Invent. math. 142, 513–545 (2000)
Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s002220000095

Inventiones mathematicae

Décompte dans une conjecture de Lang

Gaël Rémond

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 6 Pierre et Marie Curie,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
(e-mail: remond@math.jussieu.fr)

Oblatum 20-III-2000 & 3-V-2000
Published online: 16 August 2000 –

Abstract. Faltings has proven the following conjecture of Lang: if A is an abelian variety over a number field and X any subvariety then all rational points of X lie on a finite number N of translates, contained in X, of abelian subvarieties of A. We provide an upper bound for N whose main feature is uniformity in X since it does not depend on the height of X. Moreover, the bound is completely explicit. Together with the result of a previous paper, the heart of the proof is a suitable generalization of Mumford's theorem for curves.

1 Introduction

Ce texte s'insère dans la même approche que [R2]. On y prouve entre autres une inégalité de Mumford destinée à compléter l'inégalité de Vojta établie dans cet article. Ces deux ingrédients conjugués permettent de répondre à des questions de décompte qui généralisent le problème initial de borner le nombre de points rationnels d'une courbe de genre au moins 2 sur un corps de nombres.

On travaille ici avec les sous-variétés de variétés abéliennes. Dans ce cas, les travaux de G. Faltings et de M. Hindry permettent en effet d'énoncer, comme l'avait conjecturé S. Lang :

Théorème 1.1 *Soient A une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$, X un sous-schéma fermé de A et Γ un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Il existe un entier naturel S, des éléments $x_1, \ldots, x_S$ de $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ et des sous-variétés abéliennes $B_1, \ldots, B_S$ de A de sorte que $x_i + B_i \subset X$ si $1 \leq i \leq S$ et*

$$X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma = \bigcup_{i=1}^{S} (x_i + B_i)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma.$$

Si Γ est de type fini cela se déduit du théorème principal de [F2] et il était montré dans [Hi] comment cela impliquait le cas général d'un groupe de rang fini. On rappelle que si Γ est un groupe abélien son rang est par définition la dimension de l'espace vectoriel $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Le résultat principal du présent travail consiste en une version effective de cet énoncé où l'on majore l'entier S. La caractéristique essentielle de cette borne est son uniformité au sens où elle dépend du degré de X par rapport à un faisceau ample fixé mais non de la hauteur de X.

Théorème 1.2 *Soient A une variété abélienne de dimension g sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible symétrique et ample sur A. Il existe un réel $c(A, \mathcal{L}) > 0$ tel que pour tout sous-schéma fermé X de A de dimension $m-1$ et tout sous-groupe Γ de rang $r \in \mathbb{N}$ de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ on peut choisir dans le théorème 1.1*

$$S \leq \left(c(A, \mathcal{L}) \deg_{\mathcal{L}} X\right)^{(r+1)g^{5m^2}} .$$

On définit le degré d'un sous-schéma X quelconque comme la somme des degrés de ses composantes irréductibles (et si X est irréductible $\deg_{\mathcal{L}} X$ est le nombre d'intersection $[\mathcal{L}]^{\dim X} \cdot X$). Il faut considérer la constante $c(A, \mathcal{L})$ comme un terme de hauteur. Cette constante peut être complètement explicitée : dans la suite nous indiquons comment la calculer à l'aide d'une constante apparaissant dans [DP2, II] dont le calcul est en cours.

Un cas particulier important du théorème 1.1 est celui des points rationnels : si A est une variété abélienne sur un corps de nombres $K \subset \bar{\mathbb{Q}}$ et X un sous-schéma fermé de A on peut appliquer le résultat à $A \times_K \bar{\mathbb{Q}}$, $X \times_K \bar{\mathbb{Q}}$ et $\Gamma = A(K)$ et obtenir ainsi un énoncé concernant $X(K)$. Le théorème 1.2 donne donc une version explicite du théorème de [F2]. On notera que dans ce cas on trouve des points $x_i \in X(K)$ mais que les variétés abéliennes B_i ne sont pas nécessairement définies sur K. Toutefois, on sait qu'elles le sont sur $K(A[3])$ (le corps engendré par les points de 3-torsion de A) et cela représente une extension de K de degré au plus 9^g.

Explicitons un énoncé sur les points rationnels des courbes.

Théorème 1.3 *Une courbe C projective lisse de genre $g \geq 2$ sur un corps de nombres K a au plus*

$$c(J \underset{K}{\times} \bar{\mathbb{Q}}, \mathcal{L})^{7(\mathrm{rang}\, J(K)+1)g^3}$$

points rationnels où J désigne la jacobienne de C et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur $J \times_K \bar{\mathbb{Q}}$ correspondant à un translaté symétrique du diviseur thêta.

Remarque : on peut combiner cette majoration avec le résultat de T. Ooe et J. Top ([OT]) qui donne une borne pour le rang de $J(K)$.

La démonstration des résultats ci-dessus se situe dans la lignée des travaux de Mumford [M], Vojta [V], Bombieri [Bo] et Faltings [F1] et [F2].

Les trois premières références concernent le cas des courbes (conjecture de Mordell). On en déduit un décompte des points rationnels d'une courbe basé sur deux inégalités dites respectivement de Mumford et de Vojta. La démarche de Faltings dans [F1] et [F2] pour prouver la conjecture de Lang consiste à généraliser l'inégalité de Vojta et l'on a montré dans [R2] comment énoncer une telle inégalité de manière explicite. Ce résultat constitue la première étape vers le théorème 1.2 ; même si l'obtention en est assez technique, la forme de l'inégalité établie donne l'extension attendue du cas des courbes – une fois que l'on consent à travailler sur $X \setminus Z_X$ c'est-à-dire à écarter les translatés de sous-variétés abéliennes inclus dans X (voir plus bas).

Si l'on se tourne vers la généralisation de l'inégalité de Mumford, même en se restreignant à $X \setminus Z_X$, il n'est pas possible d'obtenir aussi bien qu'en dimension 1 : on établit ce fait dans la partie 5 et l'on montre que l'on peut y remédier en excluant un ensemble $\hat{Z}$ plus gros que l'ensemble naturel Z_X (voir théorème 5.2). Toutefois cela ne suffit pas pour aboutir au théorème 1.2 et l'on tourne la difficulté différemment, en établissant une inégalité de Mumford seulement pour les points de $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$.

Ce résultat central de notre travail fait l'objet de la partie 3 et permet d'obtenir une borne pour le cardinal de $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$. On procède par récurrence sur la dimension de X. Dans un premier temps, on donne un résultat de la forme de celui de [Bo] : on compte les points en dehors d'une boule de rayon c_3 où c_3 dépend de la hauteur de X. Cette dépendance faisant obstacle au raisonnement par récurrence, on la supprime en second lieu (proposition 3.7) en mettant un évidence un principe de concentration des points. Disons encore que pour aboutir à une borne satisfaisante pour le cardinal de $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ on applique un résultat de [DP2, II] afin de majorer le nombre de points de petite hauteur de cet ensemble.

En dernier lieu, on passe au théorème 1.2 en examinant les points de Z_X (partie 4). Classiquement cela se fait en considérant des quotients de la forme A/B où B est une sous-variété abélienne de A (voir par exemple la démonstration du théorème 4.2 de [F1]). Comme un lemme élémentaire contrôle le degré des B qui peuvent intervenir, on divise le travail en deux. On montre d'abord que le nombre de sous-variétés abéliennes de dimension h et de degré au plus δ se majore par $(c(g) \max(\deg(A), \delta))^{4gh(2g+1)}$ où $c(g)$ est une fonction explicite de g seulement. En particulier la hauteur de A n'intervient pas dans cette borne. On obtient ce résultat, de manière indépendante du reste de l'article, à l'aide de techniques de géométrie des nombres. On travaille ensuite à B fixée : en fixant une isogénie entre A/B et une sous-variété abélienne de A, on ramène le problème dans A en dimension inférieure.

Dans la partie suivante, on précise les notations utilisées dans la suite et l'on montre comment déduire les théorèmes 1.2 et 1.3 d'un énoncé plus précis. On a regroupé en annexe deux lemmes élémentaires de géométrie euclidienne ainsi qu'une majoration de la hauteur d'équations de X que l'on utilise dans la partie 3.

2 Préliminaires

a) Notations

Pour démontrer le théorème 1.2, nous utiliserons un plongement thêta qui permet (comme dans [DP2, II]) d'expliciter complètement les constantes. En général, cependant, nous travaillerons dans un cadre un peu plus général. Ainsi, sauf mention expresse du contraire, on considérera comme fixées une variété abélienne A sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et une immersion fermée $\iota\colon A \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ telles que le faisceau $\mathcal{L} = \iota^*\mathcal{O}(1)$ est symétrique et l'application $\Gamma(\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}(d)) \to \Gamma(A, \mathcal{L}^{\otimes d})$ surjective pour tout $d \geq 1$. On note g la dimension de A.

Si F est une partie finie de $\bar{\mathbb{Q}}$, on définit sa hauteur ainsi : on note K le corps de nombres $\mathbb{Q}(F)$, pour toute place v de K on écrit $|F|_v = \max_{x\in F} |x|_v$ puis on pose

$$h(F) = \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |F|_v.$$

Si P est un polynôme et F la famille de ses coefficients on note aussi $|P|_v = |F|_v$ et $h(P) = h(F)$. D'autre part si x est un point fermé de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ on désigne par $h(x)$ la hauteur d'un système quelconque de coordonnées. Par le plongement ι, la hauteur des points induit une hauteur sur $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Comme $\mathcal{L}$ est symétrique, on dispose d'une forme bilinéaire $<,>$ sur $A(\bar{\mathbb{Q}})$ telle que $|x|^2 =< x, x >$ est la hauteur de Néron-Tate et on introduit une constante c_{NT} de sorte que pour tout $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ on ait $|h(x) - |x|^2| \leq c_{\mathrm{NT}}$. L'autre constante associée à A que nous utiliserons, notée h_1, est la hauteur d'une famille de polynômes représentant l'addition de A (voir définition précise dans [R2]).

Chaque fois que X est un sous-schéma fermé de A, on le contrôle par son degré $\deg X$ et, éventuellement, s'il est intègre, par sa hauteur $h(X)$ (telle qu'elle est définie dans [BGS], [Ph] ou [R1]). On lui associe également Z_X l'union des translatés de sous-variétés abéliennes non nulles inclus dans X, qui est un sous-schéma fermé de X (voir [R2]).

Par abus de notations, si Γ est un sous-groupe de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ on notera $X \cap \Gamma$ au lieu de $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ (et de même pour un ouvert de X). D'après [DP2, II], où l'ouvert $X \setminus Z_X$ est noté X^0, on connaît l'existence d'une fonction $\Omega\colon \mathbb{N}^2 \times [1, +\infty[^2 \to [1, +\infty[$ telle que pour tout sous-schéma fermé intègre X de A, tout sous-groupe Γ de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et tout réel $c \geq 1$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Card}\{x \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma \mid |x|^2 \leq c \max(1, c_{\mathrm{NT}}, h_1)\} \\ &\qquad\qquad \leq \Omega(\mathrm{rang}\,\Gamma, \dim X, \deg X, c). \end{aligned}$$

De plus quitte à augmenter Ω on peut supposer que cette fonction vérifie :

1. la fonction $(r, d, D, c) \mapsto \Omega(r, d, D, c)/D$ est croissante en chacune de ses quatre variables ;
2. pour tout quadruplet $(r, d, D, c) \in \mathbb{N}^2 \times [1, +\infty[^2$ avec $0 \leq d \leq g$ on a l'inégalité $\Omega(r, d, n^{d+2}D^{d+3}, c) \leq \Omega(r, d+1, D, c)$.

Alors on pose pour $(r, d, D) \in \mathbb{N}^2 \times [1, +\infty[$ avec $m = d + 1$

$$f(r, d, D) = (nD)^{rm^{4m^2}} \Omega(r, d, D, (nD)^{m^{4m^2}}).$$

En vertu des propriétés de Ω, on remarque que $f(r, d, D)/D$ est croissante en chacune des trois variables et que l'on a $f(r, d, D) \leq f(r, d+1, \sqrt{D})$. De plus f est une fonction ne dépendant que de la variété abélienne A et du plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$.

Dorénavant on notera systématiquement $m = \dim X + 1$.

