HAUTEURS ET ISOGÉNIES

Michel RAYNAUD

INTRODUCTION

Considérons un corps de nombres K , une K-variété abélienne A_K et son modèle de Néron A sur l'anneau d'entiers $\mathcal{O}$ de K. Si ω_A est le $\mathcal{O}$-module inversible des formes différentielles sur A , de degré maximum et invariantes par translations, on a sur ω_A une structure d'Arakelov et en particulier, ω_A a un degré $\deg(\omega_A)$. Si de plus A est semi-stable, on définit la hauteur de A_K :

$$\mathrm{ht}(A_K) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \deg(\omega_A) \quad .$$

Dans cet exposé on étudie le comportement de $\deg(\omega_A)$ par isogénie.

Soit donc $u_K : A_K \longrightarrow B_K$ une K-isogénie et $u : A \longrightarrow B$ son extension aux modèles de Néron.

Dans le §1 on exprime $\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B)$ en fonction de la ramification de u , et plus précisément, en fonction de la différente de $\mathrm{Ker}(u)$, lorsque u est plat.

Au §2, on montre que si A' est le modèle de Néron de la variété duale A'_K de A_K , on a $\deg(\omega_A) = \deg(\omega_{A'})$. Ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite du volume ; la preuve est locale et plaide en faveur des propriétés différentielles du modèle de Néron, y compris dans le cas où A n'est pas semi-stable.

Les résultats essentiels pour la suite se trouvent au §4 . On suppose A semi-stable et on établit le résultat suivant :

THÉORÈME.- *L'ensemble des hauteurs des variétés abéliennes B_K , K-isogènes à A_K est fini. Son cardinal, ainsi que les différences $|\mathrm{ht}(A_K) - \mathrm{ht}(B_K)|$ peuvent être majorés de façon effective.*

La démonstration du théorème a pour point de départ le résultat suivant, dû à Faltings :

Soient p un nombre premier, $(A_K)_{p^\infty} = \bigcup_n (A_K)_{p^n}$, le K-groupe p-divisible constitué par la torsion p-primaire de A_K , $T_p(A_K)$ son module de Tate. Considérons $H_K = \bigcup_n (H_K)_{p^n}$ un sous-K-groupe p-divisible de $(A_K)_{p^\infty}$. Il lui correspond un sous-$\mathbb{Z}_p$-module M de $T_p(A_K)$, stable sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$; soit h le rang de M . Supposons pour simplifier $K = \mathbb{Q}$. Faltings calcule la puissance du caractère cyclotomique qui décrit l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur $\Lambda^h M$, au moyen d'un invariant local, lié à la réduction de H_K en p . Cette relation entraîne que les isogénies $u_K : A_K \longrightarrow B_K$, de noyau $(H_K)_{p^n}$, conservent le degré d'Arakelov pour $n \gg 0$.

Ceci étant, les sous-groupes p-divisibles de $(A_K)_{p^\infty}$, du type H_K , qui apparaissent dans la démonstration de Faltings, s'introduisent de façon non effective : ils sont extraits, par un argument de compacité des noyaux, de familles infinies de p-isogénies.

Pour sauver l'effectivité, dans cette partie galoisienne de la démonstration, on remplace la considération des sous-groupes p-divisibles H_K , par celle des sous-groupes $(H_K)_{p^n}$, dont les points à valeurs dans $\overline{K}$, sont du type $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$. Autrement dit, au lieu des groupes p-divisibles, appelés aussi de Barsotti-Tate (BT), on utilise les groupes de Barsotti-Tate tronqués (BT_n) . Les propriétés différentielles des BT_n , ainsi que les propriétés de déformation dont on a besoin, sont établies dans ce volume Exp. VI.

Que l'on utilise les BT ou bien les BT_n , il arrive que ceux-ci se spécialisent mal en les places ramifiées de K . On contrôle ce phénomène, de façon effective, au §3, grâce à la "presque décomposition de Hodge-Tate" des schémas en groupes finis, mise en évidence par Fontaine.

J'ai appris l'idée d'utiliser les BT_n dans une lettre de Parshin. Le §4 doit également beaucoup à l'exposé de Deligne au séminaire Bourbaki.

I.- ISOGÉNIES ET DIFFÉRENTE

1.0.- Notations : Dans la suite K sera un corps de l'un des deux types suivants :

Cas global : K est un corps de nombres, extension finie de $\mathbb{Q}$.

Cas local : K est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet, d'inégales caractéristiques, de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$.

Dans les deux cas, on note $\mathcal{O}$ l'anneau d'entiers de K et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K .

Partant d'un corps global K et d'une place finie v de K , on obtient par complétion de K en v un corps local K_v , d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_v$, de corps résiduel fini k_v .

1.1.- Modèle de Néron et isogénies

Soient A_K une K-variété abélienne de dimension g et A son modèle de Néron sur $\mathcal{O}$. Donc A est $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse, séparé, de type fini, de fibre générique A_K . On note A^o le sous-schéma en groupes ouvert de A , à fibres connexes. Nous dirons abusivement que A^o est le modèle de Néron connexe de A_K sur $\mathcal{O}$.

Soit $u_K : A_K \longrightarrow B_K$ une K-isogénie entre K-variétés abéliennes, de noyau M_K . Le degré d de u_K est le cardinal de $M_K(\overline{K})$:

$$d = \# M_K(\overline{K}) \quad .$$

Le morphisme u_K s'étend canoniquement en un $\mathcal{O}$-morphisme des modèles de Néron $u : A \longrightarrow B$. Soit $u^o : A^o \longrightarrow B^o$ la restriction de u aux modèles de Néron connexes. On pose $M = \operatorname{Ker} u^o$ qui est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes.

Si K est global et si v est une place finie de K , par changement de base on obtient $A_v = A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_v$, $A_{K_v} = A_K \otimes_K K_v \ldots$, et A_v est un modèle de Néron de A_{K_v} sur $\mathcal{O}_v$.

La proposition suivante est immédiate : (cf. [5], 2.2.1) :

PROPOSITION 1.1.1.- *Supposons* K *local. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $u : A \longrightarrow B$ *est plat.*

(ii) M *est plat sur* $\mathcal{O}$

(iii) M *est quasi-fini sur* $\mathcal{O}$

(iv) $(u^o) \underset{R}{\otimes} k$ *est surjectif.*

De plus, lorsque ces conditions sont réalisées, on a une suite exacte de schémas en groupes pour la topologie fidèlement plate de présentation finie (fppf) :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow A^o \xrightarrow{u^o} B^o \longrightarrow 0 \quad .$$

Exemples 1.1.2 : Supposons K local.

a) Si A_K a bonne réduction sur $\mathcal{O}$, u et M sont finis et plats.

b) Si A_K a réduction semi-stable sur $\mathcal{O}$, u et M sont quasi-finis et plats. (car u se factorise à travers la multiplication par $d : A \longrightarrow A$ qui a un noyau quasi-fini).

c) Si $(d,p) = 1$, alors u et M sont étales.

d) Supposons que A ne soit pas semi-stable. Prenons $A_K = B_K$ et pour u_K la multiplication par p . Alors u est la multiplication par p dans A et u n'est pas plate.

1.2.- <u>Schémas en groupes quasi-finis</u>

Supposons K local.

Soit X un $\mathcal{O}$-schéma quasi-fini et séparé. Alors, comme $\mathcal{O}$ est complet (hensélien suffirait), X se décompose canoniquement en

$$X = X_1 \amalg X_2 \quad ,$$

où X_1 est fini sur $\mathcal{O}$ et X_2 est au-dessus de $\mathrm{Spec}(K)$. Le schéma X_1 n'est autre que la complétion de X le long de sa fibre au-dessus de k ; nous le notons désormais $\hat{X}$ et nous dirons que $\hat{X}$ est la <u>partie finie</u> de X .

Si X est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes, $\hat{X}$ est un sous-schéma en groupes ouvert et fermé de X . Si de plus X est plat sur $\mathcal{O}$ et est un schéma en groupes commutatifs, le groupe quotient fppf $X/\hat{X}$ est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes étale , prolongement par zéro sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ de sa fibre générique.

1.3.- <u>Différente</u> (cf. Exp. VI, 4.9.4).

Considérons à nouveau une isogénie u_K , comme dans 1.1, et ses extensions u (resp. u^o) aux modèles de Néron (resp. aux modèles de Néron connexes).

Soit $\omega_{A/\mathcal{O}}$ le faisceau inversible sur A des formes différentielles relatives, de degré maximum, et soit ω_A l'image réciproque de $\omega_{A/\mathcal{O}}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$, par la section unité de A . On a donc $\omega_A = \det(\mathrm{Lie}\ A)^{\vee}$, où $\vee$ désigne le $\mathcal{O}$-module dual. On définit de même ω_B .

Considérons le $\mathcal{O}$-module inversible $\omega_A \otimes \omega_B^{-1}$. Lorsque u^o est surjectif, de sorte que l'on a une suite exacte fppf de schémas en groupes :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow A^o \xrightarrow{u^o} B^o \longrightarrow 0 \quad ,$$

alors $\omega_A \otimes \omega_B^{-1}$ s'interprète en terme du noyau $M : \omega_A \otimes \omega_B^{-1}$ est l'image réciproque, par la section unité de M , du module dualisant relatif $\omega_{M/\mathcal{O}}$. En effet, si $\mathcal{J}$ est le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{A^o}$ qui définit M , M est localement intersection complète dans A^o et l'on a :

$$\omega_{M/\mathcal{O}} = \omega_{A^o/\mathcal{O}} \otimes \det(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^{\vee} = \omega_{A^o/\mathcal{O}} \otimes (u^o)^*(\omega^{-1}_{B^o/\mathcal{O}}) = f^*(\omega_A \otimes \omega_B^{-1}) \quad ,$$

où $f : M \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ est le morphisme structural.

Dans le cas où M n'est pas plat sur $\mathcal{O}$, $\omega_A \otimes \omega_B^{-1}$ n'a plus de raison de se calculer au moyen de M , mais est déterminé par u et nous poserons :

$$\omega_A \otimes \omega_B^{-1} = \omega_u \quad .$$

Du fait que u_K est étale, la flèche canonique $\omega_B \longrightarrow \omega_A$, déduite de u , est injective. Par tensorisation avec ω_B^{-1} , on obtient donc une injection canonique :

$$\mathcal{O} \hookrightarrow \omega_A \otimes \omega_B^{-1} = \omega_u \ ,$$

et il existe un idéal non nul $\mathscr{D}_u$ de $\mathcal{O}$, tel que $\omega_u = \mathcal{O}(\mathscr{D}_u^{-1})$.
En d'autres termes, l'application $\mathrm{Lie}(u) : \mathrm{Lie}(A) \longrightarrow \mathrm{Lie}(B)$ est injective et si, dans des bases locales, on calcule son déterminant, celui-ci engendre $\mathscr{D}_u$.
En particulier, on voit que $\mathcal{O}/\mathscr{D}_u$ a pour support les places v où u_v n'est pas étale et nous dirons que $\mathscr{D}_u$ est la <u>différente</u> de u . Pour justifier cette terminologie, nous allons esquisser le lien avec la notion classique de différente, en une place v où M_v est quasi-fini.

Pour ce faire, "rappelons" (cf. [7], Appendix), que si on a un morphisme fini et plat de S-schémas lisses :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

on dispose d'une application canonique sur les différentielles relatives de degré maximum, la trace :

$$\mathrm{Tr} : u_*(\omega_{X/S}) \longrightarrow \omega_{Y/S}$$

qui est $\mathcal{O}_Y$-linéaire et telle que

(1) $$\mathrm{Tr}(fu_*(\omega)) = \mathrm{Tr}_{X/Y}(f)\omega \ , \quad \forall \ V \text{ ouvert de } Y \ ,$$
$$\forall \ f \in \mathcal{O}_X|u^{-1}(V), \forall \omega \in \omega_{Y/S}|V \ .$$

De plus, l'application $\mathcal{O}_X$-linéaire associée :

(2) $$\omega_{X/S} \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \omega_{Y/S})$$
$$\omega \longmapsto (f \longmapsto \mathrm{Tr}(f\omega))$$

est un isomorphisme.

Tensorisant les deux membres de (2) par $\omega_{Y/S}^{-1}$, on en déduit un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules inversibles :

(3) $$\omega_{X/S} \otimes \omega_{Y/S}^{-1} \xrightarrow[\sim]{\text{can}} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$$

qui est la formule de passage clé entre le calcul du complexe dualisant relatif $\omega_{X/Y}$ en terme de présentation par des schémas lisses d'une part, et en terme du morphisme fini et plat, localement intersection complète $u : X \longrightarrow Y$ d'autre part.

Par ailleurs, l'application canonique déduite de $u : u^*(\omega_{Y/S}) \longrightarrow \omega_{X/S}$ donne une flèche $\mathcal{O}_X \longrightarrow \omega_{X/S} \otimes \omega_{Y/S}^{-1}$ qui, composée avec (3) fournit une application $\mathcal{O}_X$-linéaire :

(4) $$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_Y) \ .$$

D'après (1), (4) n'est autre que l'application

$$f \longmapsto (g \longmapsto \mathrm{Tr}_{X/Y}(gf)) \ .$$

Supposons de plus que la restriction de u à un ouvert U de X , schématiquement dense dans X , soit étale. Alors (4) est un isomorphisme au-dessus de U et il existe un idéal inversible $\mathcal{D}$ de $\mathcal{O}_X$ tel que (4) s'identifie à l'application canonique

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{D}^{-1} \ .$$

Alors $\mathcal{D}^{-1}$ coïncide avec la différente inverse classique, formée des sections méromorphes f de $\mathcal{O}_X$, telles que $\mathrm{Tr}(fx) \in \mathcal{O}_Y$, $\forall\, x \in \mathcal{O}_X$.

