sont donc contenus dans l'intersection d'au moins deux courbes irréductibles distinctes de degré au plus D. Par suite leur nombre est ici aussi majoré par D^2. □

Passons au cas général.

Lemme 10.2. *Le théorème* 1.2 *est vrai avec la borne* $\exp(5^{D^4-2}H_2)$.

Démonstration. Écrivons $F = \prod_{i=1}^s F_i$ avec F_i irréductible dans $K[X,Y]$ et $D_i = \deg F_i$. Alors par le lemme précédent

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\{(x,y) \in K^2 \mid F(x,y)=0\} &\leqslant \sum_{i=1}^s \operatorname{Card}\{(x,y) \in K^2 \mid F_i(x,y)=0\}\\ &\leqslant \sum_{i=1}^s \exp(5^{D_i^4-2}H_2(F_i))\\ &\leqslant \exp\left(\sum_{i=1}^s 5^{D_i^4-2}H_2(F_i)\right)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la notation $H_2(F_i)$ définie comme H_2 pour F et la relation $e^a + e^b \leqslant e^{a+b}$ pour $a,b \geqslant 1$ (on note $D_i \geqslant 2$). Nous supposons $s \geqslant 2$ car sinon il n'y a rien à faire. Si nous écrivons ensuite

$$\sum_{i=1}^s 5^{D_i^4} \leqslant D5^{(D-2)^4} \leqslant 5^{(D-2)^4+D} \leqslant 5^{D^4-D^3}$$

il reste seulement à majorer $H_2(F_i) \leqslant 5^{D^3} H_2(F)$ pour tout i. Ceci est largement vrai comme le montre l'argument suivant. Nous employons la hauteur $h_{S_3}(F)$ (voir partie 2) qui est multiplicative ($h_{S_3}(FG) = h_{S_3}(F) + h_{S_3}(G)$) et vérifie

$$h_\infty(F) - 2D \leqslant h_{S_3}(F) \leqslant h_\infty(F) + 2D$$

(la première inégalité vient de ce que, pour une place infinie v, la valeur absolue v-adique du coefficient de $X^a Y^b$ dans F est au plus $(D!/a!b!(D-a-b)!)M_v(F) \leqslant e^{2D} M_v(F)$; pour la seconde voir démonstration du lemme 2.3). Si nous appliquons ceci tant pour le polynôme F que pour les F_i, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{s} h_\infty(F_i) \leqslant \sum_{i=1}^{s} (h_{S_3}(F_i) + 2D_i) = h_{S_3}(F) + 2D \leqslant h_\infty(F) + 4D.$$

Nous avons donc $\max(h_\infty(F_i), 1) \leqslant (4D+1)\max(h_\infty(F), 1)$ et

$$\log(h_\infty(F_i) + 2) \leqslant \log(2D+1) + \log(h_\infty(F) + 2) \leqslant (4D+1)\log(h_\infty(F) + 2).$$

Finalement $H_2(F_i) \leqslant (4D+1)^2 H_2(F)$. □

Ce lemme termine donc la démonstration du théorème 1.2. Nous avons même un gain d'un facteur 25 dans l'exposant. Celui-ci est nécessaire pour déduire le théorème 1.1 à cause de la légère différence de formulation : en majorant simplement $h_\infty(F)$ par $\log M$ (et avec $[K:\mathbb{Q}] = \Delta_{K/\mathbb{Q}} = 1$) nous arrivons à

$$\exp(5^{D^4-2}(\log M)(\log(\log M + 2)));$$

toutefois comme $M \geqslant 3$ nous avons $\log(\log M + 2) \leqslant 13 \log\log M$ qui donne la borne du théorème 1.1 avec $13 \leqslant 25$.

Références

1. J.-B. Bost et S. David, 'Notes on the comparison of heights of abelian varieties', Manuscrit. 1997 (voir [**16**]).
2. L. Caporaso, J. Harris et B. Mazur, 'Uniformity of rational points', *J. Amer. Math. Soc.* 10 (1997) 1–35.
3. M. Chardin, 'Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique', *Bull. Soc. Math. France* 117 (1989) 305–318.
4. S. David et P. Philippon, 'Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores', *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa IV* 28 (1999) 489–543 ; Erratum, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa IV* 29 (2000) 729–731.
5. S. David et P. Philippon, 'Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes', *Comment. Math. Helv.* 77 (2002) 639–700.
6. L. Gruson, R. Lazarsfeld et C. Peskine, 'On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves', *Invent. math.* 72 (1983) 491–506.
7. R. Hartshorne, *Algebraic geometry* (Springer, New York, 1977).
8. L. T. Hoa, 'Finiteness of Hilbert fonctions and bounds for Castelnuovo-Mumford regularity of initial ideals', *Trans. Amer. Math. Soc.* 360 (2008) 4519–4540.
9. N. Jacobson, *Basic algebra I* (W. H. Freeman, New York, 1985).
10. R. de Jong, 'On the Arakelov theory of elliptic curves', *Enseign. Math.* (2) 51 (2005) 179–201.
11. T. Krick, L. Pardo et M. Sombra, 'Sharp estimates for the arithmetic Nullstellensatz', *Duke Math. J.* 109 (2001) 521–598.
12. C. Liebendörfer et G. Rémond, 'Hauteurs de sous-espaces sur les corps non commutatifs', *Math. Z.* 255 (2007) 549–577.
13. P. Lockhart, M. Rosen et J. Silverman, 'An upper bound for the conductor of an abelian variety', *J. Algebraic Geom.* 2 (1993) 569–601.
14. T. Ooe et J. Top, 'On the Mordell–Weil rank of an abelian variety over a number field', *J. Pure Appl. Algebra* 58 (1989) 261–265.
15. P. Parent, 'Bornes effectives pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres', *J. reine angew. Math.* 506 (1999) 85–116.
16. F. Pazuki, 'Theta height and Faltings height', Preprint, 2009, arXiv : 0907.1458.

17. C. Petsche, 'Small rational points on elliptic curves over number fields', *New York J. Math.* 12 (2006) 257–268.
18. G. Rémond, 'Hauteurs thêta et construction de Kodaira', *J. Number Theory* 78 (1999) 287–311.
19. G. Rémond, 'Décompte dans une conjecture de Lang', *Invent. Math.* 142 (2000) 513–545.
20. G. Rémond, Géométrie diophantienne multiprojective (chapitre 7). dans : *Introduction to algebraic independence theory* (édité par Y. Nesterenko et P. Philippon). Lecture Notes in Mathematics 1752 (Springer, Berlin, 2001) 95–131.
21. G. Rémond, 'Sur le théorème du produit', *J. Théor. Nombres Bordeaux.* 13 (2001) 287–302.
22. G. Rémond, 'Inégalité de Vojta généralisée', *Bull. Soc. Math. France* 133 (2005) 459–495.
23. F. Rodríguez Villegas, J. Voloch et D. Zagier, 'Constructions of plane curves with many points', *Acta Arith.* 99 (2001) 85–96.
24. J. Thunder, 'Remarks on adelic geometry of numbers', *Number theory for the millennium, III* (A. K. Peters, Natick, 2002) 253–259.
25. A. Weil, *Courbes algébriques et variétés abéliennes* (Hermann, Paris, 1971).
26. O. Zariski et P. Samuel, *Commutative algebra I* (Van Nostrand, New York, 1958).
27. S. Zhang, 'Positive line bundles on arithmetic varieties', *J. Amer. Math. Soc.* 8 (1995) 187–221.

Gaël Rémond
Institut Fourier, UMR 5582
BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères cedex
France

Gael.Remond@ujf-grenoble.fr