Théorème 2.1 *Dans le cadre décrit ci-dessus, le théorème 1.1 est vérifié avec*

$$S \leq \left(g^g n (\deg X)^{(m+1)^2/4}\right)^{8g(g+1)\dim X} f(r, \dim X, ng!(\deg X)^{(m+1)^2/4}).$$

De plus si $\dim X = 1$ *on peut même choisir*

$$S \leq \Omega(r, 1, \deg X, (n+1)^2 D^{20}(1 + 3\log(n+1))) + (3(n+1)^2 D^{12})^r$$

où $D = \max(\deg X, 2^{14})$.

b) Déduction des théorèmes principaux

Démonstration du théorème 1.2 : Dans [DP2, II] il est montré que

$$\mathrm{Card}\{x \in (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \mid |x|^2 \leq q(X)^{-1}\} \leq q(X)$$

pour

$$q(X) = (c_0 \deg X)^{(2g^2)^{\dim X}}$$

où c_0 est une constante ne dépendant que de $(A, \mathcal{L})$. On applique le lemme 6.1 (voir annexe) à l'image de $\{x \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma \mid |x|^2 \leq c\}$ dans $\Gamma \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$ avec $\rho = \sqrt{c}$ et $\gamma = \sqrt{cq(X)}$. On obtient au plus $(2\sqrt{cq(X)} + 1)^r$ boules de rayon $q(X)^{-1/2}$ centrées en des points de $(X \setminus Z_X) \cap \Gamma$. En translatant X par chacun de ces points, le résultat cité montre que chaque boule contient les images d'au plus $q(X)$ points de $(X \setminus Z_X) \cap \Gamma$. On en déduit que l'on peut prendre

$$\Omega(r, d, D, c) = (c_0 D)^{(1+r/2)(2g^2)^d} (9c \max(1, c_{\mathrm{NT}}, h_1))^{r/2}.$$

Cette fonction satisfait en plus les propriétés 1 et 2 que l'on a imposées au paragraphe précédent (si $c_0 \geq n$ et $g \geq 2$ ce que l'on peut supposer sans problème).

On se place maintenant dans le cadre qui permet d'expliciter c_0 c'est-à-dire que l'on applique le théorème 2.1 au plongement thêta associé à $\mathcal{L}^{\otimes 16}$ comme il est décrit dans [DP2, II]. Ce plongement vérifie bien les hypothèses que l'on a mises ci-dessus. La dimension de l'espace projectif est donnée par $n = 2^{4g}\chi(\mathcal{L})$ et le degré de X devient

$$\deg_{\mathcal{L}^{\otimes 16}} X = 2^{4 \dim X} \deg_{\mathcal{L}} X.$$

Il reste alors à combiner la définition de Ω et celle de f avec la majoration de S. Après un certain nombre de calculs, on trouve que S est majoré par l'expression annoncée avec $c(A, \mathcal{L}) = \max(c_0, c_{\mathrm{NT}}, h_1)^{1/g}$. De plus les techniques de [DP2, II] permettent de borner c_{NT} et h_1, probablement par c_0. $\square$

Démonstration du théorème 1.3 : On applique ici la deuxième partie du théorème 2.1 en utilisant la même valeur de Ω que dans la démonstration précédente. On spécialise ensuite au cas de la courbe C plongée dans sa jacobienne J par $P \mapsto P - P_0$ où P_0 est un point rationnel quelconque. Dans ce cadre avec le faisceau choisi on a $\deg_{\mathcal{L}} C = g$ (voir [L, th. 5.8 page 118]). Après calculs on aboutit bien à la formule attendue. $\square$

3 Borne pour $X \setminus Z_X$

Dans toute cette partie, Γ est un sous-groupe fixé de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et l'on note r son rang. On montre alors

Théorème 3.1 *Soit X un sous-schéma fermé de A. On a la majoration :*

$$\mathrm{Card}(X \setminus Z_X) \cap \Gamma \leq f(r, \dim X, \deg X).$$

En premier lieu, on remarque que l'énoncé est facilement vrai si $r = 0$. En effet dans ce cas $f(0, \dim X, \deg X) \geq \Omega(0, \dim X, \deg X, 1)$ et par définition ceci est bien un majorant de $\mathrm{Card}(X \setminus Z_X) \cap \Gamma$. On supposera désormais pour la démonstration du théorème que ce rang est au moins 1.

Pour établir le théorème, on procède par récurrence sur la dimension de X. Si $\dim X = 0$ c'est immédiat puisque $\deg X \leq f(r, 0, \deg X)$. On suppose donc en plus $\dim X > 0$. Dans les estimations on utilisera encore $n \geq 3$ car les autres cas sont triviaux (on a $X = A$ et donc $X \setminus Z_X = \emptyset$).

Si X n'est pas intègre, on note $V_1, \ldots, V_t$ ses composantes irréductibles et l'on a clairement

$$(X \setminus Z_X) \cap \Gamma \subset \bigcup_{s=1}^{t} (V_s \setminus Z_{V_s}) \cap \Gamma.$$

Ainsi si le théorème est vrai pour les V_s on peut écrire

$$\mathrm{Card}(X \setminus Z_X) \cap \Gamma \leq \sum_{s=1}^{t} f(r, \dim V_s, \deg V_s).$$

Vu les propriétés de f on a $f(r, \dim V_s, \deg V_s) \leq \frac{\deg V_s}{\deg X} f(r, \dim X, \deg X)$ qui montre que la somme ci-dessus est majorée par $f(r, \dim X, \deg X)$. Ce raisonnement montre que pour prouver le théorème il suffit d'en établir l'énoncé pour un schéma X intègre, en le supposant vrai pour tous les schémas de dimension strictement inférieure.

Dans un premier temps on réunit à l'inégalité de Vojta de [R2] une inégalité de Mumford et ceci fournit une borne temporaire pour $\mathrm{Card}(X \setminus Z_X) \cap \Gamma$, dépendant de la hauteur de X. Dans une deuxième étape, on supprime cette dépendance.

Si X est de dimension 1, le passage de $X \setminus Z_X$ à X est trivial. Ainsi le travail fait dans cette partie sera suffisant pour conclure dans le cas des courbes (deuxième partie du théorème 2.1). On donne les quelques précisions nécessaires dans un troisième paragraphe.

Remarquons ici que l'on appliquera dans la suite à notre situation sur $\bar{\mathbb{Q}}$ des résultats énoncés sur un corps de nombres : c'est le cas de la proposition 6.1 de l'annexe et, surtout, du théorème principal de [R2]. Bien entendu, ceci est loisible en choisissant un corps de nombres sur lequel existent des objets dont l'extension à $\bar{\mathbb{Q}}$ redonne ceux dont on dispose : dans le second cas, ces objets sont A, le plongement ι (donc $\mathcal{L}$), des polynômes définissant h_1 et X (qui sera supposé alors intègre).

a) Inégalité de Mumford dans un sous-groupe de rang fini

Nous allons établir le résultat d'espacement des points suivant qui généralise l'inégalité de Mumford sur les courbes.

Théorème 3.2 *Soit $x \in X(\bar{\mathbb{Q}})$. Si c_1 et c_4 sont deux réels > 0 qui vérifient*

$$\left(\frac{(2\deg X)^{-m}}{\dim X} - \frac{1}{2c_4^2} - \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1c_4}\right)|x|^2 \geq h(X) + \frac{1}{4}h_1 + c_{\mathrm{NT}} + m\log(\deg X)(n+1)$$

il existe au plus

$$f\left(r, \dim X - 1, (\deg X)^{\dim X+2}\right)$$

points $y \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma$ tels que

$$< x, y > \geq (1 - 1/c_1)|x||y|$$
$$\big||x| - |y|\big| \leq \frac{1}{c_4}|x|.$$

On notera que cet énoncé mérite le nom d'inégalité de Mumford car on peut en déduire, comme dans [M], que la hauteur des points de $(X \setminus Z_X) \cap \Gamma$ croît au moins exponentiellement. Bien entendu ceci n'a pas d'intérêt ici au vu du théorème 3.1 mais c'est tout de même sous une forme voisine que l'inégalité de Mumford sera utilisée en conjonction avec l'inégalité de Vojta (voir démonstration du théorème 3.5).

Le résultat sera combinaison des deux faits suivants :

Proposition 3.3 *Soit $S \subset (X \setminus Z_X) \cap \Gamma$ un ensemble de cardinal*

$$f(r, \dim X - 1, (\deg X)^{\dim X + 2}) + 1.$$

Si $x \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ il existe $x_1, \ldots, x_{\dim X} \in S$ de sorte que le point $(x, x_1, \ldots, x_{\dim X})$ soit isolé dans la fibre de son image par le morphisme

$$\begin{aligned} X^{\dim X+1} &\longrightarrow A^{\dim X} \\ (x, x_1, \ldots, x_{\dim X}) &\longmapsto (x_1 - x, \ldots, x_{\dim X} - x). \end{aligned}$$

Le second ingrédient est purement géométrique et ne fait pas intervenir le groupe Γ.

Proposition 3.4 *Si $(x, x_1, \ldots, x_{\dim X})$ est isolé dans sa fibre et que $c_1, c_4 > 0$ sont tels que, pour tout i,*

$$\begin{aligned} &< x, x_i > \geq (1 - 1/c_1)|x||x_i| \\ &\big||x| - |x_i|\big| \leq \frac{1}{c_4}|x| \end{aligned}$$

alors

$$\left(\frac{(2\deg X)^{-m}}{\dim X} - \frac{1}{2c_4^2} - \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1 c_4}\right)|x|^2 < h(X) + \frac{1}{4}h_1 + c_{\mathrm{NT}} + m\log(\deg X)(n+1).$$

Démonstration de la proposition 3.3 : Les points de la fibre en question s'écrivent $(x + a, x_1 + a, \ldots, x_{\dim X} + a)$ lorsque a parcourt

$$(X - x) \cap (X - x_1) \cap \cdots \cap (X - x_{\dim X}).$$

On souhaite choisir les points x_i de sorte que la dimension en 0 de ce fermé soit nulle. Montrons que l'on peut trouver de tels points de proche en proche avec

$$\dim_0 (X - x) \cap (X - x_1) \cap \cdots \cap (X - x_i) \leq \dim X - i.$$

Si cela n'était pas possible, il existerait un indice i $(0 \leq i < \dim X)$ et $x_1, \ldots, x_i$ de sorte que si $W = (X - x) \cap (X - x_1) \cap \cdots \cap (X - x_i)$ on ait

$$\dim_0 W = \dim X - i = \dim_0 W \cap (X - y) \qquad \text{pour tout } y \in S.$$

Notons $C_1, \ldots, C_s$ les composantes irréductibles de W de dimension $\dim X - i$ qui contiennent 0. Il est clair que

$$\begin{aligned}\dim_0 W \cap (X-y) = \dim_0 W &\iff \exists j,\ 1 \le j \le s,\ C_j \subset X - y\\ &\iff \exists j,\ 1 \le j \le s,\\ &\qquad\qquad y \in \{a \in A \mid a + C_j \subset X\}\\ &\iff \exists j,\ 1 \le j \le s,\ y \in \bigcap_{c \in C_j} (X - c).\end{aligned}$$

Notre hypothèse est donc

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{s} \bigcap_{c \in C_j} (X - c).$$

On écrit le fermé de droite sous la forme

$$V = \bigcup_{e=0}^{\dim X - 1} V_e$$

où V_e est équidimensionnel de dimension e (on a $\dim V < \dim X$ car sinon $C_j \subset \mathrm{Stab}(X)$ pour un certain j et cela entraîne $Z_X = X$). On a alors

$$S \subset \bigcup_{e=0}^{\dim X - 1} (V_e \setminus Z_{V_e}) \cap \Gamma$$

donc

$$\mathrm{Card}(S) \le \sum_{e=0}^{\dim X - 1} f(r, e, \deg V_e).$$

Par ailleurs

$$\sum_{e=0}^{\dim X - 1} (\deg V_e)(\deg X)^e \le s(\deg X)^{\dim X + 1}$$

et

$$s \le \sum_{j=1}^{s} \deg C_j \le (\deg X)^{i+1}$$

car à chaque fois on coupe X par des hypersurfaces de degré au plus $\deg X$ (voir [Hi]). Par conséquent $\deg V_e = \varepsilon_e (\deg X)^{2m-1-e}$ avec $\sum_e \varepsilon_e \le 1$. On en déduit (vu les propriétés de f) que

$$\mathrm{Card}(S) \le \max_e f(r, e, (\deg X)^{2m-1-e}) = f(r, \dim X - 1, (\deg X)^{\dim X + 2})$$

et cela fournit la contradiction désirée. $\square$

Pour faire la démonstration ci-dessus il est utile d'avoir une borne donnée par f indépendante de la hauteur car on ne sait pas contrôler les hauteurs $h(V_e)$.