Supposons de plus que X et Y soient des S-schémas en groupes et que u soit un morphisme de S-schémas en groupes. Alors $\mathcal{D}$ est un faisceau équivariant sur X , donc est l'image réciproque, d'un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_S$, noté encore $\mathcal{D}$. De plus $H = \mathrm{Ker}(u)$ est un S-schéma en groupes fini et plat et par le changement de base $S \longrightarrow Y$ défini par la section unité, on trouve que $\mathcal{D}\mathcal{O}_H$ est bien la différente classique de la $\mathcal{O}_S$-algèbre finie, génériquement étale $\mathcal{O}_H$.

Revenons à notre isogénie u_K et à son prolongement u^o . Supposons u quasi-fini et soit $\hat{M}$ la partie finie (1.2) de M , de sorte que l'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow A^o \xrightarrow{\hat{u}} A^o/\hat{M} \longrightarrow 0$$

avec $\hat{u}$ fini et un morphisme étale

$$v : A^o/\hat{M} \longrightarrow B^o$$

tels que $u = v\hat{u}$.

Comme v est étale, $\mathcal{D}_u = \mathcal{D}_{\hat{u}}$ et les considérations précédentes montrent que $\mathcal{D}_u\, \mathcal{O}_M$ est l'idéal différente de la $\mathcal{O}$-algèbre finie $\mathcal{O}_{\hat{M}}$.

1.4.- Isogénie et degré d'Arakelov

Dans ce numéro, K est un corps global.

Soit $\tau : K \longrightarrow \mathbb{C}$ un plongement complexe de K . Partant d'une isogénie $u_K : A_K \longrightarrow B_K$ comme dans 1.1, on en déduit par le changement de corps τ , une isogénie de tores complexes $u_\tau : A_\tau \longrightarrow B_\tau$.

Rappelons (exposé I §3-3) que sur ω_{A_τ} on a une métrique hermitienne telle que

$$\langle\omega,\omega\rangle_\tau = \int_{A_\tau} |\omega \wedge \bar{\omega}|$$

où le second membre désigne l'intégrale pour une mesure de Haar normalisée par un facteur ne dépendant que de la dimension de A .

On munit le faisceau $\omega_{u_\tau} = \omega_{A_\tau} \otimes \omega_{B_\tau}^{-1} = \mathcal{D}_{u_\tau}^{-1}$ de la métrique "différence" .

Soit $\omega \in \omega_B$. On a

$$\int_{A_\tau} |u^*(\omega) \wedge u^*(\bar{\omega})| = d\int_{B_\tau} |\omega \wedge \bar{\omega}| \qquad ,$$

où d est le degré de u_K .

C'est dire que la section 1 de $\omega_u = \mathcal{D}_u^{-1}$ est telle que

$$\langle 1,1\rangle_\tau = d \quad .$$

Donc, si v est une place à l'infini de K , la valeur absolue v-adique de la section 1 de $\mathcal{D}_u^{-1}$ est telle que

$$\|1\|_v = d \quad \text{si} \quad v \quad \text{est complexe}$$

$$\|1\|_v = d^{1/2} \quad \text{si} \quad v \quad \text{est réelle.}$$

La contribution des places à l'infini dans le calcul du degré d'Arakelov (réf. exposé I §1, corollaire de la proposition 1.1) de la section 1 de $\mathcal{D}_u^{-1}$ est alors:

$$-\sum_{v \text{ infini}} \operatorname{Log}\|1\|_v = -\operatorname{Log}(d)\,[K:\mathbb{Q}]/2 \quad .$$

Par ailleurs, le degré, à distance finie de la section 1 de $\mathcal{D}_u^{-1}$ est $\log \#\,(\mathcal{O}/\mathcal{D}_u)$. D'où la proposition :

PROPOSITION 1.4.1.-

$$\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B) = \deg(\omega_u) = \deg(\mathcal{D}_u^{-1}) = -\operatorname{Log}(d)[K:\mathbb{Q}]/2 + \operatorname{Log}\#\,(\mathcal{O}/\mathcal{D}_u) \quad .$$

COROLLAIRE 1.4.2.- *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\deg(\omega_A) = \deg(\omega_B)$,

(ii) $\#(\mathcal{O}/\mathcal{D}_u) = d^{[K:\mathbb{Q}]/2}$

(iii) $d^{[K:\mathbb{Q}]/2}$ *est un entier et engendre l'idéal* $\operatorname{Norm}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}}(\mathcal{D}_u)$,

(iv) *Pour tout nombre premier* p , *si* p^h *est la puissance de* p *qui divise* d , *on a :*

$$h[K:\mathbb{Q}]/2 = \sum_{\mathfrak{p}/p} v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_u)\, d_{\mathfrak{p}} \quad ,$$

où $v_{\mathfrak{p}}$ est la valuation de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, de groupe de valeurs $\mathbb{Z}$ et $d_{\mathfrak{p}}$ est le degré du corps résiduel $k_{\mathfrak{p}}$ sur $\mathbb{F}_p$.

CORROLLAIRE 1.4.3.- *Les conditions de* 1.4.2 , *sont en particulier satisfaites, si pour tout* p *premier et toute place* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathcal{O}$ *au-dessus de* p , *on a*

$$v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_u) = e_{\mathfrak{p}}h/2$$

où h et $v_{\mathfrak{p}}$ *sont comme dans* 1.4.2 et $e_{\mathfrak{p}}$ *est l'indice de ramification de* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ *au-dessus de* $\mathbb{Z}_p$.

De plus, si ces conditions sont réalisées, le faisceau d'Arakelov $\mathcal{D}_u^{\otimes 2}$ *est trivial. Pour que le faisceau d'Arakelov* $\mathcal{D}_u$ *soit trivial, il faut et il suffit qu'il existe* $f \in K$, *tel que* $f^2 = \alpha d$, *où* α *est une racine de l'unité.*

Démonstration de 1.4.3

Si pour toute place $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$ au-dessus de p on a $v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_u) = e_{\mathfrak{p}}h/2$, la condition iv) de 1.4.2 est vérifiée car $\sum_{\mathfrak{p}/p} e_{\mathfrak{p}} d_{\mathfrak{p}} = [K:\mathbb{Q}]$, d'où la première assertion.

Supposons que $v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_u) = e_{\mathfrak{p}}\, h/2$ pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$. Alors d engendre $\mathcal{D}_u^{\otimes 2}$, donc 1/d engendre $\mathcal{D}_u^{-2}$. Par ailleurs, pour tout plongement complexe $\tau : K \longrightarrow \mathbb{C}$, la section 1 du faisceau d'Arakelov $\mathcal{D}_u^{-2}$ est telle que $\langle 1,1\rangle_\tau = d^2$, donc $\langle 1/d,1/d\rangle_\tau = 1$ et 1/d trivialise le faisceau d'Arakelov $\mathcal{D}_u^{-2}$.

Enfin, si le faisceau d'Arakelov $\mathcal{D}_u$ est trivialisé par une section f , on a $f^2 = \alpha d$, où α est une unité de $\mathcal{O}$, qui dans tout plongement complexe est de module 1, donc α est une racine de l'unité.

Remarque 1.4.4 : Les conditions de 1.4.2 sont celles qui interviennent dans la démonstration de Faltings. Elles introduisent une moyenne des valuations de $\mathcal{D}_u$ en les diverses places de $\mathcal{O}$ au-dessus de tout premier p . On peut les traduire encore en disant que le faisceau d'Arakelov $\mathrm{Norm}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}}(\mathcal{D}_u)$ est trivial.

La condition de 1.4.3 est locale sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$. C'est elle qui intervient, au numéro suivant, dans la comparaison du degré d'une variété abélienne et celui de sa duale.

2.- DEGRÉ D'ARAKELOV D'UNE VARIÉTE ABÉLIENNE ET DE SA DUALE

2.1.- Soient K un corps local ou global (1.0), $u_K : A_K \longrightarrow B_K$ une K-isogénie entre K-variétés abéliennes, $u'_K : B'_K \longrightarrow A'_K$ l'isogénie duale, d le degré commun de u_K et u'_K . On étend ces isogénies en des morphismes $u : A \longrightarrow B$ et $u' : B' \longrightarrow A'$, entre les modèles de Néron sur l'anneau d'entiers $\mathcal{O}$ de K . On dispose alors des idéaux différentes $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{D}_{u'}$ (1.3).

THÉORÈME 2.1.1.- *On a* $\mathcal{D}_u \mathcal{D}_{u'} = (d)$.

Remarque 2.1.2 : Supposons dans 2.1.1 que A ait bonne réduction sur $\mathcal{O}$. Alors il en est de même de A' ; u et u' sont finis et plats et ont pour noyaux des $\mathcal{O}$-schémas en groupes finis et plats, duaux l'un de l'autre pour la dualité de Cartier. Dans ce cas, 2.1.1 résulte de [8] , appendice prop. 9.

Il suffit clairement d'établir le théorème dans le cas d'un corps local, ce qui fera l'objet des numéros suivants. Pour l'instant, donnons quelques corollaires.

COROLLAIRE 2.1.3.- *Supposons* K *global. Soient* A_K *une* K*-variété abélienne,* A'_K *la variété abélienne duale,* A *et* A' *les modèles de Néron respectifs de* A_K *et* A'_K *sur l'anneau d'entiers* $\mathcal{O}$.
Alors les faisceaux d'Arakélov ω_A^2 *et* $\omega_{A'}^2$ *sont isomorphes ; en particulier* $\deg(\omega_A) = \deg(\omega_{A'})$.

Démonstration du corollaire : Soit L_K un faisceau ample sur A_K . On lui associe, de la manière habituelle, une isogénie autoduale :

$$u_K : A_K \longrightarrow A'_K .$$

Soit $u : A \longrightarrow A'$ son extension aux modèles de Néron et soit d le degré de u_K . Comme u_K est autoduale, le théorème 2.1.1 entraîne :

$$\mathcal{D}_u^2 = (d) .$$

Alors $1/d$ trivialise le faisceau inversible $\mathcal{D}_u^{-2}$. Compte tenu des métriques à l'infini, calculées dans 1.4, $1/d$ est même une trivialisation du faisceau d'Arakelov $\mathcal{D}_u^{-2}$.

Comme on a $\omega_A = \omega_{A'} \mathcal{D}_u^{-1}$, égalité entre faisceaux d'Arakelov, on a bien $\omega_A^2 = \omega_{A'}^2$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2.1.4.- *Gardons les hypothèses de* 2.1.1 *et supposons* K *global.*

1) *On a :*

$$|\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B)| \leq \frac{[K:\mathbb{Q}]}{2} \operatorname{Log}(d) .$$

2) *Supposons* $d = p^n$ *, avec* p *premier. Alors*

$$\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B) = \frac{m}{2} \operatorname{Log}(p)$$

avec m *entier,* $|m| \leq [K:\mathbb{Q}]n$.

Démonstration du corollaire : d'après 1.4.1, on a :

$$\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B) = -\frac{[K:\mathbb{Q}]}{2} \operatorname{Log}(d) + \operatorname{Log}(\operatorname{Norme}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}}(\mathcal{D}_u)) .$$

D'après 2.1.1, on a $\mathcal{V}_u \supset (d)$, donc $\mathrm{Norme}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_u) \supset d^{[K:\mathbb{Q}]}$, d'où :

$$0 \leq \mathrm{Log}(\mathrm{Norme}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_u)) \leq [K:\mathbb{Q}]\ \mathrm{Log}(d)\ .$$

L'assertion 1) en résulte. Si $d = p^n$, $\mathrm{Norme}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_u) = p^h$, avec h entier, $0 \leq h \leq [K:\mathbb{Q}]n$. Alors $\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B) = \log(p)\left[h - \frac{[K:\mathbb{Q}]}{2}n\right] = \mathrm{Log}(p)\frac{m}{2}$ avec $m = 2h - [K:\mathbb{Q}]n$, d'où l'assertion 2).

Remarque 2.1.5 : Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et soit C une k-courbe algébrique intègre, régulière. Considérons le modèle de Néron sur C d'une variété abélienne définie sur le corps des fractions de C et soit A' le modèle de Néron de la variété duale. On dispose alors sur C des faisceaux inversibles ω_A et $\omega_{A'}$. Si A est semi-stable, Moret-Bailly a montré dans [8] qu'il existe N entier > 0 , tel que $\omega_A^N \simeq \omega_{A'}^N$, ce qui apparaît comme un substitut à 2.1.3. Le cas des modèles de Néron non semi-stables reste ouvert.

2.2.- Jusqu'à la fin du §2, on suppose K local donc (1.0) de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$.

Pour démontrer 2.1.1, on peut, quitte à remplacer $\mathcal{O}$ par le complété d'une extension maximale non ramifiée de $\mathcal{O}$, supposer k algébriquement clos. Nous allons d'abord donner une démonstration "géométrique", utilisant les structures pro-algébriques sur les groupes de cohomologie. Ces structures ont été étudiées par Lucile Bégueri [1] et complètent la théorie du corps de classes d'un corps local à corps résiduel algébriquement clos de J.-P. Serre [12] .