Démonstration de la proposition 3.4 : On note $a_i = x_i - x$ pour $1 \leq i \leq \dim X$. On calcule

$$\begin{aligned} h(a_i) &\leq |a_i|^2 + c_{\mathrm{NT}} \\ &\leq |x_i|^2 - 2< x_i, x > + |x|^2 + c_{\mathrm{NT}} \\ &\leq (|x_i| - |x|)^2 + \frac{2}{c_1}|x||x_i| + c_{\mathrm{NT}} \\ &\leq \left(\frac{1}{c_4^2} + \frac{2}{c_1}\left(1 + \frac{1}{c_4}\right)\right)|x|^2 + c_{\mathrm{NT}}. \end{aligned}$$

Par ailleurs l'hypothèse est que x est un point isolé de

$$X \cap (X - a_1) \cap \cdots \cap (X - a_{\dim X}).$$

On va écrire ceci comme l'intersection de X avec une certaine famille d'hypersurfaces de degré $2 \deg X$. Si l'on note $\mathcal{P}$ la famille correspondante de polynômes, on aura

$$\begin{aligned} |x|^2 &\leq h(x) + c_{\mathrm{NT}} \\ &\leq h(\{x\}) + c_{\mathrm{NT}} \\ &\leq (2 \deg X)^{\dim X}\left(h(X) + \frac{1}{2}(\dim X)\max_{P \in \mathcal{P}} h_m(P)\right) + c_{\mathrm{NT}} \end{aligned}$$

(on utilise les formules d'intersection de [R1] avec la hauteur modifiée en les itérant comme dans le corollaire 5 de [Ph]). Pour construire la famille $\mathcal{P} \subset K[W_0, \ldots, W_n]$, on considère d'abord une famille $\mathcal{P}_1$ de polynômes de degré $\deg X$ définissant X comme dans la proposition 6.1 (voir annexe). On note en outre $R_{k,l}$ les formules d'addition (notées $P_{1,1,0,0,k,l}$ dans [R2]) de sorte que la famille $\mathcal{P}$ formée des polynômes

$$P_1(R_{k,l}(W_0, \ldots, W_n, (a_i)_0, \ldots, (a_i)_n)_{0 \leq k \leq n})$$

pour $P_1 \in \mathcal{P}_1$, $0 \leq l \leq n$ et $1 \leq i \leq \dim X$ convient (si l'on a choisi des coordonnées projectives $(a_i)_0, \ldots, (a_i)_n$ de a_i). On déduit de cette définition que si $P \in \mathcal{P}$

$$h_m(P) \leq h(\mathcal{P}_1) + (\deg X)h_1 + 2(\deg X)\max_{1 \leq i \leq \dim X} h(a_i)$$
$$+ 2(\deg X)\log\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \log\binom{\deg X + n}{n}$$

puisque $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ majore le nombre de coefficients de $R_{k,l}$ et $\binom{\deg X+n}{n}$ celui de P_1. Avec la proposition 6.1 et le calcul liminaire on a

$$h_m(P) \leq h(X) + (\deg X)h_1 + 2(\deg X)c_{\mathrm{NT}}$$
$$+ 2(\deg X)\left(\frac{1}{c_4^2} + \frac{2}{c_1}\left(1 + \frac{1}{c_4}\right)\right)|x|^2 + 4m(\deg X)\log(\deg X)(n+1).$$

Enfin on obtient

$$\begin{aligned}
&|x|^2\left(1 - (2\deg X)^{\dim X+1}(\dim X)\left(\frac{1}{2c_4^2} + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_1c_4}\right)\right)\\
&\leq \left(\frac{\dim X}{2}(2\deg X)^{\dim X+1} + 1\right)c_{\mathrm{NT}} + (2\deg X)^{\dim X}\left(\frac{\dim X}{2} + 1\right)h(X)\\
&\quad + \frac{\dim X}{4}(2\deg X)^{\dim X+1}h_1\\
&\quad + m(\dim X)(2\deg X)^{\dim X+1}\log(\deg X)(n+1)\\
&< (2\deg X)^m(\dim X)\left(c_{\mathrm{NT}} + h(X) + \frac{1}{4}h_1 + m\log(\deg X)(n+1)\right)
\end{aligned}$$

qui donne la conclusion. □

Par exemple on peut choisir dans le théorème $c_4 = \sqrt{(\dim X)(2\deg X)^m}$ et $c_1 \geq 8c_4^2$ de sorte que la condition principale est impliquée par

$$|x|^2 \geq 4c_4^2\left(h(X) + \frac{1}{4}h_1 + c_{\mathrm{NT}} + m\log(\deg X)(n+1)\right).$$

On donne maintenant le résultat de décompte qui résulte de cette inégalité de Mumford combinée avec l'inégalité de Vojta de [R2]. On utilise à présent les constantes c_1, c_2 et c_3 de [R2] c'est-à-dire

$$c_1 = c_2 = \max\left(\deg X, (6m)^{2m}\right)^{m^{3m^2}} \qquad \text{et}$$

$$c_3 = c_1(n+1)^{(\dim X)^3}\max(h(X), h_1, c_{\mathrm{NT}}, n\log(n+1)).$$

Comme on a clairement

$$8(\dim X)(2\deg X)^m \leq c_1$$

on peut utiliser la remarque qui précède et d'après

$$4(\dim X)(2\deg X)^m\left(h(X)+\frac{1}{4}h_1+c_{\mathrm{NT}}+m\log(\deg X)(n+1)\right)\leq c_3$$

la condition du théorème est plus faible que $|x|^2 \geq c_3$, qui intervient dans [R2].

Théorème 3.5 *On a*

$$\mathrm{Card}\{x\in(X\setminus Z_X)\cap\Gamma \mid |x|^2\geq c_3\}\leq N$$

avec

$$N=f(r,\dim X-1,(\deg X)^{m+1})m^{5m^2}(\deg X)^m(1+\sqrt{8c_1})^r.$$

Démonstration : Par le corollaire 6.1 (voir en annexe), on répartit les points de $(X\setminus Z_X)\cap\Gamma$ vérifiant $|x|^2\geq c_3$ en moins de $(1+\sqrt{8c_1})^r$ ensembles dans chacun desquels deux points quelconques vérifient

$$< x,y >\geq(1-1/c_1)|x||y|.$$

Dans un tel ensemble, on ordonne les points en $x_0, x_1, x_2\ldots$ de sorte que $|x_{i+1}|\geq|x_i|$. Alors le théorème précédent montre que si $k=f(r,\dim X-1,(\deg X)^{\dim X+2})$ on a

$$|x_k|>\left(1+\frac{1}{c_4}\right)|x|$$

et plus généralement

$$|x_{ik+j}|>\left(1+\frac{1}{c_4}\right)^i|x_j|$$

pour tous $i>0$ et $j\geq 0$. On considère ensuite M un entier tel que $(1+1/c_4)^M\geq c_2$. Comme $|x_{(i+1)Mk}|>c_2|x_{iMk}|$ cette suite de points contredit le théorème de [R2] si l'on peut définir $x_{(m-1)Mk}$. Ainsi il y a dans l'ensemble considéré au plus $(m-1)kM$ points. Avec les valeurs explicites on vérifie que ce nombre est majoré (largement) par

$$2^{m+3}m^{3m^2+3}(\deg X)^{(m+1)/2}k\leq m^{5m^2}(\deg X)^m k$$

et cela donne la conclusion. □

Ce théorème donne un majorant pour le cardinal de $(X\setminus Z_X)\cap\Gamma$ mais la borne obtenue dépend (à travers la valeur de c_3) de la hauteur de X, ce qui empêche de conclure par récurrence sur le champ. On va toutefois montrer que l'on peut déduire de cet énoncé un résultat semblable où la hauteur de X n'apparaît plus.

b) Suppression de la dépendance en la hauteur

On utilisera de manière cruciale le lemme suivant qui donne une condition sous laquelle un schéma est contrôlé par un nombre fini de ses points fermés. Qualitativement, le résultat est assez naturel car la dite condition entraîne que X est le seul sous-schéma de degré et dimension donnés contenant ces points.

Lemme 3.1 *Soient n un entier, X un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et S une partie finie de $X(\bar{\mathbb{Q}})$. On suppose que si Y est un sous-schéma de X équidimensionnel de dimension* $\dim X - 1$ *tel que $S \subset Y(\bar{\mathbb{Q}})$ on a* $\deg Y > (n+1)(\deg X)^2$. *Alors*

$$h(X) \leq (n+2)^{\dim X+1}(\deg X)\left(\max_{x\in S} h(x) + 3\log(n+1)\right).$$

Démonstration : Soit E l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré $D = (n+1)\deg X$ appartenant à l'idéal I de X. On sait que l'on a entre fermés de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ l'égalité $X = V(E)$. Si maintenant P est un polynôme homogène de degré D n'appartenant pas à E, le fermé $Y = X \cap V(P)$ est équidimensionnel avec $\dim Y = \dim X - 1$ et $\deg Y \leq D(\deg X)$. Par hypothèse on a alors $S \not\subset Y(\bar{\mathbb{Q}})$ et donc P ne s'annule pas en tous les points de S. De ce raisonnement, on déduit que E est exactement l'espace des polynômes homogènes de degré D qui s'annulent en tous les points de S.

D'un autre côté, d'après [DP1, prop. 4.10], et H_g et H_a étant les fonctions de Hilbert géométrique et arithmétique utilisées dans cet article-là,

$$(\deg X)^{\dim X+1}h(X) \leq H_a(I,D) + \frac{5}{2}H_g(I,D)D\log(n+1)$$

(on utilise $\delta_0 = \deg X$ dans la démonstration de la proposition citée). Ensuite $H_a(I,D)$ est définie comme la hauteur du produit extérieur des éléments d'une base de E. On peut donc remplacer E par son dual et, en vertu de ce qui précède, ce dual est engendré par les vecteurs formés des monômes de degré D en les coordonnées des points de S. De plus la dimension du dual de E est exactement $H_g(I,D)$. En majorant la hauteur du produit extérieur par la somme des hauteurs, et parce que les hauteurs sont calculées dans la base des monômes remodelée (voir [DP1]), on trouve

$$H_a(I,D) \leq DH_g(I,D)\left(\max_{x\in S} h(x) + \frac{1}{2}\log(n+1)\right)$$

(le terme correctif vient de ce que les calculs utilisent des normes quadratiques à l'infini alors que $h(x)$ est défini avec un maximum). Enfin on a la majoration (voir [Ch])

$$H_g(I, D) \leq (\deg X)\binom{D + \dim X}{\dim X} \leq (\deg X)^{\dim X + 1}(n+2)^{\dim X}$$

et cela établit la borne de l'énoncé. $\square$

Remarque : la première partie de la démonstration est valable sous la condition plus faible $\deg Y > (\deg X)^2$ en utilisant $D = \deg X$. On fait intervenir un degré plus grand afin de pouvoir commodément minorer la fonction de Hilbert arithmétique.

On se replace à présent dans le cadre de la démonstration (par récurrence) du théorème 3.1. On dispose donc, pour tout Y de dimension au plus $\dim X - 1$, de la majoration $\mathrm{Card}(Y \setminus Z_Y) \cap \Gamma \leq f(r, \dim Y, \deg Y)$. En mettant à profit cette hypothèse pour remplir la condition du lemme, on déduit un résultat de la forme du théorème 3.5 dans lequel disparaît la hauteur de X remplacée par la hauteur d'un nombre suffisant de points de $(X \setminus Z_X) \cap \Gamma$.