Après cet effort, et pour se rassurer un peu, nous donnerons également une démonstration "arithmétique", valable lorsque k est fini et basée sur les mêmes idées, mais où l'on remplace les arguments géométriques par un décompte de points.

Notons π une uniformisante de $\mathcal{O}$ et v la valuation de K telle que $v(\pi) = 1$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$. Si X est un $\mathcal{O}$-schéma X_n est le $\mathcal{O}_n$-schéma $X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_n$.

Rappelons ([4] et [13]) que le foncteur de Greenberg de niveau n associe à X_n un k-schéma $\mathrm{Gr}(X_n)$ et une bijection fonctorielle :

(can) $\qquad X(\mathcal{O}_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}(X_n)(k)$.

On ne s'intéresse qu'à la structure quasi-algébrique sous-jacente à $\mathrm{Gr}(X_n)$, notée $\underline{\underline{X}}_n$.

On a de plus des morphismes de transition $\underline{\underline{X}}_{n+1} \longrightarrow \underline{\underline{X}}_n$ qui, par les applications (can) correspondent aux applications naturelles de réduction mod π^n $X(\mathcal{O}_{n+1}) \longrightarrow X(\mathcal{O}_n)$. On définit alors $\underline{\underline{X}} = \varprojlim_n \underline{\underline{X}}_n$, de sorte que l'on a une bijection can : $X(\mathcal{O}) \longrightarrow \underline{\underline{X}}(k)$. Si X est lisse sur $\mathcal{O}$, équidimensionnel de dimension relative d , $\mathrm{Gr}(X_n)$ est lisse sur k , équidimensionnel, de dimension nd .

Le foncteur $X \longmapsto \underline{\underline{X}}$ transforme $\mathcal{O}$-schémas en groupes en k-groupes pro-algébriques. De plus ces constructions sont compatibles aux extensions finies étales de $\mathcal{O}$ et au passage au complété d'une extension maximale non ramifiée de $\mathcal{O}$.

Sous les hypothèses de 2.1.1, appliquons le foncteur de Greenberg au morphisme $u : A \longrightarrow B$. On obtient un morphisme $\underline{\underline{u}} : \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ de k-groupes pro-algébriques, de noyau $\underline{\underline{M}}$ et soit $\underline{\underline{S}}$ le conoyau, de sorte que l'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \underline{\underline{M}} \longrightarrow \underline{\underline{A}} \xrightarrow{u} \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{S}} \longrightarrow 0 \ .$$

LEMME 2.2.1.- $\underline{\underline{S}}$ *est un groupe quasi-algébrique, de dimension* $v(\mathscr{V}_u)$

Démonstration : Pour n entier $\gg 0$, l'application exponentielle réalise un isomorphisme de π^n Lie(A) sur $\operatorname{Ker} A(\mathcal{O}) \longrightarrow A(\mathcal{O}_n)$, compatible avec les structures pro-algébriques, et de même pour B . On en déduit un diagramme commutatif de groupes pro-algébriques, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi^n \underline{\underline{\mathrm{Lie}}}(A) & \longrightarrow & \underline{\underline{A}} & \longrightarrow & \underline{\underline{A}}_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \underline{\underline{\mathrm{Lie}}}(u)} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{\underline{u}}} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{\underline{u}}_n} & & \\
0 & \longrightarrow & \pi^n \underline{\underline{\mathrm{Lie}}}(B) & \longrightarrow & \underline{\underline{B}} & \longrightarrow & \underline{\underline{B}}_n & \longrightarrow & 0
\end{array} \ .$$

Le lemme du serpent fournit alors une suite exacte de k-groupes pro-algébriques :

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow M \longrightarrow \operatorname{Ker}(\underline{\underline{u}}_n) \longrightarrow \operatorname{Coker} \underline{\underline{\mathrm{Lie}}}(u) \longrightarrow \underline{\underline{S}} \longrightarrow \operatorname{Coker}(\underline{\underline{u}}_n) \longrightarrow 0 \ .$$

Or $\underline{\underline{M}}$ est fini, (car $M(\mathcal{O})$ est fini) et $\operatorname{Ker}(\underline{\underline{u}}_n)$ et $\operatorname{coker}(\underline{\underline{u}}_n)$ ont même dimension car $\underline{\underline{A}}_n$ et $\underline{\underline{B}}_n$ ont même dimension, égale à n fois la dimension g de la K-variété abélienne A_K . Coker(Lie u) est un $\mathcal{O}$-module de longueur finie égale à $v(\mathscr{V}_u)$; le groupe $\operatorname{Coker}(\underline{\underline{\mathrm{Lie}}}\ u)$ a donc pour dimension $v(\mathscr{V}_u)$. On déduit de (2) que $\underline{\underline{S}}$ est quasi-algébrique, de dimension finie, égale à $v(\mathscr{V}_u)$, d'où le lemme.

Dualement, on a une suite exacte de k-groupes pro-algébriques :

$$(1') \qquad 0 \longrightarrow \underline{\underline{M}}' \longrightarrow \underline{\underline{B}}' \xrightarrow{\underline{\underline{u}}'} \underline{\underline{A}}' \longrightarrow \underline{\underline{S}}' \longrightarrow 0$$

et on a de même $\dim(\underline{\underline{S}}') = v(\mathscr{V}_{u'})$.

2.3.- Supposons maintenant k algébriquement clos et considérons la suite exacte de cohomologie galoisienne associée à la suite exacte de K-groupes algébriques $0 \longrightarrow M_K \longrightarrow A_K \xrightarrow{u_K} B_K \longrightarrow 0$

$$0 \longrightarrow M(K) \longrightarrow A(K) \xrightarrow{u_K} B(K) \longrightarrow H^1(\ /K, M_K) \longrightarrow H^1(\ /K, A_K) \longrightarrow H^1(\ K, B_K) \longrightarrow 0$$

(comme $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ est de dimension cohomologique 1 ([13]II 3.3) , les groupes de cohomologie de degré ≥ 2 sont nuls

Puisque A et B sont des modèles de Néron, les applications naturelles $A(\mathcal{O}) \longrightarrow A(K)$ et $B(\mathcal{O}) \longrightarrow B(K)$ sont bijectives et $u(K)$ s'identifie à $u(\mathcal{O})$ de conoyau $\underline{\underline{S}}(k)$.

Posons $T = \ker H^1(\ /K, A_K) \longrightarrow H^1(\ /K, B_K)$. De (3) on déduit la suite exacte :

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow \underline{\underline{S}}(k) \longrightarrow H^1(\ /K, M_K) \longrightarrow T \longrightarrow 0 \quad .$$

Rappelons, maintenant quelques-uns des résultats de [1] .

a) le groupe $H^1(\ /K, M_K)$ est le groupe des k-points d'un k-groupe quasi-algébrique de dimension $v(d)$ ([1] th. 4.3.3).

b) Pour tout entier m , le sous-groupe de $H^1(\ /K, A_K)$ annulé par m est le groupe des points rationnels d'un groupe quasi-algébrique ([1] 8.1.1) et donc $H^1(\ /K, A_K)$ est un groupe ind-algébrique.

c) On a un isomorphisme canonique, fonctoriel en la variété abélienne A_K :

$$H^1(\ /K, A_K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\underline{\underline{A}}', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

qui identifie la partie de p-torsion du H^1 , au "dual de Serre" du groupe pro-algébrique A' ([1], 8.3.6).

De ces considérations et de ([1]8.1.1), on déduit que la suite exacte (4) est une suite exacte de groupes de points rationnels de k-groupes quasi-algébriques. On a vu que $H^1(\ /K, M_K)$ était de dimension $v(d)$ et que $\underline{\underline{S}}$ était de dimension $v(\mathcal{V}_u)$. Reste à voir que T a même dimension que $\underline{\underline{S}}'$, à savoir $v(\mathcal{V}_{u'})$.

Or si on applique le "foncteur $\mathrm{Rhom}(\ , \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$" à la suite exacte (1'), on trouve compte tenu de c), que $\mathrm{Ext}^1(\underline{\underline{S}}', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est isogène à T , donc a même dimension que T . Enfin $\mathrm{Ext}^1(\underline{\underline{S}}', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est le dual de Serre du groupe unipotent $(\underline{\underline{S}}')^o$, composante neutre de $\underline{\underline{S}}'$, donc a bien même dimension que $\underline{\underline{S}}'$.

2.4.- Nous considérons maintenant le cas où le corps résiduel k est fini, de cardinal q .

On peut alors utiliser les énoncés de dualité sur les corps locaux établis par Tate en place des résultats de [1] . Les arguments de dimension utilisés dans la démonstration géométrique, sont remplacés par des décomptes de points de k-groupes quasi-algébriques du type $\underline{\underline{S}}$. Pour distinguer la contribution de la composante neutre $\underline{\underline{S}}^o$ de celle du groupe des composantes connexes $\underline{\underline{S}}/\underline{\underline{S}}^o$, on est amené à considérer aussi les extensions non ramifiées $\mathcal{O}_r$ de $\mathcal{O}$, de corps résiduel k_r à q^r éléments ; on note K_r le corps des fractions de $\mathcal{O}_r$.

Commençons par rappeler les résultats de Tate.

a) Soient M_K un K-schéma en groupes fini d'ordre d et M'_K son dual de Cartier.

1) Les groupes de cohomologie galoisienne $H^i(\ /K, M_K)$ sont finis, nuls pour $i \neq 0,1,2$. On note $h^i(M_K)$ le cardinal de $H^i(\ /K, M_K)$.

2) $h^1(M_K)/h^o(M_K)h^2(M_K) = \#(\mathcal{O}/d\mathcal{O})$

3) Le cup produit :

$$H^{i}(\ /K,M_K)\times H^{2-i}(\ /K,M'_K)\longrightarrow H^{2}(\ /K,G_m)\xrightarrow[\sim]{\text{can}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est une dualité parfaite pour $i=0,1,2$.

b) Soit A_K une K-variété abélienne. Alors $H^1(\ /K,A_K)$ est canoniquement isomorphe au dual de Pontryagin $\mathrm{Hom}(A'(K),\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Les résultats de a) sont démontrés dans [14] II §5, et b) figure dans [15] .

Partons de l'isogénie : $0\longrightarrow M_K\longrightarrow A_K\xrightarrow{u_K}B_K\longrightarrow 0$ et, pour tout entier $r>0$, de son extension à K_r :

$$0\longrightarrow M_{K_r}\longrightarrow A_{K_r}\longrightarrow B_{K_r}\longrightarrow 0\quad .$$

On déduit alors de la suite exacte de cohomologie galoisienne, la suite exacte courte :

$$0\longrightarrow \mathrm{Coker}(A(K_r)\longrightarrow B(K_r))\longrightarrow H^1(\ /K_r,M_{K_r})\longrightarrow \mathrm{Ker}(H^1(\ /K_r,A_{K_r})\rightarrow H^1(\ /K_r,B_{K_r}))\rightarrow 0$$

Compte tenu de b) ci-dessus et du fait que A, B, A', B' sont des modèles de Néron, cette suite se réécrit :

$$(5)\quad 0\rightarrow \mathrm{Coker}(A(\mathcal{O}_r)\rightarrow B(\mathcal{O}_r))\rightarrow H^1(\ /K_r,M_{K_r})\rightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{coker}(B'(\mathcal{O}_r)\rightarrow A'(\mathcal{O}_r)),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\longrightarrow 0\quad .$$

D'après les rappels de a) ci-dessus, on a pour $r\gg 0$

$$\log_q(h^1(M_{K_r}))\ =\ v(d)r\ +\ \mathrm{cte}\quad .$$

Notons que si $\underline{\underline{G}}$ est un k_r-groupe pro-algébrique, sa composante neutre $\underline{\underline{G}}^o$ est telle que $H^1(\ /k_r,\underline{\underline{G}}^o)\ =\ 0$ d'après le théorème de Lang [10], p.119. Comme $H^i(\ /k_r,\underline{\underline{G}})\ =\ 0$ pour $i\geq 2$ ([14]3.3), l'application canonique $H^1(\ /k_r,\underline{\underline{G}})\xrightarrow{\sim}H^1(\ k_r,\underline{\underline{G}}/\underline{\underline{G}}^o)$ est bijective. Si de plus $\underline{\underline{G}}/\underline{\underline{G}}^o$ a tous ses points rationnels sur k_r , auquel cas nous posons $\pi_o(\underline{\underline{G}})\ =\ (\underline{\underline{G}}/\underline{\underline{G}}^o)(k_r)$, on a un isomorphisme canonique $H^1(\ /k_r,\underline{\underline{G}})\simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\overline{k}_r/k_r),\pi_o(\underline{\underline{G}}))\simeq\pi_o(\underline{\underline{G}})$, qui associe à un homomorphisme $a:\mathrm{Gal}(\overline{k}_r/k_r)\longrightarrow\pi_o(\underline{\underline{G}})$ l'image par a du Frobenius sur k_r .