Proposition 3.6 *On note* $M = f(r, \dim X - 1, (n+1)(\deg X)^2)$*. Si* $x_0, \ldots, x_M$ *sont des points distincts de* $(X \setminus Z_X) \cap \Gamma$ *alors*

$$\mathrm{Card}\left\{x \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma \mid |x - x_0| \geq \gamma \max_{1 \leq i \leq M} |x_i - x_0| + c_5\right\} \leq N$$

où

$$\gamma^2 = c_1(n+2)^{(\dim X)^3 + \dim X + 1}(\deg X)$$
$$c_5^2 = \gamma^2 \max(c_{\mathrm{NT}} + 3\log(n+1), h_1).$$

Démonstration : On applique le lemme au translaté $X - x_0$ et à l'ensemble de points $S = \{x_i - x_0 \mid 0 \leq i \leq M\}$. L'hypothèse de ce lemme est vérifiée pour la raison suivante : soit $Y \subset X - x_0$ avec $\dim Y = \dim X - 1$ et $S \subset Y(\bar{\mathbb{Q}})$; on pose $Y' = Y + x_0$ et ce sous-schéma vérifie $x_i \in (Y' \setminus Z_{Y'}) \cap \Gamma$ pour tout $0 \leq i \leq M$ (on a $Y' \subset X$ et donc $Z_{Y'} \subset Z_X$) ; par suite $M < f(r, \dim Y', \deg Y')$ et donc, vu la valeur de M, $\deg Y = \deg Y' > (n+1)(\deg X)^2$. On trouve donc

$$h(X - x_0) \leq (n+2)^{\dim X + 1}(\deg X)\left(\max_{1 \leq i \leq M} |x_i - x_0|^2 + c_{\mathrm{NT}} + 3\log(n+1)\right)$$

et par conséquent la constante c_3 associée à $X - x_0$ est majorée par

$$\gamma^2\left(\max_{1 \leq i \leq M} |x_i - x_0|^2 + \max(c_{\mathrm{NT}} + 3\log(n+1), h_1)\right).$$

Finalement comme $|x - x_0| \geq \gamma \max_{1 \leq i \leq M} |x_i - x_0| + c_5$ entraîne $|x - x_0|^2 \geq \gamma^2 \max_{1 \leq i \leq M} |x_i - x_0|^2 + c_5^2$ le résultat se déduit du théorème 3.5 appliqué lui aussi à $X - x_0$. $\square$

La proposition que nous venons d'établir assure que si $M+1$ points de $(X \setminus Z_X) \cap \Gamma$ sont contenus dans une boule de rayon R alors tous les points de $(X \setminus Z_X) \cap \Gamma$ sauf au plus N sont contenus dans une boule de rayon $\gamma R + c_5$. On peut interpréter ceci qualitativement comme un principe de concentration : si $M+1$ points sont très rapprochés alors c'est le cas de presque tous les points.

A présent, l'idée fondamentale repose sur un principe des tiroirs : on recouvre une boule donnée par des boules de rayon beaucoup plus petit et si la boule de départ contient suffisamment de points de $(X \setminus Z_X) \cap \Gamma$ alors l'une des petites boules en contient au moins $M+1$. Il est alors possible d'itérer le procédé pour aboutir à une boule de rayon $2c_5$. De manière précise on établit l'énoncé suivant, qui réduit le théorème 3.1 à un simple calcul.

Proposition 3.7 *Si*

$$\operatorname{Card}(X \setminus Z_X) \cap \Gamma > (4\gamma + 1)^r M + N$$

alors il existe $y \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma$ *tel que*

$$\operatorname{Card}\{x \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma \mid |x - y| \geq 2c_5\} \leq N.$$

Démonstration : Soit c le plus petit réel positif tel qu'il existe $y \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma$ avec

$$\operatorname{Card}\{x \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma \mid |x - y| \geq c\} \leq N.$$

On applique le lemme 6.1 (voir annexe) à l'image de $\{x \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma \mid |x - y| \leq c\}$ dans $\Gamma \otimes \mathbb{R}$. Ceci donne au plus $(4\gamma + 1)^r$ boules de rayon $c/2\gamma$ recouvrant cette image. Vu l'hypothèse, l'une d'entr'elles contient les images d'au moins $M+1$ points de $(X \setminus Z_X) \cap \Gamma$ (même si ces images ne sont pas nécessairement distinctes). Si l'on note $x_0, \ldots, x_M$ de tels points, en choisissant pour x_0 un point dont l'image est le centre de la boule considérée, on a $|x_i - x_0| \leq (c/2\gamma)$ pour tout $0 \leq i \leq M$. Par la proposition précédente, on obtient

$$\operatorname{Card}\{x \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma \mid |x - x_0| \geq (c/2) + c_5\} \leq N.$$

Ceci entraîne $c_5 + c/2 \geq c$ c'est-à-dire $c \leq 2c_5$ et l'on a bien le résultat. □

Par définition de Ω on a, si $y \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma$,

$$\operatorname{Card}\{x \in (X \setminus Z_X) \cap \Gamma \mid |x - y| \leq 2c_5\} \leq \Omega\left(r, \dim X, \deg X, \frac{4c_5^2}{\max(1, c_{\mathrm{NT}}, h_1)}\right)$$

car $(X \setminus Z_X) - y = (X - y) \setminus Z_{X-y}$ et $\deg X - y = \deg X$. Notons Θ le majorant ci-dessus. Pour conclure la démonstration du théorème 3.1, il reste à montrer que

$$\max\left((4\gamma + 1)^r M, \Theta\right) + N \leq f(r, \dim X, \deg X).$$

On a $M \leq \frac{1}{2} f(r, \dim X - 1, n^m (\deg X)^{m+1})$ et

$$N \leq \frac{1}{2} f(r, \dim X - 1, n^m (\deg X)^{m+1})(n \deg X)^{5m^2}(4\gamma + 1)^r.$$

Par suite la quantité à majorer est au plus

$$\max\left((n \deg X)^{5m^2}(4\gamma + 1)^r f(r, \dim X - 1, n^m (\deg X)^{m+1}), 2\Theta\right).$$

Or

$$\begin{aligned} n^4\gamma^2 &\leq n^{2(\dim X)^3 + 2\dim X + 6}(6m)^{2m^{3m^2+1}}(\deg X)^{m^{3m^2}+1} \\ &\leq n^{6m^{3m^2+1} + 2m^3}(\deg X)^{m^{3m^2}+1} \\ &\leq (n \deg X)^{m^{4m^2} - 10m^2} \end{aligned}$$

et l'on vérifie $4c_5^2 \leq n^4\gamma^2 \max(c_{\mathrm{NT}}, h_1, 1)$ de sorte que l'on obtient $\Theta \leq \Omega(r, m-1, \deg X, n^4\gamma^2)$. Avec $1 + 4\gamma \leq n^2\gamma \leq (n \deg X)^{\frac{1}{2}m^{4m^2} - 5m^2}$ on trouve comme majorant

$$\max\left((n \deg X)^{\frac{r}{2}m^{4m^2}} f(r, m-2, n^m (\deg X)^{m+1}),\right.$$

$$\left. 2\Omega(r, m-1, \deg X, (n \deg X)^{m^{4m^2}})\right).$$

Enfin $f(r, m-2, n^m (\deg X)^{m+1})$ vaut

$$(n \deg X)^{r(m+1)(m-1)^{4(m-1)^2}} \times$$
$$\Omega\left(r, m-2, n^m (\deg X)^{m+1}, (n \deg X)^{(m+1)(m-1)^{4(m-1)^2}}\right)$$

et l'on conclut par la formule

$$(m+1)(m-1)^{4(m-1)^2} \leq \frac{1}{2} m^{4m^2}$$

réunie à la propriété 2 de Ω.

c) Cas des courbes

On indique ici comment obtenir la seconde partie du théorème 2.1. On suit exactement la démonstration du théorème 3.1. Dans un premier temps, on se ramène de même à supposer $r \geq 1$ et X intègre de dimension 1. Dans ce cas, soit l'on a $Z_X = X$ et il est clair que $S = 1$ convient ; soit $Z_X = \emptyset$ et l'on choisira $S = \mathrm{Card}(X \cap \Gamma)$. Dans la suite on change seulement la valeur des constantes. En particulier on utilise le théorème 1.2 de [R2] qui donne $c_1 = 2^{10}\Lambda$, $c_2 = 2\Lambda^3$ et $c_3 = 2^{20}\Lambda^2 c_{\mathrm{NT}} + 2(n+1)\Lambda^{28/3}\max(h(X), \Lambda^{-1}h_1, n\log(n+1))$ où $\Lambda = \max((\deg X)^2, 2^{14}\deg X) \leq D^2$. On peut alors prendre $M = (n+1)D^2$, $N \leq D^3\Lambda(1+\sqrt{2^{13}\Lambda})^r$, $\gamma^2 = 2(n+1)\Lambda^{28/3}((n+1)D+1)$ et $c_5^2 = 2^{20}\Lambda^2 c_{\mathrm{NT}} + 2(n+1)\Lambda^{28/3}\max(((n+1)D+1)(c_{\mathrm{NT}} + 3\log(n+1)), \Lambda^{-1}h_1) \leq (1/4)(n+1)^2\Lambda^{10}\max(c_{\mathrm{NT}} + 3\log(n+1), h_1)$. Ceci permet d'obtenir

$$(4\gamma+1)^r M + N \leq (3(n+1)^2 D^{12})^r$$

et l'on en déduit le résultat *via* la proposition 3.7.

4 Nombre de translatés

Cette partie est dévolue à la preuve de la première partie du théorème 2.1. Avant de passer à sa démonstration proprement dite, on montre un résultat de décompte des sous-variétés abéliennes d'une variété abélienne donnée, qui est complètement indépendant du reste de notre travail.

a) Nombre de sous-variétés abéliennes de degré borné

L'objet de ce paragraphe est d'établir :

Proposition 4.1 *Soit A une variété abélienne de dimension g sur $\mathbb{C}$ munie d'un plongement $A \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. En posant $\eta = 4/\pi$, le nombre de sous-variétés abéliennes B de A vérifiant* $\dim B = h$ *et* $\deg B \leq \delta$ *est majoré par*

$$N(h,\delta) = \left(1 + 4\pi^{-g} g!(2g)! \max\left(\eta^g \deg(A), \eta^h\delta\right)^{2g+1}\right)^{4gh}.$$

On fera usage de résultats classiques de géométrie des nombres. Par commodité, on introduit la terminologie suivante pour un réseau Λ d'un espace euclidien $(V, \|\cdot\|)$ de dimension $n \in \mathbb{N}$. On appelle *ensemble minimal* de Λ par rapport à la structure euclidienne un n-uplet $u_1, \ldots, u_n$ d'éléments de Λ linéairement indépendants tels que, pour tout $x \in \Lambda$ et $1 \leq j_0 \leq n$, on a

$$\|x\| < \|u_{j_0}\| \Longrightarrow x \in \bigoplus_{j=1}^{j_0-1} \mathbb{Q}u_j.$$

On appelle base associée à cet ensemble minimal une base $v_1, \ldots, v_n$ de Λ telle que

$$\Lambda \cap \bigoplus_{j=1}^{j_0-1} \mathbb{Q}u_j = \bigoplus_{j=1}^{j_0-1} \mathbb{Z}v_j$$

pour $1 \leq j_0 \leq n$. On peut alors énoncer :

Proposition 4.2 *Soit Λ un réseau dans un espace euclidien $(V, \|\cdot\|)$ de dimension $n \in \mathbb{N}$. Il existe un ensemble minimal $u_1, \ldots, u_n$. Pour un tel ensemble, on a $\|u_j\| \leq \|u_{j+1}\|$ pour tout j et*

$$\prod_{j=1}^{n} \|u_j\| \leq \eta^{n/2}\Gamma(n/2+1)\mathrm{vol}(V/\Lambda)$$

et il existe une base associée vérifiant $\|u_j\| \leq \|v_j\| \leq \max(1, j/2)\|u_j\|$ pour tout j.

Démonstration : La première assertion découle du théorème de Minkowski : voir théorème V page 218 de [Ca]. La fonction distance utilisée est $\|\cdot\|$ et le volume de la boule unité est $\pi^{n/2}\Gamma(1+n/2)^{-1}$. La seconde assertion se déduit du lemme 8 page 135 de [Ca] (on vérifie dans la preuve que l'on choisit $v_j \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(u_1, \ldots, u_j)$). □

On se place à présent sous les hypothèses de la proposition 4.1. Le plongement donné définit une forme de Riemann sur le tore complexe correspondant à A et l'on travaille dans ce cadre. Dans la suite de ce paragraphe, le symbole i dénote exclusivement un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère donc un espace vectoriel complexe V de dimension g, $V_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent, Λ un réseau de $V_{\mathbb{R}}$ et $E\colon V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire alternée telle que

1. $E(ix, x) > 0$ pour tout $x \in V$,
2. $E(ix, iy) = E(x, y)$ pour tous $x, y \in V$ et
3. $E(x, y) \in \mathbb{Z}$ pour tous $x, y \in \Lambda$.