Considérons alors la suite exacte (1) de k-groupes pro-algébriques

$$0\longrightarrow\underline{\underline{M}}\longrightarrow\underline{\underline{A}}\longrightarrow\underline{\underline{B}}\longrightarrow\underline{\underline{S}}\longrightarrow 0\quad .$$

Notons $\overline{\underline{\underline{A}}}$ l'image de $\underline{\underline{A}}$ dans $\underline{\underline{B}}$, de sorte que l'on a des suites exactes

$$0\longrightarrow\underline{\underline{M}}\longrightarrow\underline{\underline{A}}\longrightarrow\overline{\underline{\underline{A}}}\longrightarrow 0\quad\text{et}\quad 0\longrightarrow\overline{\underline{\underline{A}}}\rightarrow\underline{\underline{B}}\longrightarrow\underline{\underline{S}}\longrightarrow 0\ .$$

Choisissons $r\gg 0$ pour que les groupes $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{A}}/\underline{\underline{A}}^o$, $\underline{\underline{B}}/\underline{\underline{B}}^o$ aient tous leurs points rationnels sur k_r . Alors si

$$\alpha\ :\ \mathrm{Coker}(\ A(\mathcal{O}_r)\longrightarrow B(\mathcal{O}_r))\longrightarrow S(k_r)$$

est l'application canonique, $\ker(\alpha)$ et $\mathrm{coker}(\alpha)$ sont finis constants, respectivement isomorphe à $\mathrm{Ker}\ \pi_o(\underline{\underline{M}}_{k_r})\longrightarrow\pi_o(\underline{\underline{A}}_{k_r})$ et $\mathrm{Ker}\ \pi_o(\overline{\underline{\underline{A}}}_{k_r})\longrightarrow\pi_o(\underline{\underline{B}}_{k_r})$.

Donc pour $r \gg 0$, le cardinal de coker $A(\mathcal{O}_r) \longrightarrow B(\mathcal{O}_r)$ est le produit d'une constante par $\# \underline{\underline{S}}(k_r)$.

Or $\underline{\underline{S}}$ est de dimension $v(\mathcal{V}_u)$ (2.2.1), de torsion, donc $\underline{\underline{S}}^o$ est unipotent par suite $\log_q(\# \underline{\underline{S}}(k_r)) = rv(\mathcal{V}_u) + \text{cte}$. Finalement :

$$\log_q(\# \operatorname{coker} A(\mathcal{O}_r) \longrightarrow B(\mathcal{O}_r)) = rv(\mathcal{V}_u) + \text{cte} .$$

De même on a $\log_q(\# \operatorname{coker} B'(\mathcal{O}_r) \longrightarrow A'(\mathcal{O}_r)) = rv(\mathcal{V}_{u'}) + \text{cte}$.

Il résulte alors de (5) que pour $r \gg 0$, on a

$$v(d)r + \text{cte} = v(\mathcal{V}_u)r + v(\mathcal{V}_{u'})r + \text{cte} ,$$

d'où $v(d) = v(\mathcal{V}_u, \mathcal{V}_{u'})$, ce qui achève la démonstration de 2.1.1 lorsque k est fini.

Remarque 2.4.1 : il est bien sûr possible d'estimer Coker $A(\mathcal{O}_r) \longrightarrow B(\mathcal{O}_r)$ sans parler de structure pro-algébriques, en reprenant la suite exacte (2) et en étudiant u_n par filtration suivant les puissances de π .

3.- AFFAISSEMENT DES GROUPES DE BARSOTTI-TATE TRONQUÉS

3.1.- Dans ce paragraphe, K est un corps local (1.0). On note $\underline{m}$ l'idéal maximal de l'anneau d'entiers $\mathcal{O}$ de K , π un générateur de $\underline{m}$, v la valuation de K normalisée par $v(\pi) = 1$ et $e = v(p)$ l'indice de ramification absolu de $\mathcal{O}$.

On considère un $\mathcal{O}$-schéma en groupes commutatif M_n , fini et plat, dont la fibre générique $(M_n)_K$ est un K-groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon n (en abrégé BT_n) (cf. Exp. VI,1). C'est dire simplement que $M_n(\overline{K})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$, pour un certain entier h que nous appellerons le p-rang de M_n. Par analogie avec les groupes de Barsotti-Tate, h devrait plutôt s'appeler la hauteur, mais dans ce volume, le mot hauteur est réservé en général à un autre usage.

Quand $\mathcal{O}$ est ramifié, ou quand $p = 2$ et $e = 1$, M_n n'est pas nécessairement un BT_n sur $\mathcal{O}$, car il se produit certaines dégénérescences, un "affaissement", quand on passe de la fibre générique à la fibre spéciale.

Commençons par donner l'exemple le plus simple d'affaissement. Supposons que $\mathcal{O}$ contienne les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité (i.e $(p-1)|e$) . On dispose alors d'un morphisme de schémas en groupes $u : (\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z})_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mu_p$, qui envoie l'image de 1 sur une racine primitive p-ème de 1 ; u_K est un isomorphisme, tandis que $u \otimes_{\mathcal{O}} k = 0$. Partant, de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow \mu_{p^2} \longrightarrow \mu_p \longrightarrow 0 ,$$

si on prend l'image réciproque de cette extension par u , on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dans laquelle $E_K \simeq (\mu_{p^2})_K$ est un BT_2, tandis que $E \otimes_{\mathcal{O}} k$ est isomorphe à $(\mu_p)_k \oplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k$, donc est annulée par p ; par suite, E n'est pas un BT_2.

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de contrôler le phénomène d'affaissement.

Pour tout entier i, $0 \leq i \leq n$ soit $(M_i)_K$ le noyau de p^i dans $(M_n)_K$ qui est donc un BT_i sur K et notons M_i l'adhérence schématique de $(M_i)_K$ dans M_n. Alors M_i est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes fini et plat, annulé par p^i, mais qui est strictement plus petit que $\mathrm{Ker}(M_n \xrightarrow{p^i} M_n)$ lorsque ce dernier n'est pas plat sur $\mathcal{O}$.

La multiplication par p dans M_i se factorise à travers M_{i-1} et induit par passage au quotient un $\mathcal{O}$-morphisme :

$$t_{i-1} : M_i/M_{i-1} \longrightarrow M_{i-1}/M_{i-2}$$

qui est un isomorphisme sur la fibre générique. On dispose ainsi d'une collection de morphismes de transition :

$$M_n/M_{n-1} \xrightarrow{t_{n-1}} M_{n-1}/M_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_2/M_1 \xrightarrow{t_1} M_1 .$$

LEMME 3.1.1.- *Pour que* M_n *soit un* BT_n, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :*

1) *si* $n = 1$, *posons* $\overline{M}_1 = \overline{M}_1 \otimes_{\mathcal{O}} k$. *Alors la suite de* k*-schémas en groupes :*

$$\overline{M}_1 \xrightarrow{F} \overline{M}_1^{(p)} \xrightarrow{V} \overline{M}_1$$

(où F *est le Frobenius et* V *le Verschiebung) est exacte.*

2) *Si* $n \geq 2$, *les flèches de transition :*

$$M_i/M_{i-1} \xrightarrow{t_{i-1}} M_{i-1}/M_{i-2}$$

sont des isomorphismes pour $i = 2,\dots n$.

Démonstration : pour $n = 1$, la condition n'est autre que la condition (iii) de Exp VI 1.1. Supposons $n \geq 2$ et que les flèches de transition soient des isomorphismes ; montrons que M_n est un BT_n. La multiplication par p^{n-1} dans M_n se factorise en $u : M_n \longrightarrow M_1$ et u est la composée de la projection $M_n \longrightarrow M_n/M_{n-1}$ et des flèches de transition $t_{n-1},\dots,t_1$ donc est plate. Il en résulte que $M(n-1) = \ker\ p : M_n \longrightarrow M_n$ est plat, et donc égal à M_{n-1}. De proche en proche on montre que $M_i = \mathrm{Ker}\ p^i : M_n \longrightarrow M_n$ et que les suites

$$M_n \xrightarrow{p^{n-i}} M_n \xrightarrow{p^i} M_n$$

sont exactes. On conclut que M_n est un BT_n à l'aide de Exp. VI,1.1 et 1.3 a). La réciproque est immédiate.

3.2.- Propriétés de rigidité des BT_n dans le cas peu ramifié

PROPOSITION 3.2.1.- *Soit* M_n *comme dans* 3.1 .

1) *si* $e = 1$ *et si* $n = 1$, M_1 *est un* BT_1 .

2) *si* $e < p-1$ *et* $n \geq 2$, M_n *est un* BT_n

3) *si* $e = p-1$ *et* $n \geq 2$ *et si* $M_n \otimes_{\mathcal{O}} k$ *est soit connexe, soit ne contient pas de sous-groupe de type multiplicatif non nul, alors* M_n *est un* BT_n .

COROLLAIRE 3.2.2.- *Si* $e = 1$ *et si* $p \neq 2$, M_n *est un* BT_n .

Démonstration de la proposition.

1) Supposons $e = 1$, $n = 1$. On doit montrer que la suite :

$$\overline{M}_1 \xrightarrow{F} \overline{M}_1^{(p)} \xrightarrow{V} \overline{M}_1$$

est exacte (3.1).

1ère méthode : Par passage à la complétion de l'extension maximale non ramifiée de $\mathcal{O}$, on se ramène au cas où k est algébriquement clos.

Puis, par dévissage (Exp. VI 1.3 f)), au cas où $M_1(\overline{K})$ correspond à une représentation irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Il résulte alors de [8] 3.3.7, que M_1 est un schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriels, pour une certaine puissance q de p . Le fait que $\ker(V) = \mathrm{Im}(F)$ résulte alors de la remarque 1.5.4 de loc. cit. (en fait la propriété est énoncée mais non démontrée).

2ème méthode : On utilise la classification des schémas en groupes commutatifs, finis et plats, sur $\mathcal{O}$ non ramifié, due à Fontaine et Laffaille ([3] 9). Soit $\overline{M}$ un k-schéma en groupes fini, commutatif, annulé par p et soit $\mathcal{M}$ son module de Dieudonné. Alors, la donnée d'un $\mathcal{O}$-schéma en groupes commutatif, fini et plat M qui relève $\overline{M}$ équivaut à la donnée d'un sous-k-vectoriel $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}$ tel que :

(i) $\mathcal{L}$ est un supplémentaire de $F(\mathcal{M})$,

(ii) La restriction de V à $\mathcal{L}$ est injective.

Alors, comme $\mathrm{Ker}(V)$ contient de toute façon $F(\mathcal{M})$, puisque $VF = 0$, les conditions (i) et (ii) entraînent que $\mathrm{Ker}(V) = F(\mathcal{M})$, d'où la proposition dans ce cas.

Passons à la démonstration de 2) et 3). On doit vérifier que, sous les conditions énoncées, les morphismes de transition t_i sont des isomorphismes (3.1.1), mais cela résulte de [9] 3.3.3 et 3.3.5.

3.3.- <u>Un résultat de Fontaine</u>

Soit G un $\mathcal{O}$-schéma en groupes commutatif, fini et plat. Notons Ω_G le $\mathcal{O}$-module (de torsion) des formes différentielles de degré 1 sur G, invariantes par translation.

Notons $\overline{\mathcal{O}}$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}$ dans $\overline{K}$ et $\Omega_{\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}$ le $\overline{\mathcal{O}}$-module de torsion des formes différentielles de $\overline{\mathcal{O}}$ relativement à $\mathcal{O}$.

Soit $u \in G(\overline{\mathcal{O}})$ un point de G à valeurs dans $\overline{\mathcal{O}}$. Il lui correspond donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\overline{\mathcal{O}}) \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & G \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}) & \end{tikzcd}$$

d'où une application naturelle :

$$\Omega_G \otimes_{\mathbb{Z}} G(\overline{\mathcal{O}}) \longrightarrow \Omega_{\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}$$

$$\omega \otimes u \longmapsto u^*(\omega) \ .$$

Cette application peut s'interpréter aussi comme une application $\overline{\mathcal{O}}$-linéaire, fonctorielle en G :

$$\overline{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} G(\overline{\mathcal{O}}) \xrightarrow{\varphi_G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega_G, \Omega_{\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}})$$

$$a \otimes u \longmapsto (\omega \longmapsto a\, u^*(\omega)) \ .$$

Soit w la valuation de $\overline{\mathcal{O}}$ telle que $w(p) = 1$. L'anneau $\mathcal{O}$ est fini sur l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k et on note $\mathscr{D}_{\mathcal{O}/\underline{W}(k)}$ l'idéal de $\mathcal{O}$ différente de la $W(k)$-algèbre $\mathcal{O}$. Soit α un élément de $\overline{\mathcal{O}}$ tel que

$$w(\alpha) = 1/p\text{-}1 + w(\mathscr{D}_{\mathcal{O}/W(k)}) = 1/p\text{-}1 + v(\mathscr{D}_{\mathcal{O}/W(k)})/e \ .$$

On pose $\delta_{\mathcal{O}}$ = partie entière de $w(\alpha)$.

Dans [2] §4, Fontaine introduit une "presque" décomposition de Hodge-Tate pour un $\mathcal{O}$-schéma en groupes commutatif G, fini et plat. Il montre en particulier que l'application φ_G définie ci-dessus a un conoyau annulé par α ([2] §4, th.3, cor.).

COROLLAIRE 3.3.1.- *Soit* $t : G_m \longrightarrow H_m$ *un morphisme de* BT_m *sur* $\mathcal{O}$ *qui est un isomorphisme sur la fibre générique et qui n'est pas un isomorphisme. Alors on a* $m \leqq \delta_{\mathcal{O}}$.