En particulier la forme bilinéaire définie par $(x, y) \mapsto E(ix, y)$ est un produit scalaire et l'on note $\|\cdot\|$ la norme associée. L'intégralité (3) nous servira seulement sous la forme suivante (l'orthogonalité est par rapport au produit scalaire).

Lemme 4.1 *Si $x, y \in \Lambda$ et $\|x\|\,\|y\| < 1$ alors $ix \perp y$.*

Démonstration : Si la conclusion est fausse $0 \neq E(x, y) \in \mathbb{Z}$ donc $1 \leq |E(x, y)| \leq \|ix\|\,\|y\| = \|x\|\,\|y\|$. □

On fixe encore un ensemble minimal $u_1, \ldots, u_{2g}$ de Λ par rapport à la structure euclidienne donnée par $\|\cdot\|$ ainsi qu'une base $v_1, \ldots, v_{2g}$ associée comme dans la proposition 4.2. On note $\|u_j\| = \mu_j$. Le produit des μ_j est donc majoré par $\eta^g g!\mathrm{vol}(V/\Lambda)$ et celui des $\|v_j\|$ par $2\pi^{-g} g!(2g)!\mathrm{vol}(V/\Lambda)$. D'après [BP, proposition 3] on a l'égalité $g!\mathrm{vol}(V/\Lambda) = \deg(A)$.

Lemme 4.2 *Avec les notations qui précèdent, pour* $1 \leq j \leq 2g$, *on a*

$$1 \leq \mu_j \mu_{2g+1-j} \leq \eta^g \deg(A).$$

Démonstration : Le pfaffien de la forme E dans la base des u_j étant non nul, il existe une involution sans points fixes σ de $\{1, \ldots, 2g\}$ telle que $E(u_j, u_{\sigma(j)}) \neq 0$ pour tout j (cela résulte par exemple de la formule de calcul du pfaffien donnée dans [Bk, §5, n° 2]). Par le lemme 4.1 on a $1 \leq \mu_j \mu_{\sigma(j)}$. On modifie ensuite σ de proche en proche en conservant cette propriété. On considère, s'il existe, le plus petit indice j tel que $\sigma(j) \neq 2g + 1 - j$. On définit σ' par $\sigma'(j') = \sigma(j')$ si $j' \notin \{j, 2g+1-j, \sigma(j), \sigma(2g+1-j)\}$ puis $\sigma'(j) = 2g+1-j$ et $\sigma'(\sigma(j)) = \sigma(2g+1-j)$. La propriété est conservée car le choix de j montre que $\sigma(j) < 2g + 1 - j$ d'où $\mu_{\sigma(j)} \leq \mu_{2g+1-j}$ puis $1 \leq \mu_j \mu_{\sigma(j)} \leq \mu_j \mu_{2g+1-j} = \mu_j \mu_{\sigma'(j)}$ et de même $\sigma(2g + 1 - j) > j$ d'où $1 \leq \mu_j \mu_{\sigma(j)} \leq \mu_{\sigma(2g+1-j)} \mu_{\sigma(j)}$. Lorsque le procédé s'arrête, on trouve bien $\mu_j \mu_{2g+1-j} \geq 1$ pour tout j et la majoration s'en déduit puisque l'on connaît la majoration pour le produit. □

A présent les sous-variétés abéliennes B auxquelles on s'intéresse correspondent aux sous-espaces vectoriels complexes W de V tels que $\dim_{\mathbb{C}} W = h$ et $\mathrm{vol}(W/W \cap \Lambda) \leq \delta/h!$ (ceci impose que $W \cap \Lambda$ est un réseau de W). Bien entendu ce qui précède s'applique à $W/W \cap \Lambda$ et ainsi si $w_1, \ldots, w_{2h}$ est un ensemble minimal de $W \cap \Lambda$ on a, pour $1 \leq k \leq 2h$,

$$1 \leq \|w_k\| \, \|w_{2h+1-k}\| \leq \eta^h \delta.$$

Pour dénombrer l'ensemble $\mathcal{W}$ des tels sous-espaces W on va construire une application injective de $\mathcal{W}$ dans un ensemble de matrices. Pour commencer on fixe pour chaque $W \in \mathcal{W}$ un ensemble minimal comme ci-dessus et l'on définit une première matrice en écrivant

$$w_k = \sum_{j=1}^{2g} \lambda_j^{(k)} v_j \qquad \left(\lambda_j^{(k)} \in \mathbb{Z}\right).$$

La remarque préliminaire sur cette matrice est la suivante :

$$\begin{aligned}
\left|\lambda_j^{(k)}\right| \mathrm{vol}(V/\Lambda) &= \left\|\lambda_j^{(k)} v_1 \wedge \cdots \wedge v_{2g}\right\| \\
&= \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge w_k \wedge v_{j+1} \wedge \cdots \wedge v_{2g}\| \\
&\leq \frac{\|w_k\|}{\|v_j\|} \prod_{j'=1}^{2g} \|v_{j'}\| \\
&\leq 2\pi^{-g} g!(2g)! \frac{\|w_k\|}{\mu_j} \mathrm{vol}(V/\Lambda).
\end{aligned}$$

Ceci fournit donc une majoration pour les $\lambda_j^{(k)}$ mais elle n'est pas satisfaisante au sens où l'on ne peut pas minorer μ_j en fonction seulement de g et $\deg(A)$ (il faut faire intervenir un terme de hauteur). Pour contourner cette difficulté, on partitionne l'ensemble $\{1, \ldots, 2g\}$ en sous-ensembles où les μ_j ont des tailles comparables.

Dans ce qui suit on note $\mathcal{D} = \max(\eta^g \deg(A), \eta^h \delta)$. On introduit un entier $s \geq 0$ et un s-uplet $j_1, \ldots, j_s$ avec $j_l < j_{l+1}$ $(0 \leq l \leq s-1)$ de sorte que

$$\{j_1, \ldots, j_s\} = \{1 \leq j \leq g \mid \mu_{j+1} > \mathcal{D}\mu_j\}.$$

On étend les notations par $j_0 = 0$ et $j_{s+1} = 2g - j_s$.

Lemme 4.3 *Pour tout $l \leq s$ les vecteurs $v_1, \ldots, v_{2g-j_l}, iv_1, \ldots, iv_{j_l}$ forment une base de $V_{\mathbb{R}}$. On notera φ_l la projection*

$$V_{\mathbb{R}} \longrightarrow V_{\mathbb{R}}/\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, \ldots, v_{2g-j_l}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(iv_1, \ldots, iv_{j_l}).$$

Démonstration : Puisque seuls interviennent dans l'énoncé des espaces de la forme $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, \ldots, v_j)$, il suffit de prouver la même chose où l'on remplace v_j par u_j. Si $j \leq j_l$ et $j' \leq 2g - j_l$ on a $\|u_j\|\,\|u_{j'}\| \leq \mu_{j_l}\mu_{2g-j_l} < \mathcal{D}^{-1}\mu_{j_l+1}\mu_{2g-j_l} \leq 1$ donc $iu_j \perp u_{j'}$ par le lemme 4.1 et la conclusion est claire. $\square$

Lorsque $w_1, \ldots, w_{2h}$ sont donnés comme plus haut, on leur associe des entiers $k_0, \ldots, k_{s+1}$ par $k_0 = 0$, $k_{s+1} = 2h - k_s$ et, si $1 \leq l \leq s$, k_l est le plus grand entier tel que

$$\{w_1, \ldots, w_k\} \subset \bigoplus_{j=1}^{j_l} \mathbb{Z}v_j.$$

Les propriétés utiles de ces entiers sont résumées par le

Lemme 4.4 *Dans ce cadre, on a, pour $0 \leq l \leq s$,*

$$\varphi_l(W_{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{k=1}^{k_l} \mathbb{R}iw_k \qquad \textit{et (si } k_l > 0\textit{)} \qquad \|w_{k_l}\| \leq \mathcal{D}\mu_{j_l}.$$

De plus $k_s \leq h$,

$$\{w_1, \ldots, w_{k_s+1}\} \subset \bigoplus_{j=1}^{j_{s+1}} \mathbb{Z}v_j \subset \mathrm{Ker}\varphi_s \qquad \textit{et} \qquad \|w_{k_{s+1}}\| \leq \frac{\mathcal{D}}{\mu_{j_s+1}}.$$

Démonstration : Si $l \leq s$ on a par définition de k_l (et minimalité de $u_1, \ldots, u_{2g}$) l'inégalité $\|w_{k_l+1}\| \geq \mu_{j_l+1}$ donc

$$\|w_{2h-k_l}\| \leq \frac{\mathcal{D}}{\|w_{k_l+1}\|} \leq \frac{\mathcal{D}}{\mu_{j_l+1}} < \frac{1}{\mu_{j_l}} \leq \mu_{2g+1-j_l}$$

et cela entraîne, par minimalité encore,

$$\{w_1, \ldots, w_{2h-k_l}\} \subset \bigoplus_{j=1}^{2g-j_l} \mathbb{Z}v_j \subset \mathrm{Ker}\varphi_l$$

(pour $l = s$ ceci prouve l'avant-dernière assertion de l'énoncé tandis que la dernière est donnée par les deux premières inégalités de la formule précédente). On en déduit que $\varphi_l(W_{\mathbb{R}})$ est engendré par $\varphi_l(w_{2h+1-k_l}), \ldots, \varphi_l(w_{2h})$. Comme par ailleurs cet espace contient les vecteurs $\varphi_l(iw_k) = iw_k$ pour $1 \leq k \leq k_l$ qui forment une famille libre, on a par dimension

$$\varphi_l(W_{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{k=1}^{k_l} \mathbb{R}iw_k = \bigoplus_{k=1}^{k_l} \mathbb{R}\varphi_l(w_{2h+1-k}).$$

En particulier, $\varphi_l(w_{2h+1-k_l}) \neq 0$ donc, toujours par minimalité de $u_1, \ldots, u_{2g}$, on a $\|w_{2h+1-k_l}\| \geq \mu_{2g+1-j_l}$ et, par suite,

$$\|w_{k_l}\| \leq \frac{\mathcal{D}}{\|w_{2h+1-k_l}\|} \leq \frac{\mathcal{D}}{\mu_{2g+1-j_l}} \leq \mathcal{D}\mu_{j_l}.$$

Enfin $j_s \leq g$ donne

$$\{w_1, \ldots, w_{k_s}\} \subset \bigoplus_{j=1}^{j_s} \mathbb{Z}v_j \subset \bigoplus_{j=1}^{2g-j_s} \mathbb{Z}v_j \subset \mathrm{Ker}\varphi_s$$

de sorte que $\varphi_s(w_{2h+1-k_s}) \neq 0$ implique $2h+1-k_s > k_s$ soit effectivement $k_s \leq h$. □

Notre résultat de décompte sera basé sur la

Proposition 4.3 *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &\longrightarrow \mathcal{M}_{2h\times 2g}(\mathbb{Z}) \\ W &\longmapsto M_W = (m_{k,j}), \end{aligned}$$

définie par $m_{k,j} = \lambda_j^{(k)}$ *s'il existe* l, $0 \leq l \leq s$ *avec* $j_l < j \leq j_{l+1}$ *et* $k_l < k \leq k_{l+1}$ *et* $m_{k,j} = 0$ *sinon, est injective.*

Démonstration : On fixe $W, W' \in \mathcal{W}$ tels que $M_W = M_{W'}$. On note w'_k les éléments de l'ensemble minimal choisi de W' et k'_l les entiers associés. Montrons d'abord que $k'_l = k_l$ pour tout $0 \leq l \leq s+1$. Il suffit de le voir pour $1 \leq l \leq s$; en supposant par exemple $k_l < k'_l$ pour un tel l, on constate que la ligne d'indice $k_l + 1$ de $M_W = M_{W'}$ est nulle (puisque les ensembles $\{j_{l''}+1, \ldots, j_{l''+1}\}$ pour différents l'' sont disjoints). Cela étant, on peut remplacer l par le plus grand indice l' tel que $k_l = k_{l'}$. De la sorte $k_l < k_l + 1 \leq k_{l+1}$ (et on a $l \leq s$ car $k_l < h$). La nullité de la ligne citée donne donc $\lambda_j^{(k_l+1)} = 0$ pour $j > j_l$ et donc $w_{k_l+1} \in \bigoplus_{j=1}^{j_l} \mathbb{Z}v_j$ en contradiction avec la définition de k_l.