Démonstration : Soit d_G (resp. d_H) la dimension de l'algèbre de Lie de $G \otimes_{\mathcal{O}} k$ (resp. $H \otimes_{\mathcal{O}} k$) . Alors le $\mathcal{O}$-module des différentielles invariantes sur G_m (resp. H_m) est $(\mathcal{O}/p^m)^{d_G}$ (resp. $(\mathcal{O}/p^m\mathcal{O})^{d_H}$ (Exp. VI cor. 4.9) et la différente $\mathcal{D}_{G_m}$ est (p^{md_G}) , (resp. (p^{md_H})) .

Par hypothèse $t : G_m \longrightarrow H_m$ n'est pas un isomorphisme, donc H_m est strictement plus ramifié sur $\mathcal{O}$ que G_m , donc $d_G < d_H$. Il résulte alors de la structure des $\mathcal{O}$-modules de longueur finie, que l'application sur les différentielles invariantes déduite de t :

$$\Omega_{H_m} \xrightarrow{dt} \Omega_{G_m}$$

contient dans son noyau un facteur direct de Ω_{H_m} isomorphe à $\mathcal{O}/p^m\mathcal{O}$.

Considérons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_m(\bar{\mathcal{O}}) & \xrightarrow{t(\bar{\mathcal{O}})} & H_m(\bar{\mathcal{O}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bar{\mathcal{O}} \\ \Big\downarrow \varphi_{G_M} & & \Big\downarrow \varphi_{H_M} \\ \mathrm{Hom}(\Omega_{G_m}, \Omega_{\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\Omega_{H_m}, \Omega_{\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}) \end{array}$$

D'après ([2], §1, Th.1), $\Omega_{\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}$ est isomorphe à $\bar{K}/\bar{\mathcal{O}}$, donc le calcul ci-dessus entraîne que le conoyau de la flèche inférieure contient un facteur isomorphe à $\bar{\mathcal{O}}/p^m\bar{\mathcal{O}}$. Par ailleurs, comme t_K est un isomorphisme, il en est de même de $t(\bar{\mathcal{O}})$ et d'après le résultat de Fontaine coker φ_{H_m} est annulé par α donc $w(\alpha) \geqq w(p^m) = m$. Par définition de $\delta_{\mathcal{O}}$ on a donc $m \leqq \delta_{\mathcal{O}}$.

3.4.- Contrôle de l'affaissement

Revenons à la situation considérée dans 3.1, où l'on se donne un $\mathcal{O}$-schéma en groupes M_n fini et plat dont la fibre générique est un BT_n de rang h . Pour $0 \leqq i \leqq n$, on dispose des sous-schémas en groupes M_i de M_n . Pour a et b entiers vérifiant $0 \leqq a \leqq b \leqq n$, on pose :

$$M_{]a,b]} = M_b/M_a$$

qui est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes fini et plat, dont la fibre générique est un BT_{b-a} de rang h . Avec ces notations, on a $M_i = M_{]0,i]}$ et on dispose des

des morphismes de transition :

$$M_{]n-1,n]} \xrightarrow{t_{n-1}} M_{]n-2,n-1]} \xrightarrow{t_{n-2}} \cdots \xrightarrow{t_1} M_{]0,1]} \; .$$

qui sont des isomorphismes sur la fibre générique.

Nous dirons qu'il y a un saut en i si

$$M_{]i,i+1]} \xrightarrow{t_i} M_{]i-1,i]}$$

n'est pas un isomorphisme, c'est-à-dire si la différente $\mathscr{D}_{M_{]i-1,i]}}$ du schéma en groupes $M_{]i-1,i]}$ est strictement contenue dans la différente de $M_{]i,i+1]}$.

LEMME 3.4.1.- *Il y a au plus* eh *sauts.*

En effet, rappelons que si H est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes commutatif, fini et plat, tel que la $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}_H$ soit de rang d, et si H' est le dual de Cartier de H, on a, entre les différentes, la relation

$$\mathscr{D}_H \, \mathscr{D}_{H'} = (d) \quad .$$

([9] appendice prop. 9).

En particulier on a $v(\mathscr{D}_H) \leq v(d)$.

Appliquons ce résultat à $M_1 = M_{]0,1]}$, on trouve

$$v(\mathscr{D}_{M_{]0,1]}}) \leq v(p^h) = eh \quad ,$$

d'où le lemme.

LEMME 3.4.2.- *Soient* $0 \leq a < b \leq n$., *avec* a *et* b *entiers et* $b-a \geq 2$. *Alors* $M_{]a,b]}$ *est un* BT_{b-a} *si et seulement si, l'intervalle* $]a,b[$ *ne contient pas de sauts.*

Démonstration : on applique 3.1.1.

LEMME 3.4.3.- *Soient des entiers* a,b,c,d *vérifiant*

$$0 \leq a < b \leq c < d \leq n$$

et tels que

1) $b-a = d-c = \ell \geq 2$

2) *il n'y a pas de sauts dans* $]a,b[$ *et dans* $]c,d[$

3) *il existe un saut dans* $[b,c]$

Alors on a $\ell \leq \delta_0$ (3.3).

Démonstration : Les conditions 1) et 2) et le lemme 3.4.2 entraînent que $M_{]a,b]}$ et $M_{]c,d]}$ sont des BT_ℓ. Notons d_1 la dimension de $M_{]a,b]}$ et d_2 celle de $M_{]c,d]}$.

La multiplication par p^{d-b} dans M_d se factorise à travers M_b et induit, par passage au quotient un morphisme $t : M_{]c,d]} \longrightarrow M_{]a,b]}$, qui est un isomorphisme sur la fibre générique. La différente de $M_{]c,c+1]}$ est engendrée par p^{hd_2}, celle de $M_{]b-1,b]}$ par p^{hd_1}. Comme il y a un saut dans [b c], on a $d_1 > d_2$. Par suite t n'est pas un isomorphisme, et donc (3.3.1), $\ell \leq \delta_0$.

THÉORÈME 3.4.4.- *Soit* M_n *un* O-*schéma en groupes commutatif, fini et plat, tel que* $M_n(\bar{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$ *et soit* δ_0 *l'entier défini dans* 3.3.

Alors, si $n > (he+1)\max(1,\delta_0)$, *il existe un unique plus grand intervalle* $[r,n-s] \subset [0,n]$ *tel que* $r+s \leq he\,\mathrm{Max}(1,\delta_0)$ *et tel que* $M_{]r,n-s]}$ *soit un* $BT_{n-(r+s)}$.

COROLLAIRE 3.4.5.- *Posons* $\delta = \delta_{0,h} = he\,\mathrm{Max}(1,\delta_0)$. *Alors, si* $n > 2\delta$, $M_{\delta,n-\delta}$ *est un* $BT_{n-2\delta}$.

Démonstration du théorème : d'après 3.4.1, il y a au plus he sauts et ceux-ci découpent $[0,n]$ en au plus $he+1$ intervalles. Vu l'hypothèse faite sur n, l'un au moins de ces intervalles a une longueur $\ell > \max(1,\delta_0)$. D'après 3.4.3, un tel intervalle est unique ; notons le $[r,n-s]$ avec $r < n-s$. Alors $r+s$ est la somme des longueurs de au plus he intervalles, de longueur au plus $\max(1,\delta_0)$, donc $r+s \leq he\max(1,\delta_0)$.

Démonstration du corollaire : on peut supposer $h > 0$. On a alors :

$$n > 2\delta = 2he\,\mathrm{Max}(1,\delta_0) \geq (he+1)\mathrm{Max}(1,\delta_0)$$

donc on peut appliquer le théorème 3.4.4. D'où un intervalle $[r,n-s]$ tel que $r+s \leq he\,\mathrm{Max}(1,\delta_0) = \delta$. Par suite $[\delta,n-\delta] \subset [r,n-s]$ et comme $M_{]r,n-s]}$ est un $BT_{n-(r+s)}$, $M_{]\delta,n-\delta]}$ est un $BT_{n-2\delta}$.

Commentaires 3.4.6.- La valeur de δ donnée dans 3.4.5 n'est pas du tout satisfaisante. Cela est dû à notre majoration du nombre des sauts, qui est très grossière, et sans doute aussi au fait que nous n'avons pas tiré le meilleur parti possible des résultats de Fontaine.

4.- HAUTEURS ET ISOGÉNIES : THÉORÈMES DE FINITUDE

Dans ce paragraphe, on établit le théorème de finitude énoncé dans l'introduction avec des bornes effectives, précisées dans 4.4.8.

4.1.- "Belles p-isogénies"

Définition 4.1.1 : Soient K un corps local ou global (1.0), A_K une K-variété abélienne, dont le modèle de Néron A sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ est *semi-stable*.

Soient p un nombre premier, n et h des entiers ≥ 0. On dit qu'une K-isogénie $u_K : A_K \longrightarrow B_K$ est une belle p-isogénie, de niveau n de p-rang h, si son extension $u^o : A^o \longrightarrow B^o$, aux modèles de Néron connexes, a un noyau M qui vérifie les conditions suivantes :

1) $M(\overline{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$,

2) Pour toute place v de $\mathcal{O}$, la partie finie (1.2) $\hat{M}_v$ de M en v est un BT_n sur $\mathcal{O}_v$.

Notons que la condition 2) équivaut à la conjonction des 2 propriétés suivantes:

2 i) Pour toute place v de $\mathcal{O}$, où A_K n'a pas bonne réduction, $\hat{M}_v(K_v)$ est un facteur direct de $M(\overline{K}_v)$ (donc est de la forme $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{h_v}$) ,

2 ii) Pour toute place v de $\mathcal{O}$ au-dessus de p , $\hat{M}_v$ est un BT_n sur $\mathcal{O}_v$. On note d_v la dimension de $\hat{M}_v$ (Exp. VI 2.2.2). (Bien sûr, 2 i) pour $v|p$ est est conséquence de 2 ii)).

Exemples 4.1.2.- a) (niveau 1). Si aucune place $v|p$ n'est ramifiée, toute isogénie de noyau annulée par p est belle de niveau 1. En effet, la condition 2 i) est automatique et la condition 2 ii) est réalisée d'après 3.2.1. 1).

b) cas peu ramifié). Si toute place $v|p$ a un indice de ramification $< p-1$, (donc $p \neq 2$), la condition 2 ii) découle des autres dès que $n \geq 2$ d'après 3.2.1.

Pour une belle isogénie, la différente $\mathfrak{d}_M$ de M (1.3) en une place $v|p$ se calcule au moyen de la dimension locale d_v de $\hat{M}_v$. En effet (Exp. VI 4.9 ii))

$$\mathfrak{d}_M \, \mathcal{O}_v = p^{nd_v} \quad .$$

Dans le cas d'un corps K global, on a donc :

$$\mathrm{Norme}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}}(\mathfrak{d}_M) = p^{n(\sum_{v|p}[K_v:\mathbb{Q}_p]d_v)} \quad .$$

On déduit alors de 1.4.2 le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.1.3.- *Dans le cas d'un corps global* K *, pour qu'une belle p-isogénie, de p-rang* h *, conserve le degré d'Arakelov, il faut et il suffit, que les dimensions locales* d_v *du noyau* M *vérifient :*

$$[K:\mathbb{Q}]h/2 = \sum_{v|p} [K_v:\mathbb{Q}_p] d_v \quad .$$

4.2.- Déterminant du noyau d'une belle isogénie

4.2.1.- Pour p premier et n entier, on note

$$\chi_{n,p} : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$$

le caractère qui décrit l'action de Galois sur les racines p^n-èmes de l'unité $\mu_{p^n}(K) \subset \overline{K}$.

De même $\chi_{\infty,p} : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathbb{Z}_p^*$ est le caractère qui décrit l'action de Galois sur les racines de l'unité, d'ordre une puissance de $p : \mu_{\infty,p}(\overline{K}) = \bigcup_n \mu_{p^n}(\overline{K})$.

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion sur le nombre premier p , on écrit simplement χ_n et χ_∞ au lieu de $\chi_{n,p}$ et $\chi_{\infty,p}$.

4.2.2.- Si M_K est un K-schéma en groupes tel que $M_K(\overline{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$, donc décrit par une représentation $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Gl}_h(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, on note $\det(M_K)$ le K-schéma en groupes $\Lambda^h(M_K)$, décrit par le caractère :

$$\Psi[M_K] = \Lambda^h \rho : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* \quad .$$

Nous allons étudier $\Psi[M_K]$ dans le cas où M_K est la fibre générique du noyau M d'une belle p-isogénie. Commençons par traiter le cas d'un corps local. Le lemme 4.2.4 contient l'information clé tirée de l'étude de la monodromie en une place de mauvaise réduction semi-stable ; le lemme 4.2.5 est en quelque sorte la justification, dans cet exposé, de la considération des BT_n .

4.2.3.- Etude locale

LEMME 4.2.4.- *Soient* K *un corps local,* A_K *une K-variété abélienne,* A^o *son modèle de Néron connexe sur* $\mathcal{O}$ *, supposé semi-stable,* M_K *un K-sous-schéma en groupes fini de* A_K *,* M *l'adhérence schématique de* M_K *dans* A^o *,* $\widehat{M}$ *la partie finie de* M *. Alors le quotient* $M_K/\widehat{M}_K$ *est non ramifié sur* $\mathcal{O}$ *.*

Démonstration : supposons d'abord qu'il existe un entier m tel que M_K soit le noyau ${}_mA_K$ de la multiplication par m dans A_K . Comme A^o est semi-stable, le noyau ${}_mA^o$ de la multiplication par m dans A^o est plat sur $\mathcal{O}$, donc est égal à l'adhérence schématique de ${}_mA_K$ dans A^o . L'assertion résulte alors de [5] exposé IX , et plus précisément de la proposition 3.5 lorsque m est inversible dans $\mathcal{O}$ et du théorème 5.2 (5.2.2), pour m quelconque.

Dans le cas général, soit m un entier qui annule M_K. On a $M_K \subset {}_mA_K$, donc $M \subset {}_mA^o$ et par suite $\hat{M} \subset {}_m\hat{A}^o$. Finalement $\hat{M} \subset M \cap {}_m\hat{A}^o$ et comme ce dernier est fini sur $\mathcal{O}$, $\hat{M} = M \cap {}_m\hat{A}^o$ En particulier, sur la fibre générique, on a $\hat{M}_K = M_K \cap ({}_m\hat{A}^o)_K$ et donc $M_K/\hat{M}_K$ est contenu dans ${}_mA_K/({}_m\hat{A}^o)_K$.

On vient de rappeler que ce dernier est non ramifié sur $\mathcal{O}$; il en est donc de même de $M_K/\hat{M}_K$.

<u>LEMME 4.2.5</u>.- *Soient* K *un corps local et* M *un* BT_n *(resp.* BT*) sur l'anneau* $\mathcal{O}$ *des entiers de* K, *annulé par une puissance de la caractéristique résiduelle* p *de* $\mathcal{O}$. *On suppose que* M *est de* p*-rang* h (4.1.1) *(resp. de hauteur* h*) et soit* d *sa dimension* (Exp. VI 2.2.2.b)). *Soit* $\Psi[M_K]$ *le caractère de* $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ *qui décrit la puissance extérieure h-ème de* M_K. *Alors on a :*

$$\Psi[M_K]\,|\,\text{Inertie} = \chi_n^d|\text{Inertie (resp. } \chi_\infty^d|\text{Inertie)} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : quitte à remplacer $\mathcal{O}$ par la complétion de l'extension maximale non ramifiée de $\mathcal{O}$, on peut supposer k algébriquement clos. Le lemme n'est autre alors que le cor. 4.10 de Exp. VI.

<u>Remarques 4.2.6</u>.- i) Historiquement, le premier résultat dans la direction de 4.2.5 a été obtenu par Tate (cf [16] §4 Th.3), dans le cas d'un BT. En utilisant les décompositions de Hodge-Tate, il montrait que $\Psi[M]$ coïncidait avec χ_∞^d sur un sous-groupe ouvert du groupe d'Inertie.

ii) On doit également pouvoir établir 4.2.5 en mettant bout à bout quelques-uns des articles de Fontaine reliant les représentations de Galois d'un corps local à des structures de Dieudonné convenablement filtrées.

C'est sans doute la méthode promise au plus bel avenir.

<u>COROLLAIRE 4.2.7</u>.- *Soient* ℓ *un nombre premier et* M *le noyau d'une belle* ℓ*-isogénie, de niveau* n, *de rang* h, *définie sur l'anneau d'entiers* $\mathcal{O}$ *d'un corps local* K *et soit* $\Psi[M_K]$ *le caractère de* $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ *associé à* $\Lambda^h M_K$. *Alors :*

1) Si $\ell \neq p$, *caractéristique résiduelle de* $\mathcal{O}$, $\Psi[M_K]$ *est non ramifié sur* $\mathcal{O}$.

2) Si $\ell = p$, $\Psi[M_K]|\text{Inertie} = \chi_{n,p}^d|\text{Inertie}$, *où* d *est la dimension de* $\hat{M}$.

<u>Démonstration</u> : On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \hat{M}_K \longrightarrow M_K \longrightarrow M_K/\hat{M}_K \longrightarrow 0$$

de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-modules, libres sur $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ d'après 4.1.1. Donc

$$\Psi[M_K] = \Psi[\hat{M}_K]\Psi[M_K/\hat{M}_K] \ .$$

Le caractère $\Psi[M_K/\hat{M}_K]$ est non ramifié d'après 4.2.3. Pour $\ell \neq p$, $\Psi[\hat{M}_K]$ est évidemment non ramifié, et pour $\ell = p$, sa restriction au groupe d'inertie est $\chi^d_{n,p}$, d'après 4.2.5, d'où le corollaire.

4.2.8.- Etude globale

Posons $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $H = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ qui devient un sous-groupe de G, une fois choisie un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \overline{K}$.

Sur les plus grands quotients abéliens, on dispose de l'homomorphisme de transfert ([12] VII §8) :

(1) $$\mathrm{Ver} : G_{ab} \longrightarrow H_{ab} \ .$$

Rappelons quelques-unes de ses propriétés :

a) Localisation. Soit ℓ un nombre premier et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. Pour toute place v de K divisant ℓ, choisissons une place $\overline{v}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus de v. Le choix de $\overline{v}$ permet de définir un plongement $\tau_{\overline{v}}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et un diagramme commutatif entre groupes de Galois :

$$\begin{array}{ccc} H_v & \xrightarrow{j_{\overline{v}}} & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_\ell & \xrightarrow{i_{\overline{v}}} & G \end{array}$$

où $G_\ell = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)$, $K_v = \tau_{\overline{v}}(K)\,\mathbb{Q}_\ell \subset \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $H_v = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/K_v)$.

De plus, les applications $i_{\overline{v}}$(resp. $j_{\overline{v}}$) sont définies à conjugaison près par un élément de G (resp. H). On en déduit pour tout v un diagramme commutatif indépendant du choix des relèvements $\overline{v}$:

$$\begin{array}{ccc} (H_v)_{ab} & \xrightarrow{j_v} & H_{ab} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G_\ell)_{ab} & \xrightarrow{i} & G_{ab} \end{array} .$$

Par ailleurs, on dispose des transferts locaux $(\mathrm{Ver})_v : (G_\ell)_{ab} \longrightarrow (H_v)_{ab}$ et on a

(2) $$\mathrm{Ver} \circ i = \sum_{v|\ell} j_v \circ (\mathrm{Ver})_v \ .$$

b) Norme. L'application composée :

$$(G_\ell)_{ab} \xrightarrow{(\mathrm{Ver})_v} (H_v)_{ab} \xrightarrow{\mathrm{can}} (G_\ell)_{ab}$$

(3) est la multiplication par le degré local $[K_v:\mathbb{Q}_\ell]$.

c) Passage au corps résiduel. Notons I_ℓ (resp. I_v) le sous-groupe d'inertie de G_ℓ (resp. de H_v) . On a des suites exactes :

$$1 \longrightarrow I_\ell \longrightarrow G_\ell \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{F}_\ell/F_\ell) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow I_v \longrightarrow H_v \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{F}_\ell/k_v) \longrightarrow 1$$

et une application de transfert

$$\overline{\mathrm{Ver}} : \mathrm{Gal}(\overline{F}_\ell/F_\ell) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{F}_\ell/k_v)$$

qui envoie le Frobenius φ_ℓ en ℓ sur le Frobenius φ_v en v .

Si e_v est l'indice de Ramification de K_v sur $\mathbb{Q}_\ell$, on a alors le diagramme commutatif :

(4)
$$\begin{tikzcd}
(G_\ell)_{ab} \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[d, "(\mathrm{Ver})_v"'] & \mathrm{Gal}(\overline{F}_\ell/F_\ell) \arrow[d, "e_v\,\overline{\mathrm{Ver}}"] \\
(H_v)_{ab} \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\overline{F}_\ell/k_v)
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME 4.2.9.- *Soient* p *un nombre premier et* $u^o : A^o \longrightarrow B^o$ *une belle* p-*isogénie, de noyau* M *, de niveau* n *, de rang* h (4.1.1).

Posons $\Psi_o[M_K] = \Psi[M_K] \circ \mathrm{Ver} : G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})_{ab} \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$. *Alors* :

$$\Psi_o[M_K] = \chi_{n,p}^d \ , \quad \text{où} \quad d = \sum_{v|p} d_v[K_v:\mathbb{Q}_p] \ .$$

Démonstration : d'après 4.2.7, si ℓ est un nombre premier $\neq p$, $\Psi[M_K]$ est non ramifié en toute place v de K divisant ℓ . Il résulte alors de (2) et (4) que $\Psi_o[M_K]$ est non ramifié en ℓ .

Toujours d'après 4.2.7, si $v|p$, $\Psi[M_K]|I_v = \chi_{n,p}^{d_v}|I_v$. Il résulte alors de (2) et (3) que $\Psi_o[M_K]|I_p = \chi_{n,p}^d|I_p$.

Alors $\Psi_o[M_K]\chi_{n,p}^{-d}$ est un caractère de G partout non ramifié, donc trivial puisque $\mathbb{Z}$ est simplement connexe, d'où le théorème.

Remarque 4.2.10.- Partant de M_K , c'est-à-dire d'une représentation ρ de H dans $V = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$, une autre façon naturelle de lui associer un caractère de G , consiste à induire ρ de H à G , puis à prendre le déterminant. Le caractère ainsi obtenu est lié au transfert par la formule :

$$\det(\mathrm{Ind}_H^G(\rho)) = \varepsilon^h(\det(\rho)\circ\mathrm{Ver}) \ ,$$

où $\varepsilon(g)$, pour $g \in G$, est la signature de la permutation définie par g

opérant par translation sur G/H (cf. [11] p.130, exer.). Ce caractère ε^h peut introduire des ramifications parasites en les nombres premiers ℓ ramifiés dans $\mathcal{O}$, contrairement au transfert.

4.3.- Degré d'Arakelov d'une variété abélienne et belles isogénies

4.3.1.- Dans la suite on considère un corps global K (1.1) et une K-variété abélienne A_K ayant réduction semi-stable A sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$. Soit B_K une variété abélienne isogène à A_K et B son modèle de Néron. On va comparer le degré d'Arakelov de ω_B à celui de ω_A.

4.3.2.- Commençons par rappeler l'argument galoisien, dû à Faltings, montrant que certaines isogénies, "extraites" d'un sous-groupe p-divisible de A, conservent le degré d'Arakelov.

Soit donc p un nombre premier et soit $M_K = \bigcup_n (M_n)_K$ un sous-groupe p-divisible, de A_K, de p-torsion, où $(M_n)_K$ désigne le noyau de la multiplication par p^n dans M_K. Supposons que pour tout entier $n \geq 0$, l'adhérence schématique M_n de $(M_n)_K$ dans la composante connexe A^o de A, soit le noyau d'une belle p-isogénie (4.1.1) :

$$u_n^o : A^o \longrightarrow B_{(n)}^o \quad .$$

Alors la condition 2 i) de 4.1.1 entraine que pour toute place v, de mauvaise réduction, $\bigcup_n (\widehat{M}_{n,v})(\overline{K}_v)$ est p-divisible, où $\widehat{M}_{n,v}$ désigne la partie finie de M_n sur $\mathcal{O}_v$. La condition 2 ii) signifie que $\widehat{M}_v = \bigcup_n \widehat{M}_{n,v}$ est un BT sur $\mathcal{O}_v$ pour toute place $v|p$. Soit d_v la dimension de $\widehat{M}_v$ et h la hauteur du groupe p-divisible M_K, donc aussi le p-rang des groupes M_n.

Notons $\Psi[M_K]$ le caractère de $H = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ associé à $\Lambda^h M_K$ et soit $\Psi_o[M_K] = \Psi[M_K] \circ \mathrm{Ver}$. Il résulte de 4.2.9 que $\Psi_o[M_K] = \chi_{\infty,p}^d$ avec $d = \sum_{v|p} d_v \, [K_v:\mathbb{Q}_p]$.

Soit ℓ un nombre premier distinct de p, non ramifié dans $\mathcal{O}$, tel que A_K ait bonne réduction en toute place de $\mathcal{O}$ divisant ℓ. Alors $\Psi_o[M_K]$ est non non ramifié en ℓ ; soit λ sa valeur sur le Frobenius φ_ℓ en ℓ. D'après le calcul précédent, $\lambda = \ell^d$. Mais d'autre part, les résultats de Weil appliqués aux réductions de A sur les corps finis au-dessus de $\mathbb{F}_\ell$ entraînent que λ est un entier algébrique qui dans tout plongement complexe a pour valeur absolue $\ell^{h[K:\mathbb{Q}]/2}$. Donc $d = h[K:\mathbb{Q}]/2$ et d'après (4.1.3), chacune des isogénies u_n^o conserve le degré d'Arakelov.

Dans ce qui suit, nous allons adapter cet argument à de belles p-isogénies, non nécessairement extraites d'un sous-groupe p-divisible M_K de A_K .

4.3.3.- On choisit un nombre premier ℓ tel que A_K ait bonne réduction en toute place v de $\mathcal{O}$ divisant ℓ (mais ℓ peut être ramifié dans $\mathcal{O}$) . A partir de ℓ , on va pouvoir contrôler l'effet, sur le degré d'Arakelov, des isogénies de degré premier à ℓ . Pour traiter les ℓ-isogénies, il faudra utiliser un autre nombre premier ℓ' , à la place de ℓ .

Pour toute place w de $\mathcal{O}$ divisant ℓ , on note e_w l'indice de ramification de $\mathcal{O}_w$ sur $\mathbb{Z}/_{\ell}\mathbb{Z}$ et r_w le degré résiduel $[k_w:F_\ell]$. Soit $A_{k_w} = A \otimes_{\mathcal{O}} k_w$ qui est une variété abélienne sur le corps fini k_w .