On considère ensuite, s'il existe, le plus petit entier $\kappa \leq k_{s+1}$ tel que

$$\bigoplus_{k=1}^{\kappa} \mathbb{R}w_k \neq \bigoplus_{k=1}^{\kappa} \mathbb{R}w'_k.$$

Notons l l'unique entier tel que $k_l < \kappa \leq k_{l+1}$. L'hypothèse $M_W = M_{W'}$ montre que $w_\kappa - w'_\kappa \in \bigoplus_{j=1}^{j_l} \mathbb{Z}v_j$ (on savait déjà $w_\kappa, w'_\kappa \in \bigoplus_{j=1}^{j_{l+1}} \mathbb{Z}v_j$) donc $i(w_\kappa - w'_\kappa) \in \mathrm{Im}\varphi_l$. Comme $i(w_\kappa - w'_\kappa) = \varphi_l(iw_\kappa - iw'_\kappa) = \varphi_l(iw_\kappa) - \varphi_l(iw'_\kappa) \in \varphi_l(W_\mathbb{R}) + \varphi_l(W'_\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}_\mathbb{R}(iw_1, \ldots, iw_{k_l}, iw'_1, \ldots, iw'_{k_l})$. Par le choix de $\kappa > k_l$ ce dernier espace coïncide avec $\bigoplus_{k=1}^{k_l} \mathbb{R}iw_k$ et l'on tire

$$iw'_\kappa \in \mathbb{R}iw_\kappa \oplus \bigoplus_{k=1}^{k_l} \mathbb{R}iw_k$$

qui donne une contradiction en divisant par i. On a ainsi (puisque l'on ne peut pas trouver κ)

$$\bigoplus_{k=1}^{2h-k_s} \mathbb{R}w_k = \bigoplus_{k=1}^{2h-k_s} \mathbb{R}w'_k \subset \mathrm{Ker}\varphi_s \qquad \text{et} \qquad \bigoplus_{k=1}^{k_s} \mathbb{R}iw_k = \bigoplus_{k=1}^{k_s} \mathbb{R}iw'_k \subset \mathrm{Im}\varphi_s$$

et en sommant $W = W'$. □

Avec cette matrice restreinte on obtient maintenant une majoration des coefficients indépendante des valeurs des μ_j.

Lemme 4.5 *Pour $W \in \mathcal{W}$ les coefficients de M_W vérifient*

$$|m_{k,j}| \leq 2\pi^{-g} g!(2g)!\mathcal{D}^{2g+1}.$$

Démonstration : On fixe $0 \leq l \leq s$, $j_l < j \leq j_{l+1}$ et $k_l < k \leq k_{l+1}$. Puisque les seuls $m_{k,j}$ non nuls sont égaux à $\lambda_j^{(k)}$ pour de tels indices et compte tenu de la majoration vue pour $|\lambda_j^{(k)}|$ il suffit de prouver $\|w_k\| \leq \mathcal{D}^{2g+1}\mu_j$. Par conséquent il est suffisant d'établir $\|w_{k_{l+1}}\| \leq \mathcal{D}^{2g+1}\mu_{j_l+1}$ pour tout l, $0 \leq l \leq s$, tel que $k_{l+1} > 0$. Si $l < s$ on déduit du lemme 4.4

$$\|w_{k_{l+1}}\| \leq \mathcal{D}\mu_{j_{l+1}} = \mathcal{D}\mu_{j_l+1} \prod_{j=j_l+1}^{j_{l+1}-1} \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} \leq \mathcal{D}^{j_{l+1}-j_l}\mu_{j_l+1}$$

ce qui conclut avec $j_{l+1} - j_l \leq g$. Pour traiter le cas $l = s$ on écrit

$$\mu_{j_s+1} = \mu_{g+1} \prod_{j=j_s+1}^{g} \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \geq \mu_{g+1}\mathcal{D}^{-g+j_s} \geq \mathcal{D}^{-g}$$

car $\mu_{g+1}\mu_g \geq 1$ donne $\mu_{g+1} \geq 1$. Alors, grâce au lemme 4.4,

$$\|w_{k_{s+1}}\| \leq \frac{\mathcal{D}}{\mu_{j_s+1}} = \mathcal{D}\mu_{j_s+1}\frac{1}{\mu_{j_s+1}^2} \leq \mathcal{D}^{2g+1}\mu_{j_s+1}.$$

□

En estimant simplement le cardinal de l'ensemble de matrices introduit on a

$$\mathrm{Card}\,\mathcal{W} \leq \left(1 + 4\pi^{-g} g!(2g)!\mathcal{D}^{2g+1}\right)^{4gh}.$$

b) Quotients et isogénies

On démontre à présent la première partie du théorème 2.1. De la même façon que pour le théorème 3.1 il suffit de montrer l'énoncé si X est intègre et de dimension au moins 1.

On commence par un lemme qui permet de contrôler le nombre que l'on cherche à l'aide d'ensembles de la forme $X \setminus Z_X$ dans certains quotients de A.

Lorsque B est une sous-variété abélienne de A donnée, nous noterons $(X : B) = \{x \in A \mid x + B \subset X\}$ puis $Y_B = (X : B)/B$ et l'on choisit un système de représentants E_B des points de $X \cap \Gamma$ dont l'image appartient à $Y_B \setminus Z_{Y_B}$. Enfin on désignera par la suite par Γ_B l'image $\Gamma + B/B$ de Γ dans A/B.

Lemme 4.6 *Avec ces notations, on a $x + B \subset X$ si $x \in E_B$ et*

$$X \cap \Gamma = \bigcup_B \bigcup_{x \in E_B} (x + B) \cap \Gamma$$

où B parcourt les sous-variétés abéliennes de A qui satisfont l'inégalité $\deg B \leq (\deg X)^{(m+1-\dim B)^2/4}$.

Démonstration : Soit $x \in X \cap \Gamma$. On considère B une sous-variété abélienne de A telle que $x + B \subset X$ et qui soit maximale pour cette propriété. On choisit V une composante irréductible de $(X : B)$ contenant x. On a bien sûr $B \subset \mathrm{Stab}(V)$ donc $x + B \subset x + \mathrm{Stab}^0(V) \subset X$ ce qui entraîne par maximalité que $\mathrm{Stab}^0(V) = B$. Si l'image y de x appartenait à Z_{Y_B}, il existerait une sous-variété abélienne non nulle B' de A/B avec $y + B' \subset Y_B$; ce B' s'écrirait B''/B et donc on aurait $x + B'' \subset (X : B) \subset X$ de nouveau au mépris de la maximalité de B. Ainsi $y \in Y_B \setminus Z_{Y_B}$ donc il existe $x' \in E_B$ avec $x \in x + B = x' + B$. Pour conclure il reste à majorer le degré de B. Comme V et B sont respectivement composantes de

$$(X : B) = \bigcap_{b \in B} X - b \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Stab}(V) = \bigcap_{v \in V} V - v$$

on a

$$\deg V \leq (\deg X)^{\dim X - \dim V + 1} \qquad \text{et} \qquad \deg B \leq (\deg V)^{\dim V - \dim B + 1}.$$

On obtient la conclusion en remarquant que le maximum pour $z \in \mathbb{R}$ de $(\dim X - z + 1)(z - \dim B + 1)$ est égal à $(\dim X - \dim B + 2)^2/4$. □

Le résultat suivant montre comment on peut remplacer le quotient A/B par une variété abélienne isogène.

Lemme 4.7 *Soit B une sous-variété abélienne de A et l'on suppose donnée une isogénie $\phi\colon A/B \to B'$. Alors pour tout sous-schéma fermé intègre V de A vérifiant $B \subset \mathrm{Stab}(V)$ on définit d'une part $V' = \phi(V/B)$, $\Gamma' = \phi(\Gamma_B)$ et d'autre part W comme l'intersection de V avec la réunion des composantes distinctes de V de l'image réciproque dans A de $(V/B) + \mathrm{Ker}(\phi)$. Dans ces conditions on a $B \subset \mathrm{Stab}(W)$, $\dim W < \dim V$ et*

$$\mathrm{Card}(V/B \setminus Z_{V/B}) \cap \Gamma_B \leq (\deg \phi) \mathrm{Card}(V' \setminus Z_{V'}) \cap \Gamma' + \mathrm{Card}(W/B \setminus Z_{W/B}) \cap \Gamma_B.$$

Démonstration : Les deux premières assertions sont claires sur la définition de W. Pour la troisième, on écrit

$$(V/B \setminus Z_{V/B}) \cap \Gamma_B \subset \phi^{-1}((V' \setminus Z_{V'}) \cap \Gamma') \cup ((V/B \setminus Z_{V/B}) \cap \Gamma_B \cap \phi^{-1}(Z_{V'})).$$

Le premier ensemble à droite a $(\deg \phi)\mathrm{Card}(V' \setminus Z_{V'}) \cap \Gamma'$ éléments. Montrons que le second est inclus dans $(W/B \setminus Z_{W/B}) \cap \Gamma_B$. Soit donc x un de ses éléments. Puisque $\phi(x) \in Z_{V'}$ il existe une sous-variété abélienne non nulle de B', disons B'', telle que $\phi(x) + B'' \subset V'$. On peut écrire B'' comme l'image par ϕ d'une sous-variété abélienne non nulle de A/B, soit $B'' = \phi(\tilde{B})$, de sorte que l'on trouve $x + \tilde{B} \subset \phi^{-1}(V') = (V/B) + \mathrm{Ker}(\phi)$. Attendu que $x \notin Z_{V/B}$, le translaté $x + \tilde{B}$ ne peut pas être contenu dans V/B. Par suite il est inclus dans une composante distincte de V/B de $V/B + \mathrm{Ker}(\phi)$. On en déduit $x \in W/B$ et cela donne la conclusion car $x \notin Z_{W/B} \subset Z_{V/B}$. □

En choisissant une isogénie dont le but est une sous-variété abélienne de A on peut utiliser tels quels les résultats de la partie précédente et déduire par une récurrence le

Corollaire 4.1 *Pour toute sous-variété abélienne B de A distincte de A et tout sous-schéma fermé V de A avec $B \subset \mathrm{Stab}(V)$ on a*

$$\mathrm{Card}(V/B \setminus Z_{V/B}) \cap \Gamma_B \leq 2\delta^{4(g-h)-2} f(r, \dim V - h, ng!\delta^{4(g-h)-2} \deg V)$$

où $h = \dim B$ et $\delta = \deg B$.

Démonstration : Le but est ici de majorer la fonction

$$f'(e, D) = \max\{\mathrm{Card}(V/B \setminus Z_{V/B}) \cap \Gamma_B \mid \dim V/B = e,\ \deg V \leq D\}.$$

Si $h = 0$ on a $f'(e, D) \leq f(r, e, D)$ tandis que $f'(g - h, D) = 0$. On suppose donc $e < g - h < g$. Dans un premier temps, le lemme va nous donner une formule de récurrence. Pour cela considérons une sous-variété abélienne B' de A avec $B + B' = A$ et $B \cap B'$ fini. Dans ces conditions, la composée $B' \hookrightarrow A \to A/B$ est une isogénie ψ et si l'on note $N = \deg \psi$ il existe une isogénie $\phi\colon A/B \to B'$ avec $\phi \circ \psi = [N]$ (multiplication par N de B'). Alors dans le cadre du lemme on a $\deg W \leq (\deg \phi)(\deg V)^2$ et $V' = \phi(V/B) = \phi(\psi(\psi^{-1}(V/B))) = [N](V \cap B')$ donc

$$\deg V' \leq N^{2\dim(V/B)}(\deg B')(\deg V).$$

A présent, si V est un sous-schéma quelconque vérifiant $B \subset \operatorname{Stab}(V)$ on applique le lemme à chacune de ses composantes de dimension maximale. En majorant les différents termes $\operatorname{Card}(V' \setminus Z_{V'}) \cap \Gamma'$ qui apparaissent par le théorème 3.1 et en regroupant les W avec les composantes de dimension inférieure de V (le tout ayant un degré au plus $(\deg \phi)(\deg V)^2$) on trouve

$$f'(e, D) \leq (\deg \phi) f(r, e, N^{2e}(\deg B')D) + f'(e - 1, (\deg \phi)D^2)$$

puisque $\operatorname{rang} \Gamma' \leq r$. Par récurrence cette formule donne

$$f'(e, D) \leq (\deg \phi) \sum_{d=0}^{e} f\left(r, d, N^{2d}(\deg B')(\deg \phi)^{2^{e-d}-1} D^{2^{e-d}}\right).$$

D'après les définitions $\deg \phi = N^{2\dim B'-1}$. Pour estimer $N = \operatorname{Card}(B \cap B')$ et $\deg B'$ on utilise le théorème 3 de [Be] qui fixe un choix de B'. Des formules de cet énoncé, on déduit $N \leq (\deg B)^2$ et $\deg B' \leq (n + 1)(g - h)! \deg B$ car, lorsque $\mathcal{L}$ est très ample, le degré de la polarisation associée vaut $(\dim_{\bar{\mathbb{Q}}} \Gamma(A, \mathcal{L}))^2$ et ici $\dim_{\bar{\mathbb{Q}}} \Gamma(A, \mathcal{L}) \leq \dim_{\bar{\mathbb{Q}}} \Gamma(\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}(1)) = n + 1$. Comme $h \neq 0$ on peut écrire $\deg B' \leq ng!\delta$. Ainsi

$$f'(e, D) \leq \delta^{4(g-h)-2} \sum_{d=0}^{e} f\Big(r, d, ng!(\delta^{4(g-h)-2}D)^{2^{e-d}}\Big)$$

avec $4d + 1 \leq 4(e + 1) - 2 \leq 4(g - h) - 2$. Par la formule $f(r, d, D^2) \leq f(r, d + 1, D)$ et la croissance de $f(r, d, D)/D$ on tire

$$f'(e, D) \leq \delta^{4(g-h)-2} f(r, e, ng!\delta^{4(g-h)-2}D) \sum_{d=0}^{e} (ng!)^{2^{d-e}-1}.$$

On conclut en majorant cette dernière somme par $1 + e/\sqrt{ng!} \leq 2$ car $ng! \geq e^2$. □

Démonstration de la première partie du théorème 2.1 : Dans un premier temps, B étant fixée, on majore le cardinal de E_B. On note $h = \dim B$, $\delta = \deg B$ et $\mathcal{V}$ l'ensemble des composantes de $(X : B)$. En écrivant comme plus haut $(X : B) = \bigcap_{b\in B} X - b$ on a $\sum_{V\in\mathcal{V}}(\deg V)(\deg X)^{\dim V} \leq (\deg X)^m$. On en déduit

$$\begin{aligned}\mathrm{Card} E_B &\leq \sum_{V\in\mathcal{V}} \mathrm{Card}(V/B \setminus Z_{V/B}) \cap \Gamma_B \\ &\leq 2\delta^{4g-2} \max_{h\leq e\leq \dim X} f\big(r, e-h, ng!\delta^{4g-2}(\deg X)^{m-e}\big)\end{aligned}$$

(on utilise la croissance de $f(r, e, D)/D$). Avec $f(r, d, D^2) \leq f(r, d+1, D)$ il est facile de voir que le maximum est atteint pour $e = \dim X$. Ainsi, grâce à la proposition 4.1 (pour le décompte des sous-variétés abéliennes on peut étendre les scalaires à $\mathbb{C}$) et au lemme 4.6 qui permet de majorer δ par $\Delta = (\deg X)^{(m+1)^2/4}$, le théorème est vrai avec

$$\begin{aligned}S &\leq \sum_{h=0}^{\dim X} N(h, \Delta) 2\Delta^{4g-2} f(r, \dim X - h, ng!\Delta^{4g}) \\ &\leq 2N(\dim X, \Delta)\Delta^{4g-2} f(r, \dim X, ng!\Delta^{4g}) \sum_{h=0}^{\dim X} (ng!)^{2^{h-\dim X}-1} \\ &\leq N(\dim X, \Delta)\Delta^{4g} f(r, \dim X, ng!\Delta^{4g})\end{aligned}$$

en utilisant $\deg X \geq 2$ (X n'est pas une variété linéaire). Pour conclure on majore (puisque $\deg A \leq (n+1)g! \leq n\Delta g!$)

$$1 + 4\pi^{-g} g!(2g)! \max(\eta^g \deg A, \eta^h \Delta)^{2g+1} \leq (g^g n\Delta)^{2g+1}$$

et donc $N(\dim X, \Delta)\Delta^{4g} \leq (g^g n\Delta)^{4g \dim X(2g+1)+4g} \leq (g^g n\Delta)^{8g(g+1)\dim X}$.
□

5 Points algébriques

L'inégalité de Vojta donne un résultat de répartition des points algébriques hors de Z_X : si l'on note V l'espace vectoriel $A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $\mathrm{CT}(x, c_1', c_3')$ pour des réels c_1', c_3' et $x \in V$ le cône tronqué

$$\{y \in V \mid <x, y> \geq (1 - 1/c_1')|x||y| \text{ et } |y|^2 \geq c_3'\},$$

le théorème de [R2] montre qu'il existe c_1' et c_3' de sorte que l'ensemble

$$(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathrm{CT}(x, c_1', c_3')$$

est fini pour tout $x \in V$. Dans le cas des courbes l'inégalité de Mumford originale implique alors une borne uniforme pour le cardinal de cet ensemble. On décrit à présent la situation en dimension supérieure.

a) Obstruction à l'inégalité de Mumford

Le but de ce paragraphe est d'établir qu'il n'y a pas en général d'inégalité de Mumford pour les points algébriques, c'est-à-dire que, contrairement à ce qui est le cas pour les courbes, on ne peut pas espérer de résultat de la forme du théorème 3.2 pour $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}})$ au lieu de $(X \setminus Z_X) \cap \Gamma$. En effet, si un tel énoncé (avec des constantes quelconques) était vrai, le raisonnement qui conduit au théorème 3.5 implique que, pour certaines constantes c_1' et c_3', le cardinal de l'ensemble

$$(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathrm{CT}(x, c_1', c_3')$$

serait borné indépendamment de $x \in V$.

Cette uniformité est impossible lorsque X contient une somme de courbes. Lorsque C et C' sont deux courbes contenues dans A l'écriture $C + C'$ désigne $\{x + y \mid x \in C,\ y \in C'\}$. On a alors :

Proposition 5.1 *On suppose qu'il existe deux courbes C et C' tracées sur A telles que $C + C' \subset X$ mais $C + C' \not\subset Z_X$. Alors pour tout couple de réels c_1' et c_3'*

$$\sup_{x \in V} \operatorname{Card} \mathrm{CT}(x, c_1', c_3') \cap (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) = \infty.$$

Démonstration : Un entier N étant fixé, on choisit $\rho > 0$ de sorte $\operatorname{Card}\{x \in C(\bar{\mathbb{Q}}) \mid |x| \leq \rho\} \geq N$. On peut ensuite trouver R assez grand tel que pour tout $x \in V$ avec $|x| \geq R$ la boule de centre x et de rayon R soit incluse dans $\mathrm{CT}(x, c_1', c_3')$. Ainsi en choisissant simplement $x' \in C'(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que $|x'| \geq R$ on trouve au moins N points de $X(\bar{\mathbb{Q}})$ (de la forme $x' + x$ avec $x \in C(\bar{\mathbb{Q}})$) dans l'ensemble $\mathrm{CT}(x', c_1', c_3')$. Ceci établit l'énoncé si $Z_X \cap (C + C') = \emptyset$. Sinon on remarque d'abord que C et C' sont de genre au moins 2 (sinon $C + C' \subset Z_X$) donc $\mathrm{Stab}(C')$ est fini. Ainsi il existe un nombre fini (disons N_1) de points x de C tels que $x + C' \subset Z_X$ puisque $Y = (C + C') \cap Z_X$ est de dimension 1. Il y a donc des points distincts $x_1, \ldots, x_{N-N_1}$ de $C(\bar{\mathbb{Q}})$ tels que $|x_i| \leq \rho$ et $x_i + C' \not\subset Z_X$. Par suite $\bigcup_{i=1}^{N-N_1} C' \cap (Z_X - x_i) = \bigcup_{i=1}^{N-N_1} C' \cap (Y - x_i)$ est fini de sorte que l'on peut choisir $x' \in C'(\bar{\mathbb{Q}})$ ($|x'| \geq R$) en dehors de cet ensemble. Finalement $x' + x_i \in \mathrm{CT}(x', c_1', c_3')$ et $x' + x_i \in (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}})$ pour tout i et l'on en déduit l'énoncé. □

b) Inégalité de Mumford restreinte

On peut cependant obtenir un résultat généralisant le cas des courbes si l'on exclut les points concernés par l'obstruction ci-dessus. Ainsi on note

$$\hat{Z} = \bigcup_{C + C' \subset X} (C + C')(\bar{\mathbb{Q}})$$

où C et C' sont des courbes tracées sur A. Remarquons que l'on obtiendrait le même ensemble de points en considérant les couples W, W' de variétés de dimensions non nulles tels que $W + W' \subset X$. D'autre part on a aussi $Z_X(\bar{\mathbb{Q}}) \subset \hat{Z}$.

L'inégalité de Mumford est alors

Théorème 5.2 *Soit $x \in X(\bar{\mathbb{Q}})$. Si c_1 et c_4 sont deux réels > 0 qui vérifient*

$$\left(\frac{(2\deg X)^{-m}}{\dim X} - \frac{1}{2c_4^2} - \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1c_4}\right)|x|^2$$

$$\geq h(X) + \frac{1}{4}h_1 + c_{\mathrm{NT}} + m\log(\deg X)(n+1)$$

il existe au plus

$$(\deg X)^{2\dim X+1}$$

points $y \in X(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus \hat{Z}$ tels que

$$< x, y > \geq (1 - 1/c_1)|x||y|$$
$$\big||x| - |y|\big| \leq \frac{1}{c_4}|x|.$$

Démonstration : On s'appuie encore sur deux résultats auxiliaires : la proposition 3.4 s'applique telle quelle ; pour la proposition 3.3, on suit exactement la démonstration donnée jusqu'à

$$S \subset \bigcup_{e=0}^{\dim X-1} V_e(\bar{\mathbb{Q}}).$$

La remarque est ici que si $e \geq 1$ on a $V_e(\bar{\mathbb{Q}}) \subset \hat{Z}$ car une composante fixée V' de V_e est incluse dans $\bigcap_{c\in C_j}(X - c)$ pour un j donné donc $V' + C_j \subset X$ ce qui entraîne (avec $0 \in C_j$) $V'(\bar{\mathbb{Q}}) \subset (V' + C_j)(\bar{\mathbb{Q}}) \subset \hat{Z}$. Ainsi on peut conclure la démonstration par $S \subset V_0(\bar{\mathbb{Q}})$ et donc $\mathrm{Card}(S) \leq \mathrm{Card}\, V_0(\bar{\mathbb{Q}}) \leq (\deg X)^{2m-1}$. □

En lisant ce théorème comme un résultat d'espacement des points dans un cône tronqué : plus de $(\deg X)^{2\dim X+1}$ points ne peuvent pas être concentrés dans une boule de la forme $B(x, |x|/c_4)$, on le combine avec l'inégalité de Vojta pour obtenir

Corollaire 5.1 *Pour tout $x \in V$*

$$\mathrm{Card}(X(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus \hat{Z}) \cap \mathrm{CT}(x, 4c_1, c_3) \leq m^{5m^2}(\deg X)^{3m}.$$

Démonstration : On procède comme dans la démonstration du théorème 3.5 en remarquant que dans $\mathrm{CT}(x, 4c_1, c_3)$ deux points quelconques y et y' vérifient $< y, y' > \geq (1-1/c_1)|y||y'|$. On obtient alors la même borne à ceci près que k est remplacé par $(\deg X)^{2m-1}$ de sorte que $m^{5m^2}(\deg X)^m k \leq m^{5m^2}(\deg X)^{3m}$ donne le résultat. □

Enfin, en faisant intervenir, dans un espace de dimension finie, le corollaire 6.1, on déduit

Corollaire 5.2 *Avec les constantes c_1 et c_3 définies plus haut, pour tout sous-groupe Γ de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ de rang fini r, il y a au plus c_1^r points x de $\Gamma \cap (X(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus \hat{Z})$ qui vérifient $|x|^2 \geq c_3$.*

Démonstration : D'après ce qui précède, on conclut par la majoration

$$m^{5m^2}(\deg X)^{3m}(1+\sqrt{8c_1})^r \leq c_1^r$$

si $r \neq 0$ (sinon tout point de Γ satisfait $|x| = 0$). □

Cet énoncé est particulièrement utile pour les variétés qui vérifient $\hat{Z} = \emptyset$ (comme les courbes de genre au moins 2). On notera aussi que cette condition est celle qui apparaît dans le théorème principal de [HP].

6 Annexe

On donne d'abord deux résultats élémentaires de géométrie euclidienne (dans l'énoncé desquels $[\cdot]$ est la partie entière).

Lemme 6.1 *Soient r un entier et ρ un réel positif. On considère une partie S de $\mathbb{R}^r$ incluse dans une boule (euclidienne) de rayon ρ. Pour un réel $\gamma \geq 1$, on peut trouver*

$$[(2\gamma+1)^r]$$

boules de rayon ρ/γ, centrées en des points de S et dont l'union contient S.

Démonstration : On note $B(x, R)$ la boule de centre $x \in \mathbb{R}^r$ et de rayon $R > 0$. On choisit des points $x_0, x_1, \ldots$ de S (tant que possible) de sorte que

$$x_i \notin \bigcup_{j<i} B(x_j, \rho/\gamma).$$

Si l'on a pu construire $x_0, \ldots, x_{N-1}$ ainsi, la condition entraîne que $|x_i - x_j| > \rho/\gamma$ donc les N boules $B(x_i, \rho/2\gamma)$ sont disjointes. Comme elles sont incluses dans $B(y, \rho+\rho/2\gamma)$ (où y est tel que $S \subset B(y, \rho)$) on a

$$N\mathrm{vol}(B(0, \rho/2\gamma)) = \mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=0}^{N-1} B(x_i, \rho/2\gamma)\right) \leq \mathrm{vol}(B(0, \rho+\rho/2\gamma))$$

puis, parce que $\mathrm{vol}(B(0,R)) = R^r \mathrm{vol}(B(0,1))$ pour tout $R > 0$, on trouve

$$N \leq (2\gamma + 1)^r.$$

Ainsi le procédé décrit s'arrête et il est clair qu'alors

$$S \subset \bigcup_{i=0}^{N-1} B(x_i, \rho/\gamma)$$

puisque l'on ne peut plus choisir $x_N \in S$ hors de cette union. □

Corollaire 6.1 *Soient r un entier et c_1 un réel > 0. On peut recouvrir $\mathbb{R}^r$ par*

$$[(1 + \sqrt{8c_1})^r]$$

ensembles dans chacun desquels deux points quelconques vérifient

$$< x, y > \geq (1 - 1/c_1)|x||y|.$$

Démonstration : On pose $\varphi = \frac{1}{4}\mathrm{Arccos}(1 - 1/c_1)$ et l'on applique le lemme à la sphère unité S avec $\rho = 1$ et $\gamma = 1/2\sin\varphi$. On obtient

$$S \subset \bigcup_{i=0}^{N-1} B(x_i, 2\sin\varphi)$$

où, pour chaque i, $x_i \in S$. On déduit $\mathbb{R}^r = \bigcup_{i=0}^{N-1} E_i$ avec

$$x \in E_i \iff x = 0 \text{ ou } \frac{x}{|x|} \in B(x_i, 2\sin\varphi).$$

De plus si $x \in E_i$ l'angle entre x et x_i est au plus 2φ donc si x et y sont deux points quelconques de E_i l'angle entr'eux deux est au plus 4φ et l'on a donc

$$\cos(x, y) = \frac{< x, y >}{|x||y|} \geq \cos 4\varphi = 1 - \frac{1}{c_1}.$$

Enfin par définition de φ on a aussi

$$\begin{aligned} 1 - 1/c_1 &= \cos 4\varphi \\ &= 2\cos^2 2\varphi - 1 \\ &= 2(1 - 2\sin^2\varphi)^2 - 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2c_1}}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{c_1}\sqrt{1 + \sqrt{1 - 1/2c_1}}} \geq \frac{1}{\sqrt{8c_1}}$$

ce qui montre bien que $N \leq (1 + \sqrt{8c_1})^r$ et conclut. □

Enfin on donne des estimations pour des polynômes définissant un sous-schéma X d'un espace projectif. Notons que l'on peut obtenir plus simplement un tel résultat par spécialisation directe de la forme éliminante (grâce au morphisme noté $\mathfrak{d}$ dans [R1]) mais que les polynômes trouvés alors sont de degré $(n + 1 - \dim X) \deg X$ au lieu de $\deg X$ ici.

Proposition 6.1 *Soient K un corps de nombres, n un entier naturel et X un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^n_K$. Il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_s$ de $K[W_0, \ldots, W_n]$ tous homogènes de degré* $\deg X$*, dont la famille est de hauteur au plus*

$$h(X) + (\dim X + 2)(\deg X) \log(\deg X)(n + 1)$$

et tels que l'image de X dans $\mathbb{P}^n_K$ est le fermé $V(P_1, \ldots, P_s)$.

Démonstration : Nous notons $u = \dim X$ et $D = \deg X$. Pour démontrer l'énoncé sans l'estimation de hauteur (voir [F1, prop. 2.1]), on considère des projections linéaires $\pi\colon \mathbb{P}^n_K \setminus V(L_0, \ldots, L_{u+1}) \to \mathbb{P}^{u+1}_K$ définies par des formes linéaires indépendantes $L_i(W) = \sum_{j=0}^{n} m_{i,j} W_j$ vérifiant $X \cap V(L_0, \ldots, L_{u+1}) = \emptyset$. On choisit alors un polynôme $Q \in K[Z_0, \ldots, Z_{u+1}]$ homogène de degré D tel que $\pi(X) = V(Q)$ et la famille des $P := Q(L_0, \ldots, L_{u+1})$, lorsque les formes L_i varient comme ci-dessus, répond au problème.

Notons maintenant f une forme éliminante de X (multihomogène de multidegré $(D, \ldots, D)$ en des variables $u_{i,j}$ avec $0 \leq i \leq u$ et $0 \leq j \leq n$). On a montré dans [R2, lemme 4.1 et suivants] que si

$$f((m_{i,j})_{0 \leq i \leq u,\ 0 \leq j \leq n}) \neq 0$$

alors

$$Q = Z_0^{-Du} f((m_{i,j} Z_0 - m_{0,j} Z_i)_{1 \leq i \leq u+1,\ 0 \leq j \leq n})$$

convient. Si l'on note M la famille des variables $(m_{i,j})$ on obtient après substitution un polynôme $P \in K[M, W]$ multihomogène en $u + 3$ groupes de $n + 1$ variables, chaque degré partiel étant D. De plus l'argument de [F1] montre que

$$X = V((P(M, \cdot))_{M \in \mathcal{M}_1})$$

où l'on a noté $\mathcal{M}_0$ l'ensemble des matrices $(u + 2) \times (n + 1)$ à coefficients dans K puis $\mathcal{M}_1$ celui des $M \in \mathcal{M}_0$ qui correspondent à des formes $L_0, \ldots, L_{u+1}$ indépendantes et vérifiant $f((m_{i,j})) \neq 0$. Introduisons encore $\mathcal{M}_2$ l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_1$ telles que pour tous i et j on a $m_{i,j} \in \mathbb{Z}$ et $|m_{i,j}| \leq \max(D, 2)/2$. Enfin E sera l'espace vectoriel des formes homogènes de degré D en W (sur K) et E_k le sous-espace engendré par les $P(M, \cdot)$ avec $M \in \mathcal{M}_k$. Nous allons montrer $E_2 = E_1 = E_0$.

Considérons d'abord une forme linéaire $\varphi\colon E \to K$ telle que $\varphi(E_1) = 0$. Ainsi le polynôme en M donné par $\varphi(P(M, \cdot))$ est nul sur $\mathcal{M}_1$ qui est un ouvert de Zariski de $\mathcal{M}_0$. Par suite ce polynôme est nul sur $\mathcal{M}_0$ et on en déduit $\varphi(E_0) = 0$. Ceci vaut pour tout φ donc on a $E_1 = E_0$. Si maintenant $\varphi(E_2) = 0$, on considère encore le polynôme $\varphi(P(M, \cdot))$ qui est multihomogène de degré D en chaque groupe de variables. S'il était non nul on pourrait (voir la remarque précédant la proposition 4.1 de [R2]) choisir un élément de $\mathcal{M}_2$ en lequel sa valeur est nulle. Par suite $\varphi(E_0) = 0$ et ainsi $E_2 = E_1$.

Comme l'on avait $X = V(E_1)$, on peut choisir la famille des $P(M, \cdot)$ pour $M \in \mathcal{M}_2$. Il reste à en estimer la hauteur. Le calcul est semblable à [R2, lemme 4.2]. En notant Λ la famille des coefficients de f on écrit

$$Q = Z_0^{-Du} \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda \prod_{i=1}^{u+1} \prod_{k=1}^{D} (m_{i,j_{\lambda,i,k}} Z_0 - m_{0,j_{\lambda,i,k}} Z_i).$$

La longueur de ce polynôme (en une place infinie v) est alors au plus

$$D^{D(u+1)} \sum_{\lambda\in\Lambda} |\lambda|_v \leq [(n+1)D]^{D(u+1)} M_v(f)$$

(voir [R2]). En substituant $Z_i = \sum_{j=0}^{n} m_{i,j} W_j$ dans des monômes de degré D on trouve

$$|P|_v \leq [(n+1)D]^{D(u+2)} M_v(f)$$

qui entraîne le résultat (le calcul aux places finies est immédiat). Ces estimations se modifient légèrement pour traiter le cas $D = 1$. □

Références

[Be] D. Bertrand. Duality on tori and multiplicative dependence relations. J. Austral. Math. Soc. (Series A). **62**. 1997. p. 198–216

[BP] D. Bertrand, P. Philippon. Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs. Illinois J. Math. **32**. 1988. p. 263–280

[Bo] E. Bombieri. The Mordell conjecture revisited. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Série IV. **17**. 1990. p. 615–640. – Erratum. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Série IV. **18**. 1991. p. 473

[BGS] J.-B. Bost, H. Gillet, C. Soulé. Heights of projective varieties and positive Green forms. J. Amer. Math. Soc. **7**. 1994. p. 903–1027

[Bk] N. Bourbaki. Algèbre. Chapitre IX. Hermann. Paris. 1959

[Ca] J. W. S. Cassels. An introduction to the geometry of numbers. Springer-Verlag. 1959

[Ch] M. Chardin. Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique. Bull. Soc. Math. France. **117**. 1989. p. 305–318

[DP1] S. David, P. Philippon. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Série IV. **28**. 1999. p. 489–543

[DP2] S. David, P. Philippon. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes. Number Theory, Tiruchirapalli 1996. éds. V.K. Murty, M. Waldschmidt. Contemp. Math. **210**. p. 333–364. – II. en préparation

[F1] G. Faltings. Diophantine approximation on abelian varieties. Ann. Math. **133**. 1991. p. 549–576

[F2] G. Faltings. The general case of S. Lang's conjecture. Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991). Perspect. Math. 15. Academic Press. San Diego. 1994. p. 175–182

[Hi] M. Hindry. Autour d'une conjecture de Serge Lang. Invent. math. **94**. 1988. p. 575–603

[HP] E. Hrushovski, A. Pillay. Effective bounds for the number of transcendental points on subvarieties of semi-abelian varieties. Amer. J. Math. à paraître

[L] S. Lang. Fundamentals of diophantine geometry. Springer-Verlag. 1983

[M] D. Mumford. A remark on Mordell's conjecture. Amer. J. Math. **87**. 1965. p. 1007–1016

[OT] T. Ooe, J. Top. On the Mordell-Weil rank of an abelian variety over a number field. J. Pure Appl. Algebra **58**. 1989. p. 261–265

[Ph] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives III. J. Math. Pures Appl. **74**. 1995. p. 345–365

[R1] G. Rémond. Géométrie diophantienne multiprojective. Chapitre 7 de : Introduction to algebraic independence theory (édité par Y. Nesterenko, P. Philippon). à paraître dans Lecture Notes in Math. Springer-Verlag

[R2] G. Rémond. Inégalité de Vojta en dimension supérieure. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Série IV. **29**. 2000. p. 101–151

[V] P. Vojta. Siegel's theorem in the compact case. Ann. Math. **133**. 1991. p. 509–548