Pour tout nombre premier $p \neq \ell$, soit $T_p(A_{k_w})$ le module de Tate de A_{k_w} relatif à p ; c'est un $\mathbb{Z}_p$ -module libre de rang 2 dim $A_K = 2g$ muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{k}_w/k_w)$. D'après les résultats de Weil, le polynôme caractéristique de Frobenius φ_w en w est un polynôme à coefficients entiers, indépendant du nombre premier $p \neq \ell$, ne dépendant que de la classe d'isogénie de A_{k_w} , donc de la classe d'isogénie de A_K . De plus, pour tout plongement $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$, les racines de ce polynôme caractéristique ont pour valeur absolue $\ell^{r_w/2}$.

Pour p premier $\neq \ell$, soit $u^o : A^o \longrightarrow B^o$ une belle p-isogénie, de niveau n, de rang h (4.1.1) et soit M son noyau. On associe à M le caractère $\Psi[M] : \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ et son composé avec le transfert

$$\Psi_o[M] : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* \quad .$$

Alors $\Psi_o[M]$ est non ramifié en ℓ ; soit τ_ℓ sa valeur sur le Frobénius φ_ℓ en ℓ .

Les informations locales en p , fournissent un premier calcul de τ_ℓ . En effet, d'après 4.2.9, on a $\Psi_o[M] = \chi_{n,p}^d$, où $d = \sum_{v|p} d_v[K_v:\mathbb{Q}_p]$, d_v étant la dimension du $BT_n\ \widehat{M}_v$, donc :

(1) $$\tau_\ell = \ell^d \bmod p^n \quad .$$

Utilisons maintenant les résultats de Weil. Pour $w|\ell$, la fibre $M \otimes_{\mathcal{O}} k_w$ de M au-dessus de k_w correspond à un facteur direct de rang h du $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module $T_p(A_{k_w})/p^nT_p(A_{k_w})$, stable par l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}_w/k_w)$. Prenant les puissances extérieures h-èmes, on trouve un facteur direct de rang 1 du $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -module $\Lambda^h T_p(A_{k_w})/p^n\Lambda^h T_p(A_{k_w})$, sur lequel φ_w opère par multiplication par $\tau_w \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ et l'on a $\tau_w = \Psi[M](\varphi_w)$.

Si $P_{h,w}$ désigne le polynôme caractéristique de φ_w opérant sur $\Lambda^h T_p(A_{k_w})$ on a donc :

(2) $$P_{h,w}(\tau_w) = 0 \bmod p^n\mathbb{Z} \quad .$$

D'après 4.2.8, formules (2) et (4), on a :

(3) $$\tau_\ell = \prod_{w|\ell} \tau_w^{e_w} \quad .$$

Notons alors $E_{p,h,w}$ le $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\overline{F}_\ell/F_\ell)]$-module qui a même espace sous-jacent que $\Lambda^h T_p(A_{k_w})$, mais sur lequel φ_ℓ opère comme opérait $\varphi_w^{e_w}$. Finalement, considérons le produit tensoriel sur $\mathbb{Z}_p$ des représentations $E_{p,h,w}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{F}_\ell/F_\ell)$:

(3) $$E_{p,h} = \bigotimes_{w|\ell} E_{p,h,w} \quad .$$

Dans le $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module $E_{p,h}/p^nE_{p,h}$, on dispose donc d'un facteur direct de rang 1, stable par Galois, canoniquement associé à M , sur lequel φ_ℓ opère par multiplication par τ_ℓ .

Soit alors P_h le polynôme caractéristique de φ_ℓ opérant sur $E_{p,h}$. C'est un polynôme à coefficients entiers, indépendant de $p \neq \ell$, ne dépendant que de la classe d'isogénie de A_K et dont les racines, dans tout plongement complexe, ont pour valeur absolue $\ell^{(\sum_{w/\ell} r_w e_w)h/2} = \ell^{[K:\mathbb{Q}]h/2}$ et l'on a

(4) $$P_h(\tau_\ell) = 0 \bmod p^n \quad .$$

Les formules (1) et (4) résument les informations sur τ_ℓ que nous allons utiliser.

Considérons alors l'ensemble fini de puissances de ℓ de la forme

(5) $$\mu = \ell^{(\sum_\alpha d_\alpha n_\alpha)} \quad , \mu \in I_h$$

tel que :

a) d_α entier ≥ 0 , $d_\alpha \leq \mathrm{Minimum}(\dim A_K, h) = \mathrm{Minimum}(g,h)$

b) n_α entier ≥ 1 , $\sum_\alpha n_\alpha = [K:\mathbb{Q}]$

c) $\sum_\alpha d_\alpha n_\alpha \neq [K:\mathbb{Q}]\, h/2$.

Alors aucun des μ n'est racine de P_h puisque celles-ci, ont pour valeurs absolues complexes $\ell^{[K:\mathbb{Q}]h/2}$. Donc

(6) $$a_\mu = P_h(\mu), \ \mu \in I_h$$

est un entier non nul.

THÉORÈME 4.3.4.- *Pour* p *premier,* $p \neq \ell$ *, et pour* h *entier ,* $1 \leq h \leq 2\dim A_K - 1$, *notons* $n_{p,h}$ *le plus grand exposant* m *tel que* p^m *divise l'un des* a_μ *définis par* (6), $\mu \in I_h$. *Alors, pour toute* K-*variété abélienne* A_K^1 , K-*isogène à* A_K *, toute belle* p-*isogénie de source* A_K^1 *, de* p-*rang* h *, de niveau* $n > n_{p,h}$ *conserve le degré d'Arakelov.*

Démonstration : Soit M le noyau d'une telle isogénie et pour toute place $v|p$, notons d_v la dimension de M_v. Posons $d = \sum_{v|p} d_v[K_v:\mathbb{Q}_p]$. Il nous faut montrer que $[K:\mathbb{Q}]h/2 = d$ (4.1.3). Or, s'il n'en était pas ainsi, le nombre ℓ^d serait de la forme (5), pour un certain $\mu \in I_h$. Or d'après (1) et (4), on a :

$$P_h(\ell^d) = 0 \ , \ \text{mod}\ p^n\mathbb{Z}$$

Comme $n > n_{p,h}$, cette congruence contredit la définition de $n_{p,h}$; donc $d = [K:\mathbb{Q}]h/2$.

Gardons les notations de 4.3.4. Pour p premier, $p \neq \ell$, posons

$$n_p = \text{maximum}\ n_{p,h} \ , \ 1 \leqq h \leqq 2g-1 \ , \ \text{où} \ g = \dim A_K \ .$$

Soit S l'ensemble fini de nombres premiers p, $p \neq \ell$, tels que $n_p \geqq 1$.

Soient N le nombre de places de $\mathcal{O}$ au-dessus de ℓ et $M = \binom{2g}{g}^N$, (où $\binom{n}{m}$ désigne le coefficient du binôme usuel). Le corollaire suivant donne alors une majoration effective des éléments de S et des exposants n_p :

COROLLAIRE 4.3.5.- *Pour tout* $p \in S$, *on a :*

$$p^{n_p} \leqq 2^M \ \ell^{[K:\mathbb{Q}]gM} \ . \tag{7}$$

Démonstration : Reprenons les notations de 4.3.3. Pour tout $w|\ell$, le $\mathbb{Z}_p$-module $E_{p,h,w}$ est de rang $\binom{2g}{h} \leqq \binom{2g}{g}$; donc $E_{p,h}$ est de rang $\binom{2g}{h}^N = M_h \leqq M$.

Par ailleurs, d'après (5), pour $\mu \in I_h$, on a :

$$\mu \leqq \ell^{[K:\mathbb{Q}]\ \text{Min}(g,)} \leqq \ell^{[K:\mathbb{Q}]g} \ .$$

Comme les racines du polynôme unitaire P_h sont de valeur absolue complexe $\ell^{[K:\mathbb{Q}]h/2} \leqq \ell^{[K:\mathbb{Q}]g}$, on a :

$$|a_i| = |P_h(\mu)| \leqq (\ell^{[K:\mathbb{Q}]g} + \ell^{[K:\mathbb{Q}]\min(g,h)})^{M_h} \leqq (2\ell^{g[K:\mathbb{Q}]})^M \ ,$$

d'où le corollaire.

COROLLAIRE 4.3.6.- *Soit* R *l'ensemble des nombres premiers ramifiés dans* $\mathcal{O}$ *et soit* A_K^1 *une* K-*variété abélienne,* K-*isogène à* A_K.

1) *Toute* K-*isogénie* $A_K^1 \longrightarrow B_K^1$ *de degré premier à* $\ell \cup R \cup S$ *conserve le degré d'Arakélov.*

2) *Toute belle* p-*isogénie* $A_K^1 \longrightarrow B_K^1$ *de niveau* n, *avec* $p \neq \ell$ *et* $n > n_p$, *conserve le degré d'Arakelov.*

Démonstration : L'assertion 2) résulte immédiatement de 4.3.4 et de la définition de n_p (4.3.5). Pour établir l'assertion 1), on se ramène par dévissage au cas d'une p-isogénie avec p premier, $p \notin \ell \cup R \cup S$, puis au cas où le noyau de l'isogénie est annulé par p. L'isogénie est alors automatiquement une belle p-isogénie de niveau ≤ 1 (4.1.2 a)) et l'assertion résulte encore de 4.3.4 et du fait que $n_p = 0$.

Enfin, notant que la borne obtenue dans 4.3.5 ne dépend que de $\mathcal{O}$ et de g on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.3.7.- *Soient* ℓ *un nombre premier,* g *un entier* ≥ 0, $\overline{S}$ *l'ensemble des nombres premiers* p, $p \neq \ell$, *tels que* $p \leq 2^M \ell^{[K:\mathbb{Q}]g\, M}$ (4.3.5).

Soit J_K *une K-variété abélienne, de dimension* g, *ayant réduction semi-stable sur* $\mathcal{O}$ *et bonne réduction en toute place divisant* ℓ.

1) *Toute K-isogénie de source* J_K, *de degré premier à* $\overline{S}$, *conserve le degré d'Arakelov.*

2) *Si* $p \in \overline{S}$ *et si* n *est un entier tel que* $p^n > 2^M \ell^{[K:\mathbb{Q}]g\, M}$, *toute belle p-isogénie, de niveau* n, *de source* J_K *conserve le degré d'Arakelov.*

4.4.- Degré d'Arakélov et isogénies, cas général

4.4.1.- Soit M un $\mathbb{Z}$-module de type fini, annulé par une puissance d'un nombre premier p. Il existe deux suites d'entiers, uniquement déterminées :

$$0 < n_1 < \ldots < n_r \quad \text{et} \quad d_1, \ldots, d_r$$

telles que $M \simeq (\mathbb{Z}/p^{n_1})^{d_1} \oplus \ldots \oplus (\mathbb{Z}/p^{n_r})^{d_r}$. Nous appellerons les entiers n_i les exposants élémentaires de M.

Notons M_n le noyau de la multiplication par p^n dans M. Alors les quotients $M_{n_i}/M_{n_{i-1}}$ sont des $\mathbb{Z}/p^{(n_i - n_{i-1})}$-modules libres, de rang $d_i + \ldots + d_r$ (en convenant que $M_{n_0} = 0$). Si de plus un groupe G opère sur M, les sous-groupes M_n sont évidemment stables par G.

4.4.2.- Soit de nouveau K un corps global, A_K une K-variété abélienne de dimension g, ayant réduction semi-stable sur $\mathcal{O}$. Soit T l'ensemble des places de mauvaise réduction et $|T|$ son cardinal. On s'intéresse aux K-variétés abéliennes A_K^1, K-isogènes à A_K.

LEMME 4.4.3.- *Soit* p *un nombre premier et soit* $u_K : A_K^1 \longrightarrow B_K^1$ *une p-isogénie de noyau* M_K. *Notons* $n_1 < \ldots < n_r$ *les exposants élémentaires de* $M_K(\overline{K})$. *Alors on a* $r \leq 2g$ *et* u_K *se factorise en* r *isogénies* $(u_i)_K$, *telles que* $\mathrm{Ker}(u_i)_K(\overline{K})$ *soit libre sur* $(\mathbb{Z}/p^{n_i - n_{i-1}})$.

C'est clair.

LEMME 4.4.4.- *Soit* p *un nombre premier et* $u_K : A^1_K \longrightarrow B^1_K$ *une* K-*isogénie de noyau* M_K , *avec* $M_K(\overline{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n)^h$, u^o *son extension aux modèles de Néron connexes,* $M = \mathrm{Ker}(u^o)$.

Pour $v \in T$, *place de mauvaise réduction, notons* $\widehat{M}_v$ *la partie finie* (1.2) *de* $M_v = M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_v$ *et soit* $m_1 < \ldots < m_s$ *la réunion des exposants élémentaires des groupes* $\widehat{M}_v(\overline{K}_v)$, $v \in T$.

Alors on a $s \leq h|T|$ *et* u_K *se factorise en* s K-*isogénies, dont l'extension aux modèles de Néron connexes, a un noyau* M_i, $i = 1,\ldots,s$, *vérifiant les propriétés suivantes :*

1) $M_i(\overline{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^{m_i - m_{i-1}})^h$,

2) *Pour tout* $v \in T$, $\widehat{(M_i)_v}(\overline{K}_v)$ *est facteur direct de* $M_i(\overline{K}_v)$.

Etablissons d'abord un lemme.

LEMME 4.4.5.- *Soient* K *un corps local* (1.0), A_K *une* K-*variété abélienne de réduction semi-stable,* $v_K : A_K \longrightarrow B_K$ *une* K-*isogénie,* $v^o : A^o \longrightarrow B^o$ *son extension aux modèles de Néron connexes,* $N' = \mathrm{Ker}\, v^o$.

Soit N_K *un sous-schéma en groupes fini de* A_K *qui contient* N'_K , *et soit* N''_K *son image par* v_K *dans* B_K . *Notons* N (resp. N'') *l'adhérence schématique de* N_K(resp. N''_K) *dans* A^o , (resp. B^o) . *Alors*

(i) *le morphisme* $N \longrightarrow N''$, *induit par* v^o *est fidèlement plat, de sorte que l'on a une suite exacte* (fppf) *de* $\mathcal{O}$-*schémas en groupes :*

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

(ii) *La suite, déduite de la précédente, en prenant les parties finies*

$$0 \longrightarrow \widehat{N}' \longrightarrow \widehat{N} \longrightarrow \widehat{N}'' \longrightarrow 0$$

est aussi exacte.

Démonstration de 4.4.5 : Comme v^o est plat (1.1), l'image réciproque de N'' par v^o est plate sur $\mathcal{O}$, et par suite coïncide avec N . Comme v^o est fidèlement plat, il en est de même de $N \longrightarrow N''$ d'où la première assertion. La seconde s'en déduit par complétion le long des fibres fermées.

Remarque 4.4.6 : les assertions i) et ii) du lemme 4.4.5 ne sont plus nécessairement vraies si on travaille avec les modèles de Néron, au lieu des modèles de Néron connexes , car l'isogénie $v : A \longrightarrow B$ n'est plus nécessairement fidèlement plate. Le lemme 4.4.5 est d'ailleurs la seule justification, dans cet exposé, de l'utilisation des modèles de Néron connexes.

Démonstration de 4.4.4.- Pour tout $v \in T$, $\widehat{M}_v(\overline{K}_v)$ est un sous-groupe de $M(\overline{K}_v)$, donc a au plus h exposants élémentaires, d'où $s \leq h|T|$.
Pour $i = 1,\dots,s$, soit $(A_i)_K$ le quotient de A^1_K par $(M_{m_i})_K$, et soit $(u_i)_K : (A_{i-1})_K \longrightarrow (A_i)_K$ l'isogénie naturelle de noyau $(M_{m_i})_K/(M_{m_{i-1}})_K$.
Alors u_K est le composé $(u_s)_K \circ \dots \circ (u_1)_K$. Notons u^o_i l'extension de $(u_i)_K$ aux modèles de Néron connexes et montrons que u^o_i vérifient les propriétés 1) et 2) de 4.4.4.

La propriété i) est évidente. Prouvons 2). Le noyau de l'isogénie naturelle $(A^1)^o \longrightarrow A^o_i$ est $M_{m_i} = \operatorname{Ker} p^{m_i} : M \longrightarrow M$. Le lemme 4.4.5 entraîne que $\operatorname{Ker} u^o_i = M_{m_i}/M_{m_{i-1}}$.

Soit $v \in T$. Posons pour simplifier $N = M(\overline{K}_v)$, $\widehat{N} = \widehat{M}_v(\overline{K}_v)$. Alors $\widehat{(M_{m_i})}_v\, (\overline{K}_v) = \widehat{N}_{m_i}$, pour $i = 1,\dots,s$.

D'après le lemme 4.4.5, la partie finie en v de $\operatorname{Ker} u^o_i = M_{m_i}/M_{m_{i-1}}$, est le quotient des parties finies $\widehat{(M_{m_i})}_v$ et $\widehat{(M_{m_{i-1}})}_v$, donc a pour points dans $\overline{K}_v$, $\widehat{N}_{m_i}/\widehat{N}_{m_{i-1}}$. Vu le choix des m_i , le groupe $\widehat{N}_{m_i}/\widehat{N}_{m_{i-1}}$ est libre sur $\mathbb{Z}/p^{m_i - m_{i-1}}$, donc est facteur direct dans $M_{m_i}/M_{m_{i-1}}$. D'où la propriété 2).

4.4.7.- Pour obtenir de belles p-isogénies, il nous faut maintenant considérer la propriété 2 (ii) de 4.1.1, et donc tenir compte de l'affaissement des parties finies $\widehat{M}_v$, pour $v|p$.
Pour p premier posons :

$$\Delta_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 2 \text{ et si } p \text{ n'est pas ramifié dans } \mathcal{O} , \\ 2g \displaystyle\operatorname*{Maximum}_{v|p}(e_v,\ e_v\, \delta_v) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où l'on a posé comme dans 3.4.5 : $\mathcal{D}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}}$ = différente de $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{Z}$,
val_v = valuation de $\mathcal{O}_v$ qui vaut 1 sur une uniformisante,

δ_v = partie entière de $\frac{1}{p-1} + \mathrm{val}_v(\mathcal{D}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}}))/e_v$.

Soit alors M le noyau d'une p-isogénie $u^o : A^o \longrightarrow B^o$ qui vérifie les conditions de 4.4.4 :

1) $M(\overline{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$, 2) pour toute place v de mauvaise réduction, $\widehat{M}_v\, (\overline{K}_v)$ est facteur direct de $M(\overline{K}_v)$.

Pour tout n' , notons $M_{\{n'\}}$ l'adhérence schématique dans M du noyau de la multiplication par $p^{n'}$ dans M_K .

Supposons $n \geq 2\Delta_p$. D'après 4.4.5 (i), l'isogénie u^o se factorise en trois isogénies, entre modèles de Néron connexes, de noyaux respectifs : $M_{\{\Delta_p\}}$, $M_{\{n-\Delta_p\}}/M_{\{\Delta_p\}}$, $M/M_{\{n-\Delta_p\}}$. Notons que chacune de ces isogénies vérifie encore l'analogue des conditions 1) et 2) ci-dessus, comme il résulte de 4.4.5 ii). De plus, on déduit de 3.4.5 et 3.2.2 que l'isogénie médiane est une belle p-isogénie, de niveau $n-2\Delta_p$.

Nous résumons les résultats obtenus dans 4.4, par le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.4.8.- *Soit* A_K *une* K-*variété abélienne, de dimension* g , *ayant réduction semi-stable sur* $\mathcal{O}$ *et mauvaise réduction en au plus* $|T|$ *places. Alors pour tout nombre premier* p , *toute* p-*isogénie* $u_K : A_K \longrightarrow B_K$ *se factorise en* $4g^2|T|$ *belles* p-*isogénies et* $8g^2|T|$ *isogénies de degré* $\leq p^{\Delta_p 2g}$.

Combinons maintenant 4.4 avec les résultats de 4.3.

THÉORÈME 4.4.9.- *Soient* T *un ensemble fini de places de* $\mathcal{O}$, *de cardinal* $|T|$ ℓ *et* ℓ' *deux nombres premiers distincts tels qu'aucune place de* T *ne divise* ℓ *ou* ℓ' . *Soit* R *l'ensemble des nombres premiers ramifiés dans* $\mathcal{O}$.

Soit A_K *une* K-*variété abélienne, de dimension* g , *ayant réduction semi-stable sur* $\mathcal{O}$ *et bonne réduction en dehors de* T .

Pour tout p *premier, on a défini des entiers* $\Delta_p \geq 0$ (4.4.7) , *ne dépendant que de* $\mathcal{O}$ *et de* g , *nuls si* $p \notin \{2\} \cup R$.

Pour tout p *premier* $\neq \ell$, *on a défini dans* 4.3.5 *des entiers* $n_p \geq 0$, *dépendant de* A_K *et de* ℓ , *nuls en dehors d'un ensemble fini* S , *tels que pour* $p \in S$, *on a* : $p^{n_p} \leq 2^M \ell^{[K:\mathbb{Q}]g\,M}$ *où* N *est le nombre de places de* K *au-dessus de* ℓ *et* $\binom{2g}{g}^N$.

Remplaçons ℓ *par* ℓ' *et prenons* $p = \ell$, *on obtient un autre entier* n_p *noté* $n_{\ell,\ell'}$, *tel que* $\ell^{n_{\ell,\ell'}} \leq 2^{M'} \ell'^{[K:\mathbb{Q}]g\,M'}$, *où* N' *est le nombre de places de* ℓ' *au-dessus de* ℓ' *et* $M' = \binom{2g}{g}^{N'}$.

Considérons les K-*variétés abéliennes* B_K , K-*isogènes à* A_K .

1) *L'ensemble des hauteurs des variétés abéliennes* B_K *est fini, de cardinal majoré par :*

$$\Big[\prod_{\substack{p\in R\cup S\cup\{2\}\\ p\neq\ell}} ((2\Delta_p + n_p)\; 8g^3[K:\mathbb{Q}]\,|T| + 1)\Big]\big((2\Delta_\ell + n_{\ell,\ell'})\; 8g^3|T|\,[K:\mathbb{Q}] + 1\big) .$$

2) *On a :*

$$|\mathrm{ht}(A_K) - \mathrm{ht}(B_K)| \leq \Big[\Big(\sum_{\substack{p\in R\cup S\cup\{2\}\\ p\neq\ell}} (2\Delta_p + n_p)\mathrm{Log}(p)\Big) + (2\Delta_\ell + n_{\ell,\ell'})\mathrm{Log}(\ell)\Big]2g^3|T| .$$

<u>Démonstration</u> : Rappelons que si B est le modèle de Néron de B_K sur $\mathcal{O}$, la hauteur de B_K, $ht(B_K)$, est $\deg(\omega_B)/[K:\mathbb{Q}]$.

Pour établir le théorème, on peut, d'après 4.3.6, et quitte à remplacer A_K par une K-variété abélienne isogène, se borner à étudier les p-isogénies pour $p \in \ell \cup R \cup S$.

D'après 4.4.7, une p-isogénie se décompose en $4g^2|T|$ belles p-isogénies et $8g^2|T|$ isogénies de degré $\leq p^{\Delta_p 2g}$.

D'après 4.3.6, toute belle p-isogénie de niveau $n > n_p$, pour $p \neq \ell$, et de niveau $n > n_{\ell,\ell'}$, pour $p = \ell$, conserve le degré d'Arakelov.

Enfin, il résulte de 2.1.4, que si $u : A \longrightarrow B$ est une p-isogénie de degré p^n, $\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B)$ peut prendre au plus $2n[K:\mathbb{Q}] +1$ valeurs et que l'on a $|ht(A_K) - ht(B_K)| \leq \frac{n}{2} \log(p)$. Plus généralement, ces majorations s'étendent au cas où on passe de A à B par une suite finie de p-isogénies dont le produit des degrés est $\leq p^n$.

D'après les considérations qui précèdent, pour contrôler les p-isogénies qui, a priori, ne conservent pas le degré d'Arakelov, on peut prendre

$$n = (\Delta_p\ 2g)\ 8g^2|T| + (n_p\ 2g)\ 4g^2|T| = (2\Delta_p + n_p)\ 8g^3|T|, \text{ pour } p \neq \ell$$

et $n = (2\Delta_\ell + n_{\ell,\ell'})\ 4g^3|T|$ pour $p = \ell$.

On obtient alors l'assertion 1) (resp. 2)) du théorème en prenant le produit (resp. la somme) des majorations relatives aux différents "mauvais" nombres premiers p.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. BÉGUERI. *Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos*, Mémoire Soc. Math. de France, supplément t. 108, 1980, 117 p.

[2] J-M. FONTAINE. *Formes différentielles et modules de Tate des Variétés abéliennes sur les corps locaux*, Invent. Math.65, 1982, 379-409.

[3] J-M. FONTAINE et G. LAFFAILLE. *Construction de représentations p-adiques*, Publ. Université Sc. et Méd. de Grenoble, 1981.

[4] M. GREENBERG. *Schemata over local rings*, Annals of Math. 73, 1961, 624-648.

[5] A. GROTHENDIECK. *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Sém. de géom. Alg. du Bois-Marie 1967-1969, SGA 7 I, Lectures Notes in Math. n° 288, Springer-Verlag, 1972.

[6] R. HARTSHORNE. *Residues and Duality*, Lect. Notes in Math. n°20, Springer Verlag, 1966.

[7] B. MAZUR et L. ROBERTS. *Local Euler characteristics*, Invent. math. 9, 1970, pp. 201-234.

[8] L. MORET-BAILLY. *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque, à paraître.

[9] M. RAYNAUD. *Schémas en Groupes de type* $(p,\ldots,p)$, Bull. Soc. Math. de Fr. t. 102, 1974, 241-280.

[10] J-P. SERRE. *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, 1962.

[11] J-P. SERRE. *Groupes pro-algébriques*, Publ. Math. I.H.E.S n°7, 1960.

[12] J-P. SERRE. *Corps locaux*, Hermann, 1962.

[13] J-P. SERRE. *Corps locaux à corps résiduel algébriquement clos*, Bull. Soc. Math. de Fr, t.89 , 1961, 105-154.

[14] J-P. SERRE. *Cohomologie Galoisienne*, Lect. Notes in Math. n°5, Springer-Verlag, 1965.

[15] J. TATE. *WC-groups overp-adic fields*, Sém. Bourbaki 156, Déc. 1957, W.A. Benjamin, New York, 1965.

[16] J. TATE. p-*divisible groups*, *Local fields*, Nuffic Sum. School at Driebergen, Springer-Verlag, 1967, pp. 158-184.

[17] A. WEIL. *Variétés abéliennes et courbes algébriques*, Hermann, 1948.

Michel RAYNAUD
Université PARIS XI - Bat.425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX