Sur les espaces vectoriels de matrices de rang borné

Jean Fresnel

L'objet du texte ci-après est de donner une démonstration de la majoration de la dimension d'un espace vectoriel constitué de matrices dont le rang est borné. La première démonstration est celle de Flanders ([Fl]), en 1962 sous la supposition que le corps de base soit assez grand. C'est en 1985 que Meshulan ([M]) a proposé une démonstration sans condition sur le corps de base. Nous présentons ici une démonstration qui diffère des précédentes ; sachant toutefois que je n'ai pas bien compris la démonstration de Meshulan. Dans le cas où $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$, l'anneau des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans un corps commutatif K, avec $\dim\mathcal{V}>(n-1)n$, si $\alpha\in K^\times$, alors il existe $A\in\mathcal{V}$ avec $\text{dét}A=\alpha$. Notons que ce dernier résultat avait été abordé par T. Shifrin et R. Varley ([S, Tl]) au moins pour $\alpha=1$.

Théorème 1 *Soient K un corps commutatif.*

1. *Soient $0\le r\le p<n$ des entiers, $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $M_{p,n}(K)$ de matrices de rang au plus r, on suppose que $\dim\mathcal{V}=rn$. Alors il existe $S\in S\ell_p(K)$ de façon que $S\mathcal{V}$ soit constitué de toutes les matrices de $M_{p,n}(K)$ dont les lignes d'indice $r+1,r+2,\dots,p$ sont nulles. En d'autres termes il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de K^p qui est de dimension r et $\mathcal{V}$ est constitué de toutes les matrices de $M_{p,n}(K)$ dont les colonnes appartiennent à $\mathcal{W}$; ce qui veut dire aussi que $\mathcal{V}$ isomorphe à $\mathcal{W}\otimes_K K^n$.*

Soient $0\le r\le p=n$, $\mathcal{V}'$ est un sous-espace vectoriel de $M_{p,n}(K)=M_n(K)$ constitué de matrices de rang au plus r, on suppose en plus que $\dim\mathcal{V}'=rn$. Alors il existe $S\in S\ell_p(K)$ de façon que $S\mathcal{V}'$ soit constitué de toutes les matrices de $M_n(K)$ dont les lignes d'indice $r+1,r+2,\dots,n$ sont nulles, ou bien $\mathcal{V}'S$ est constitué de toutes les matrices de $M_n(K)$ dont les colonnes d'indice $r+1,r+2,\dots,n$ sont nulles. En d'autres termes il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de K^n qui est de dimension r et $\mathcal{V}'$ est soit constitué de toutes les matrices dont les lignes appartiennent à $\mathcal{W}$, soit constitué de toutes les matrices dont les colonnes appartiennent à $\mathcal{W}$, il suit de cela que $\mathcal{V}'$ est isomorphe à $\mathcal{W}\otimes_K K^n$.

2. *Soient $1\le p\le n, 0\le r<p$ des entiers, $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel du K-espace vectoriel $M_{p,n}(K)$ des matrices à p lignes et n colonnes, avec $\dim\mathcal{V}>rn$. Alors $\mathcal{V}$ contient une matrice A avec $\text{rang}\,A\ge r+1$.*

En d'autres termes, si $\mathcal{V}'$ est un sous-espace vectoriel de $M_{p,n}(K)$ constitué de matices de rang au plus r, alors $\dim\mathcal{V}'\le rn$.

3. *De plus, si $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{n,n}(K):=M_n(K)$ avec $\dim\mathcal{V}>(n-1)n$, si $\alpha\in K^\times$, alors il existe $A\in\mathcal{V}$ avec $\text{dét}A=\alpha$.*

Démonstration

0) Il s'agit de montrer que 1. implique 2. .

0.1) On suppose que $p<n$. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel du K-espace vectoriel $M_{p,n}(K)$ des matrices à p lignes et n colonnes, avec $\dim\mathcal{V}>rn$. Supposons que pour tout $A\in\mathcal{V}$, on a $\operatorname{rang}A\leq rn$. Soit alors $\mathcal{V}'$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$ qui est de dimension rn , alors par 1. il existe $S\in S\ell_p(K)$ de façon que $S\mathcal{V}'$ soit constitué de toutes les matrices de $M_{p,n}(K)$ dont les lignes d'indice $r+1,r+2,...,p$ sont nulles. Comme $S\mathcal{V}$ contient strictement $S\mathcal{V}'$, il suit que $S\mathcal{V}'$ contient une matrice B avec $\operatorname{rang}B>r$, il en est de même de $\mathcal{V}$.

0.2) On suppose que $p=n$. Alors en utilisant 1. pour un $S\in S\ell_p(K)$ convenable, on montre de même que $S\mathcal{V}$ ou $\mathcal{V}S$ contient un élément B avec $\operatorname{rang}B>r$, il en est de même de $\mathcal{V}$.

1) Il s'agit de montrer 1. .

1.0) Les cas $r=0$, $r=p$ sont immédiats.

On considère l'hypothèse de récurrence sur p suivante.

(*H.R.*) *Soient* $1\leq p'\leq n$, $0\leq r'\leq p'$, $p'<p$, *des entiers. On suppose que* 1. *est satisfait pour tout sous-espace vectoriel* $\mathcal{V}'$ *de* $M_{p',n}(K)$ *constitué de matrices de rang au plus* r' *et avec* $\dim\mathcal{V}'=r'n$.

1.1) *Soit* $\rho:M_{p,n}(K)\to M_{p-1,n}(K)$ *défini par* $\rho(M)=[m_{ij}]_{i,j}$ *pour* $1\leq i\leq p-1$, $1\leq j\leq n$, *si* $M=[m_{ij}]_{i,j}$ *avec* $1\leq i\leq p,1\leq j\leq n$. L'application linéaire ρ consiste à supprimer la dernière ligne de la matrice M .

Si on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i,j) qui vaut 1 , alors $\ker\rho=KE_{p,1}\oplus KE_{p,2}\oplus...\oplus KE_{p,n}$.

Remarquons enfin que $\operatorname{rang}A\geq\operatorname{rang}\rho(A)$.

1.2) *On suppose que* $\mathcal{V}\cap\ker\rho=\{0\}$, *que* $\dim\mathcal{V}=rn$ *et que* $r=p-1$.

On a donc $\dim\rho(\mathcal{V})=(p-1)n$, i.e. $\rho(\mathcal{V})=M_{p-1,n}(K)$ et ρ induit une bijection de $\mathcal{V}$ sur $\rho(\mathcal{V})$. Si donc B est une matrice de $M_{p-1,n}(K)$ dont les lignes sont $(L_1,L_2,...,L_{p-1})$, il existe un unique $A\in\mathcal{V}$ avec $\rho(A)=B$ et les lignes de A sont $(L_1,L_2,...,L_{p-1},L_p)$. Ainsi $(L_1,L_2,...,L_{p-1})\longmapsto L_p$ définit une application linéaire f de $(K^n)^{p-1}$ dans K^n et de plus comme $\operatorname{rang}A\leq r$, si $(L_1,L_2,...,L_{p-1})$ est une famille libre de K^n , il suit que $L_p\in KL_1+KL_2+...+KL_{p-1}$. Il suit du lemme 1 ci-après qu'il existe $a_1,a_2,...,a_{p-1}\in K$ de façon que

$f((L_1,L_2,...,L_{p-1})=a_1L_1+a_2L_2+...+a_{p-1}L_{p-1}$ pour tout $(L_1,L_2,...,L_{p-1})\in(K^n)^{p-1}$. On déduit facilement de cela qu'il existe

$S \in S\ell_p(K)$ de façon que $S\mathcal{V}$ soit constitué de toutes les matrices de $M_{p,n}(K)$ dont la ligne d'indice p est nulle.

1.3) *On suppose que* $\mathcal{V} \cap \ker\rho = \{0\}$, *que* $\dim\mathcal{V} = rn$ *et que* $r \leq p-2$.
On a donc $\dim\rho(\mathcal{V}) = \dim\mathcal{V} = rn \leq (p-2)n$. Il suit que $\rho(\mathcal{V})$ est un sous-espace vectoriel de $M_{p-1,n}(K)$, de dimension rn et constitué de matrices de rang au plus r . Comme $r \leq p-2$, il suit de (*H.R.*) appliqué à $\rho(\mathcal{V})$ qu'il existe $S \in S\ell_{p-1}(K)$ de façon que la ligne d'indice $p-1$ de tout élément de $S\rho(\mathcal{V})$ soit nulle.
Si $S' \in S\ell_p(K)$ est la matrice constituée des blocs diagonaux $(S,[1])$, il suit que la ligne d'indice p de tout élément de $S'\mathcal{V}$ est nulle. Ainsi $S'\mathcal{V}$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de dimension rn de $M_{p-1,n}(K)$ constitué de matrices de rang au plus r . Alors par (H.R.) appliqué à ce sous-espace vectoriel de $M_{p-1,n}(K)$, il existe $T \in S\ell_{p-1}(K)$ de façon que lignes d'indice $r+1, r+2, \ldots, p-1$ des éléments de $T\mathcal{V}$ considérés dans $M_{p-1,n}(K)$ soient toutes nulles. Il suit facilement de cela qu'il existe $R \in S\ell_p(K)$ de façon que 1. soit satisfait pour $\mathcal{V}$.

1.4) *On suppose que* $\dim(\mathcal{V} \cap \ker\rho) = d \geq 1$. *Alors il existe* $Q \in S\ell_n(K)$ *de façon que* $(\mathcal{V}Q) \cap \ker\rho = KE_{p,n-d+1} \oplus KE_{p,n-d+2} \oplus \ldots \oplus KE_{p,n}$.
En effet il existe une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\ker\rho$ constituée de vecteurs lignes de façon que $\mathcal{V} \cap \ker\rho = Ke_{n-d+1} \oplus Ke_{n-d+2} \oplus \ldots \oplus Ke_n$. Soit $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ constituée de vecteurs colonnes, on a donc $e_i e_j^* = \delta_{ij}$. Alors il suffit de prendre pour Q la matrice dont les colonnes sont $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_{n-1}^*$, λe_n^* où λ est choisi de façon que $\text{dét}[\, e_1^* \, e_2^* \ldots e_{n-1}^* \;\; \lambda e_n^* \,] = 1$. Si donc $\mathcal{V}Q$ contient une matrice A avec $\text{rang}A \geq r+1$, on a $\text{rang}\, AQ^{-1} \geq r+1$. De plus dans le cas où $p=n$, $r=n-1$, si $\text{dét}A = \alpha$, on a $\text{dét}AQ^{-1} = \alpha$.
(∗) *En conclusion on suppose désormais que*
$\mathcal{V}' \cap \ker\rho = KE_{p,n-d+1} \oplus KE_{p,n-d+2} \oplus \ldots \oplus KE_{p,n}$ *avec* $d \geq 1$ et $\mathcal{V}' := \mathcal{V}Q$ *avec* $Q \in S\ell_n(K)$.

1.5) *Sous l'hypothèse* (∗) , *avec* $d \geq 1$, *on suppose en plus que* $r < d$, *que* $\dim\mathcal{V}' = rn$ *et que* $\mathcal{V}'$ *est constitué de matrices de rang au plus* r .
On sait par 1.1) que pour tout $A \in \mathcal{V}'$, on a $\text{rang}\rho(A) \leq \text{rang}A$, il suit de cela que pour tout $A \in \mathcal{V}'$, on a $\text{rang}\rho(A) \leq r$, i
1.5.1) *Montrons que pour tout* $A \in \mathcal{V}'$, *on a* $\text{rang}\rho(A) \leq r-1$.
Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{V}'$, avec $\text{rang}\rho(A) = r$; ainsi il existe

$1\leq j_1<j_2<...<j_r\leq n$ de façon que les colonnes correspondantes aux indices $j_1,j_2,...,j_r$ de $\rho(A)$ constituent une famille libre ; il s'ensuit que les colonnes $C_{j_1},C_{j_2},...,C_{j_r}$ de A constituent une famille libre. Comme $r<d$, il existe j avec $n-d+1\leq j\leq n$ et $j\notin\{ j_1,j_2,...,j_r\}$. Soient $A=[C_1C_2...C_n],\lambda\in K$, alors les colonnes de $A+\lambda E_{p,j}$ correspondantes aux indices $j_1,j_2,...,j_r,j$ sont $C_{j_1},C_{j_2},...,C_{j_r},C_j+\lambda E_{p,j}$. Notons $C'_{j_1},C'_{j_2},...,C'_{j_r},C'_j$ les colonnes correspondantes de $\rho(A+\lambda E_{p,j})$. Alors il existe $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r\in K$ uniques tels que $\lambda_1C'_{j_1}+\lambda_2C'_{j_2}+...+\lambda_rC'_{j_r}+C_j=0$. Si donc $C_{j_k}=\begin{bmatrix} C'_{j_k} \\ a_k \end{bmatrix}$ et $C_j=\begin{bmatrix} C'_j \\ a \end{bmatrix}$, en choisissant λ de façon que

$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+...+\lambda_ra_r+a+\lambda\neq 0$, il suit que la famille $(C_{j_1},C_{j_2},...,C_{j_r},C_j+\lambda E_{p,j})$ est libre, ainsi $\text{rang}(A+\lambda E_{p,j})\geq r+1$. Comme $A+\lambda E_{p,j}\in\mathcal{V}'$, cette situation est impossible.

1.5.2) *Montrons que $d=n$ et que $\mathcal{V}'$ satisfait* 1. , *donc aussi que $\mathcal{V}$ satisfait* 1. . On a donc $\dim\rho(\mathcal{V}')=rn-d\geq(r-1)n$ parce que $d\leq n$; en plus si $d<n$, on a $\dim\rho(\mathcal{V}')>(r-1)n$ Par (*H.R.*) compte tenu de 0) , 1. et 2. sont satisfaits, ainsi il existe $A\in\mathcal{V}'$ avec $\text{rang}\rho(A)\geq r$; compte tenu de 1.5.1) , la situation est impossible, on a donc $d=n$. Par suite $\mathcal{V}'=\rho(\mathcal{V}')\oplus\ker\rho$ avec $\ker\rho=KE_{p,1}\oplus KE_{p,2}\oplus...\oplus KE_{p,n}$. On peut appliquer (H.R.) à $\rho(\mathcal{V}')$, ce qui veut dire qu'il existe $T\in S\ell_{p-1}(K)$ de façon que $T\mathcal{V}'$ soit constitué de toutes les matrices de $M_{p-1,n}(K)$ dont les lignes d'indices $r,r+1,...,p-1$ sont nulles. Il suit facilement de cela qu'il existe $R\in S\ell_p(K)$ de façon que $R\mathcal{V}'$ soit constitué de toutes les matrices de $M_{p,n}(K)$ dont les lignes d'indices $r+1,r+2,...,p$ sont nulles. Il en résulte $R\mathcal{V}$ est constitué de toutes les matrices de $M_{p,n}(K)$ dont les lignes d'indices $r+1,r+2,...,p$ sont nulles.

1.6) *Sous l'hypothèse* $(*)$, *avec* $d\geq 1$, *on suppose que* $d\leq r\leq p$, *que* $\dim\mathcal{V}'=rn$ *et que $\mathcal{V}'$ est constitué de matrices de rang au plus* r .

1.6.0) Soit $\mathcal{W}:=\mathcal{V}\cap(KE_{p,1}\oplus...\oplus KE_{p,n}\oplus KE_{1,n}\oplus...\oplus KE_{p-1,n})$, $\varphi:(KE_{p,1}\oplus...\oplus KE_{p,n}\oplus KE_{1,n}\oplus...\oplus KE_{p-1,n})\to KE_{1,n}\oplus...\oplus KE_{p-1,n}$ la projection canonique ; on a donc $\ker\varphi=KE_{p,1}\oplus...\oplus KE_{p,n}$ et donc $\dim(\mathcal{W}\cap\ker\varphi)=d$, il suit que
$\dim\mathcal{W}=d+\dim\varphi(\mathcal{W})\leq d+p-1\leq r+p-1<r+n$.
Soit $\theta:M_{p,n}(K)\to M_{p-1,n-1}(K)$ défini par $\theta(M)=[m_{ij}]_{i,j}$ avec

$1 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq n-1$ et où $M=[m_{ij}]_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n$; ainsi θ consiste à supprimer la p-ième ligne et la n-ième colonne. On a $\mathcal{V}' \cap \ker \theta = \mathcal{W}$ et donc $\dim \theta(\mathcal{V}') \geq rn-(r+n-1)=(r-1)(n-1)$.

1.6.1) *Montrons que* $\dim \theta(\mathcal{V}')=(r-1)(n-1)$ *et que tout élément de* $\theta(\mathcal{V}')$ *est de rang au plus* $r-1$.

Supposons le contraire, i.e. il existe une matrice $\theta(A)$ avec $A \in \mathcal{V}'$ et $\operatorname{rang} \theta(A) \geq r$. Si $\operatorname{rang} \theta(A) \geq r+1$, alors $\operatorname{rang} A \geq r+1$. C'est contraire à l'hypothèse. Si $\operatorname{rang} \theta(A)=r$, il existe des indices $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n-1$, de façon que les colonnes correspondantes de $\theta(A)$ constituent une famille libre ; de même des colonnes $C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_r}$ de A constituent une famille libre. Comme en 1.5) il existe $\lambda \in K$ de façon que les colonnes de $A+\lambda E_{p,n}$ correspondent aux indices $j_1, j_2, \ldots, j_r, n$ constituent une famille libre. Comme $A+\lambda E_{p,n} \in \mathcal{V}'$, c'est impossible.

Supposons aussi que $\dim \theta(\mathcal{V}') > (r-1)(n-1)$, il suit de (*H.R.*) que $\theta(\mathcal{V}')$ satisfait 1. et 2. , donc contient une matrice $\theta(A)$ avec $A \in \mathcal{V}'$ et $\operatorname{rang} \theta(A) \geq r$; par ce qui précède c'est impossible.

1.6.2) *Montrons que* $r=d$, $n=p$, $\dim \varphi(\mathcal{W})=p-1$. Sachant par 1.6.1. que $\dim \theta(\mathcal{V}')=(r-1)(n-1)$, il suit de 1.6.0) que $\dim \mathcal{W}=d+\dim \varphi(\mathcal{W})$, i.e. $\dim \mathcal{W}=d+(p-1)-\varepsilon$ avec $\varepsilon \geq 0$. Par ailleurs $\dim \theta(\mathcal{V}')=rn-\dim \mathcal{W}$, i.e. $\dim \theta(\mathcal{V}')=(r-1)(n-1)+(r-d)+(n-p)+\varepsilon$, on a donc $r=d$, $n=p$, $\varepsilon=0$.

1.6.3) En résumé, il suit de 1.6.0) , 1.6.1) , 1.6.2) que sous l'hypothèse 1.6) on a $n=p$, i.e. $\mathcal{V}'$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$, de dimension rn , constitué de matrices de rang au plus r et $\theta(\mathcal{V}')$ est un sous-espace vectoriel de $M_{n-1}(K)$ de dimension $(r-1)(n-1)$, constitué de matrices de rang au plus $r-1$.

2) *Il nous reste à montrer* 3. .

Soient K *un corps commutatif,* $\mathcal{V}$ *un sous-espace vectoriel de* $M_n(K)$ *avec* $\dim \mathcal{V} > (n-1)n, a \in K$. *Alors il existe* $A \in M_n(K)$ *tel que* $\det A=a$.

2.0) Soit $\theta : M_n(K) \to M_{n-1}(K)$ l'application linéaire définie par $\theta([a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} := [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}}$. On a donc

$\ker \theta = KE_{n,1} \oplus KE_{n,2} \oplus \ldots \oplus KE_{n,n} \oplus KE_{1,n} \oplus \ldots \oplus KE_{n-1,n}$.

2.1) Soit $\mathcal{W} := \mathcal{V} \cap \ker \theta$. On a donc $\dim \mathcal{V} = \dim \theta(\mathcal{V}) + \dim \mathcal{W}$.

Or $\dim \mathcal{V}=(n-1)n+\varepsilon$ avec $\varepsilon \geq 1$, $\dim \theta(\mathcal{V})=(n-1)^2-\mu$ avec $\mu \geq 0$ et donc $\dim \mathcal{W}=(n-1)+\varepsilon+\mu \geq n$.

2) Pour des raisons numériques, on a donc
$\mathcal{W}\cap(KE_{n,1}\oplus KE_{n,2}\oplus\ldots\oplus KE_{n,n})\neq\{0\}$. Il suit de cela qu'il existe
$S\in S\ell_{n-1}(K)$ avec $\mathcal{V}S\cap(KE_{n,1}\oplus KE_{n,2}\oplus\ldots\oplus K\,\mathrm{E}_{n,n})\supset K\,\mathrm{E}_{n,n}$.
2.3) Posons $\mathcal{V}':=\mathcal{V}S$, on a donc $E_{n,n}\in\mathcal{V}'$. Supposons qu'il existe $A\in\mathcal{V}'$ avec $\operatorname{rang}\theta(A)=n-1$. Alors il existe $\lambda\in K$ tel que $\det(A+\lambda E_{n,\,n})=a$; ainsi $\mathcal{V}$ contient un élément B avec $\det B=a$.
2.4) Soit toujours $\mathcal{V}'=\mathcal{V}S$ et $\mathcal{W}'=\mathcal{V}'\cap\ker\theta$, on a donc $E_{n,n}\in\mathcal{W}'$. Comme en 2.1) , on a $\dim\mathcal{V}'=(n-1)n+\varepsilon$ avec $\varepsilon\geq1$,
$\dim\theta(\mathcal{V}')=(n-1)^2-\mu$ avec $\mu\geq0$ et $\dim\mathcal{W}'=(n-1)+\varepsilon+\mu$.
On suppose maintenant que pour tout $C\in\mathcal{V}'$, on a $\operatorname{rang}(\theta(C))\leq n-2$. Il suit de cela que $\dim\theta(\mathcal{V}')=(n-2)(n-1)-\mu'$ avec $\mu'\geq0$ (c'est 2.).

Sachant que $\dim\theta(\mathcal{V}')=(n-1)^2-\mu$, on a donc $\mu=(n-1)+\mu'$ et donc $\dim\mathcal{W}'=2n-2+\varepsilon+\mu'$. Sachant que $\dim\mathcal{W}'\leq2n-1$, on déduit que $\varepsilon=1$, $\mu'=0$ et donc $\mu=n-1$; ainsi $\dim\theta(\mathcal{V}')=(n-2)(n-1)$ et $\dim\mathcal{W}'=2n-1$, soit donc $\mathcal{W}'=\ker\theta$, ce qui montre que
$\mathcal{V}'=\theta(\mathcal{V}')\oplus\ker\theta$. En conclusion $\theta(\mathcal{V}')\subset\mathcal{V}'$ contient une matrice A avec $\operatorname{rang}A=n-2$. On a donc $\{1,2,\ldots,n-1\}=\{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}\}$,
$\{1,2,\ldots,n-1\}=\{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}\}$ de façon que la sous-matrice de A indexée sur $\{i_1,i_2,\ldots,i_{n-2}\}\times\{j_1,j_2,\ldots,j_{n-2}\}$ soit de déterminant non nul. Facilement, il existe $\lambda,\mu\in K$ avec $\det(A+\lambda E_{i_{n-1},n}+\mu E_{n,j_{n-1}})=a$.

Lemme 1 *Soient* $1\leq t<n$ *des entiers,* E *un* K*-espace vectoriel de dimension* n *,* $f:E^t\longmapsto E$ *une application linéaire telle que pour tout* $x=(x_1,x_2,\ldots,x_t)\in E^t$ *avec* $(x_1,x_2,\ldots,x_t)$ *qui est une famille libre de* E *, on a* $f(x)\in Kx_1+Kx_2+\ldots+Kx_t$ *. Alors il existe* $a_1,a_2,\ldots,a_t\in K$ *de façon que pour tout* $x=(x_1,x_2,\ldots,x_t)\in E^t$ *, on a* $f(x)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_tx_t$.

Démonstration
Soit $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base de E . Notons $(E^t)'$ l'ensemble des $x=(x_1,x_2,\ldots,x_t)\in E^t$ tels que $(x_1,x_2,\ldots,x_t)$ soit une famille libre.
α) Soient $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq t$, $u_{ij}:=(x_1,x_2,\ldots,x_t)\in E^t$ défini par $x_k=0$ pour tout $k\neq j$ et $x_j=e_i$. Alors la famille (u_{ij}) avec $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq t$ est une base de E^t .
β) *Montrons qu'il existe* $a_{ij}\in K$ *de façon que* $f(u_{ij})=a_{ij}e_i$.
Soient $k\in\{1,2,\ldots,n\}-\{i\}$, I une partie à t éléments de $\{1,2,\ldots,n\}-\{k\}$, $s:\{1,2,\ldots,t\}\longmapsto I$ une bijection avec $s(j)\neq i$. Soit $v_{ijk}:=(e_{s(1)},e_{s(2)},\ldots,e_{s(t)})$, alors $v_{ijk}\in(E^t)'$. De même $u_{ij}+v_{ijk}\in(E^t)'$

parce que $e_{s(j)}\neq e_i$. Il suit de cela que $f(u_{ij}+v_{ijk})=\sum_{r=1}^{n}\lambda_r e_r$ avec $\lambda_k=0$, de même $f(u_{ijk})=\sum_{t=1}^{n}\mu_t e_t$ avec $\mu_k=0$. En conclusion $f(u_{ij})=\sum_{r=1}^{n}\nu_r e_r$ avec $\nu_k=0$. Comme cela est vrai pour tout $k\neq i$, on a bien $f(u_{ij})=a_{ij}e_i$ avec $a_{ij}\in K$.

γ) *Montrons que* $a_{1j}=a_{2j}=...=a_{nj}$.

Soit $J\subset\{1,2,...,n\}-\{i,i'\}$ une partie à $t-1$ éléments , $s:\{1,2,...,t\}-\{j\}\longmapsto J$ une bijection, $x=(x_1,x_2,...,x_t)$ défini $x_k=e_{s(k)}$ pour $k\neq j$ et $x_j=e_i-e_{i'}$; alors $x\in(E^t)'$. Il suit que

$f(x)=u(e_i-e_{i'})+\sum_{k=1,k\neq j}^{n}\lambda_k e_{s(k)}$ avec $u,\lambda_1,...,\lambda_{j-1},\lambda_{j+1},...,\lambda_n\in K$. Mais par β) , on a aussi $f(x)=a_{ij}e_i+a_{i'j}e_{i'}+\sum_{k=1,k\neq j}^{n}a_{s(k)\,k}e_{s(k)}$. Il suit de cela que $a_{ij}=a_{i'j}=u$.

δ) Soient $a_j:=a_{1j}=a_{2j}=...=a_{nj}$, $y:=(0,...,0,x_j,0,...,0)$ où x_j est en position j . On a $x_j=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+...+\lambda_ne_n$, il suit que $y=\lambda_1u_{1j}+\lambda_2e_{2j}+...+\lambda_ne_{nj}$, il suit alors de γ) que $f(y)=a_jx_j$. Si donc $x=(x_1,x_2,...,x_t)\in E^t$, on a bien $f(x)=a_1x_1+a_2x_2+...+a_tx_t$.

Lemme 2 *Soient* $1\leq r\leq n$ *des entiers,* $\mathcal{V}'$ *un sous-espace vectoriel de* $M_n(K)$ *, de dimension* rn*, constitué de matrices de rang au plus* r *,* $\theta:M_n(K)\to M_{n-1}(K)$ *l'application linéaire définie par* $\theta(M)=[m_{ij}]_{i,j}$ avec $1\leq i\leq n-1, 1\leq j\leq n-1$ *et où* $M=[m_{ij}]_{i,j}$ avec $1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n$; ainsi θ consiste à supprimer la p-ième ligne et la n-ième colonne. *On suppose que* $\dim\theta(\mathcal{V}')=(r-1)(n-1)$ *et que* $\theta(\mathcal{V}')$ *est constitué de matrices de rang au plus* $r-1$ *. Alors il existe* $T\in S\ell_n(K)$ *de façon que* $T\mathcal{V}'$ *soit constitué de toutes les matrices dont les lignes indexées sur* $r+1,r+2,...,n$ *sont nulles ou bien* $\mathcal{V}'T$ *est constitué de toutes les matrices dont les colonnes indexées sur* $r+1,r+2,...,n$ *sont nulles.*

Démonstration

Soit $\mathcal{W}:=\mathcal{V}'\cap\ker\theta$.

0) Le cas $r=1$. On a donc $\mathcal{V}'=\mathcal{W}\subset U\oplus V\oplus KE_{n,n}$ avec $U:=KE_{n,1}\oplus KE_{n,2}\oplus...\oplus KE_{n,n-1}$, $V:=KE_{1,n}\oplus KE_{2,n}\oplus...\oplus KE_{n-1,n}$.

Si $A=u+v+\lambda E_{n,n}\in\mathcal{V}'$ avec $u\in U-\{0\}$, $v\in V-\{0\}$, il suit facilement que rang$A\geq 2$. C'est impossible.

Si $A=u+\lambda E_{n,n}\in\mathcal{V}'$, $B=v+\mu E_{n,n}\in\mathcal{V}'$ avec $u\in U-\{0\}$, $v\in V-\{0\}$, alors

on a rang $A+B\geq 2$. C'est impossible. Il suit de cela que $\mathcal{V}'\subset U\oplus KE_{n,n}$ ou que $\mathcal{V}'\subset V\oplus KE_{n,n}$.
Il suit facilement de cela qu'il existe $S\in S\ell_n(K)$ tel $S\mathcal{V}'$ est constitué de toutes les matrices de $M_n(K)$ dont les lignes indexées sur $\{2,3,\ldots,n\}$ sont nulles, ou que $\mathcal{V}'S$ est constitué de toutes les matrices dont les colonnes indexées sur $\{2,3,\ldots,n\}$ sont nulles.

Le cas $r=n$ est trivial, on peut donc supposer maintenant que $2\leq r\leq< n$.
Par hypothèse de récurrence sur n , on peut donc supposer que $\theta(\mathcal{V}')$ satisfait le résultat (1) ou (2) ci-dessous.
(1) *On suppose qu'il existe $T'\in S\ell_{n-1}(K)$ tel que $T'\theta(\mathcal{V}')$ soit constitué de toutes les matrices de $M_n(K)$ pour lesquelles les lignes d'indice $r,r+1,\ldots,n-1$ sont nulles.*
(2) *On suppose qu'il existe $T'\in S\ell_{n-1}(K)$ tel que $\theta(\mathcal{V}')T'$ soit constitué de toutes les matrices de $M_n(K)$ pour lesquelles les colonnes d'indice $r,r+1,\ldots,n-1$ sont nulles.*
En 1) , 2) , 3) ci-après, on suppose que (1) est satisfait.
Soit $T\in S\ell_{n-1}(K)$ la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $(T',[1])$. Ainsi pour tout $A\in M_n(K)$, on a $\theta(TA)=T'\theta(A)$.
1) Soit $\mathcal{W}':=T\mathcal{V}'\cap\ker\theta$, facilement la multiplication à gauche par T définit une bijection linéaire de $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{W}'$. Ainsi on a $\dim\mathcal{W}'=(r-1)+n$.
2) *Montrons que* $\mathcal{W}'\subset KE_{1,n}\oplus\ldots\oplus KE_{r-1,n}\oplus KE_{1,n}\oplus\ldots\oplus KE_{n,n}$.
2.1) Supposons le contraire, i.e. il existe $u\in\mathcal{W}'$ avec $u=\lambda_1E_{1,n}+\ldots+\lambda_nE_{n,n}+\mu_1E_{n,1}+\ldots+\mu_{n-1}E_{n,n-1}$ et il existe i_0 avec $\lambda_{i_0}\neq 0$, $r\leq i_0\leq n-1$.
2.2) Pour des raisons de dimension, on a $\mathcal{W}'\cap(KE_{n,1}\oplus KE_{n,2}\oplus\ldots\oplus KE_{n,n-1})\neq\{0\}$, donc il existe $v=v_1E_{n,1}+v_2E_{n,2}+\ldots+v_{n-1}E_{n,n-1}\in\mathcal{W}'$ et $1\leq j_0\leq n-1$ avec $v_{j_0}\neq 0$.
2.3) Sous l'hypothèse 2.1) , il s'agit de montrer que $T\mathcal{V}'$ contient un élément B avec $\mathrm{rang}B\geq r+1$.
2.3.1) On suppose que $j_0\geq r$. Soit $A\in T\mathcal{V}'$ de façon que $\theta(A)=E_{1,1}+E_{2,2}+\ldots+E_{r-1,r-1}$; alors pour $\alpha,\beta\in K$ convenables les colonnes de $A+\alpha u+\beta v$ indexées sur $\{1,2,\ldots r-1,j_0,n\}$ constituent une famille libre. Ce qui veut dire que $T\mathcal{V}'$ contient un élément B avec $\mathrm{rang}B\geq r+1$.
2.3.2) On suppose que $j_0\leq r-1$. Soit $A\in T\mathcal{V}'$ de façon que $\theta(A)=E_{1,1}+E_{2,2}+\ldots+E_{j_0-1,j_0-1}+E_{j_0,j_0+1}+\ldots+E_{r-1,r}$. Alors pour $\alpha,\beta\in K$, convenables, les colonnes de $A+\alpha u+\beta v$ indexées sur

$\{1,2,\dots,r-1,r,n\}$ constituent une famille libre. Cela veut dire que $T\mathcal{V}'$ contient une matrice B avec $\operatorname{rang}B\geq r+1$.
2.4) Il suit de 2.3) que l'hypothèse 2.1) est à rejeter, donc que 2) est satisfait.
3) Montrons que les lignes de toutes les matrices de $T\mathcal{V}'$ indexées sur $\{r,r+1,\dots,n-1\}$ sont nulles.
3.1) Soient $p:M_n(K)\to KE_{r,n}\oplus KE_{r+1,n}\oplus\dots\oplus KE_{n-1,n}$ la projection canonique et p' sa restriction à $T\mathcal{V}'$. Il suit de 2) que p' induit une application linéaire p' induit une application linéaire $p'':\theta(T\mathcal{V}')\to KE_{r,n}\oplus KE_{r+1,n}\oplus\dots\oplus KE_{n-1,n}$.
3.2) Si $A=\sum_{i,j}\lambda_{i,j}\in E_{i,j}\in T\mathcal{V}'$, il s'agit de montrer que $\lambda_{r,n}=\lambda_{r+1,1}=\dots=\lambda_{n-1,n}=0$.
Soit $v=v_1E_{n,1}+v_2E_{n,2}+\dots+v_{n-1}E_{n,n-1}\in\mathcal{W}'$ et $1\leq j_0\leq n-1$ avec $v_{j_0}\neq 0$, comme il est défini en 2.2) .
Soit $A\in T\mathcal{V}'$ avec $\theta(A)=[C_1C_2\dots C_{n-1}]$; on suppose en plus que $\operatorname{rang}[C_1C_2\dots C_{j_0-1}C_{j_0+1}\dots C_{n-1}]=r-1$. Il s'agit de montrer que $p''(\theta(A))=0$. Supposons $p''(\theta(A))\neq 0$, alors il existe $\beta\in K$, convenable, de façon que $\operatorname{rang}(A+\beta v)\geq r+1$. Cela conduit à une contradiction, donc on a bien $p''(\theta(A))=0$.
3.3) Comme les matrices $\theta(A)$ satisfaisant les hypothèses de 3.2) engendrent $\theta(T\mathcal{V}')$ (lemme 3 , ci-après) , il suit que pour tout $A\in T\mathcal{V}'$, on a $p''(\theta(A))=0$.
3.4) Il suit donc que sous l'hypothèse (1) , les lignes de $T\mathcal{V}'$ indexées sur $\{r,r+1,\dots,n-1\}$ sont nulles.
3.5) Sous l'hypothèse (1) , il suit facilement de 3.4) qu'il existe $S\in S\ell_n(K)$ de façon que $S\mathcal{V}'$ soit constitué de toutes les matrices de $M_n(K)$ dont les lignes indexées sur $\{r+1,r+2,\dots,n\}$ sont nulles.
4) On suppose maintenant que (2) est satisfait, i.e. qu'il existe $T'\in S\ell_{n-1}(K)$ tel que $\theta(\mathcal{V}')T'$ soit constitué de toutes les matrices de $M_{n-1}(K)$ pour lesquelles les colonnes d'indice $r,r+1,\dots,n-1$ sont nulles. Il suit par transposition que ${}^tT'\theta({}^t\mathcal{V}')$ est constitué de toutes les matrices de $M_{n-1}(K)$ pour lesquelles les lignes indexées sur $\{r,r+1,\dots,n-1\}$ sont nulles. Le sous-espace vectoriel ${}^t\mathcal{V}'$ de $M_n(K)$ constitué de matrices de rang au plus r et de dimension rn ; ${}^t\mathcal{W}={}^t\mathcal{V}'\cap\ker\theta$, et $\dim{}^t\mathcal{W}=\dim\mathcal{W}'=(r-1)+n$, on a aussi $\dim\theta({}^t\mathcal{V}')=\dim\theta(\mathcal{V}')=(r-1)(n-1)$, et $\theta({}^t\mathcal{V}')$ est constitué de matrices de rang au plus $r-1$. Il suit donc de 1) , 2) , 3) , qu'il existe $S\in S\ell_n(K)$ de façon que $S\,{}^t\mathcal{V}'$ soit constitué de toutes les matrices dont les lignes indexées

sur $\{r+1,r+2,\ldots,n\}$ sont nulles. Il suit de cela que $\mathcal{V}'\,{}^tS$ est constitué de toutes les matrices dont les colonnes indexées sur $\{r+1,r+2,\ldots,n\}$ sont nulles.

Lemme 3 *Soient K un corps commutatif.*
1. *Soit $p\geq 1$, un entier, alors les matrices de $S\ell_p(K)$ engendrent le K-espace vectoriel $M_p(K)$.*
2. *Soient $1\leq p\leq n$ des entiers, $\{i_1,i_2,\ldots,i_p\}$ une partie à p éléments de $\{1,2,\ldots,n\}$. Alors l'ensemble des matrices $[C_1C_2\ldots C_n]$ de $M_{p,n}(K)$ telles que $[C_{i_1}C_{i_2}\ldots C_{i_p}]$ soit inversible, engendre le K-espace vectoriel $M_{p,n}(K)$.*

Démonstration
1) Montrons 1. . Soit $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i,j) qui vaut 1. Il s'agit de montrer que pout tout (i,j) l'élément $E_{i,j}$ est engendré par les éléments de $S\ell_p(K)$.
Si $i\neq j$, on a $E_{i,j}=(I_n+E_{i,j})-I_n$.
Si $i<n$, on a $(E_{i,i+1}-E_{i+1,i}+E_{i+1,i+1}+\sum_{j\neq i,j\neq i+1}E_{j,j})-I_n=E_{i+1,i=1}$. De plus $(E_{i,i+1}-E_{i+1,i}+\sum_{j\neq i,j\neq i+1}E_{j,j})-I_n=E_{i,i}$. Ce qui montre de $E_{i,i}$ pour $1\leq i\leq n$ est engendré par les éléments de $S\ell_p(K)$.
2) Supposons d'abord que $1=i_1,2=i_2,\ldots,p=i_p$. Alors on écrit toute matrice de $[C_1C_2\ldots C_n]$ de $M_{p,n}(K)$ sous la forme $[U,V]$ où $U=[C_1C_2\ldots C_p],V=[C_{p+1}C_{p+2}\ldots C_n]$.
Montrons que $[U,V]=\sum_i [U_iV_i]$ où U_i est inversible. Par 1. , il existe $U_1,U_2,\ldots,U_s$ inversibles avec $U=U_1+U_2+\ldots+U_s$, ainsi $[U,V]=[U_1V]+[U_2O]+\ldots+[U_sO]$. Ce qui montre 2. pour $1=i_1,2=i_2,\ldots,p=i_p$.
Pour le cas général, il suffit de multiplier l'égalité ci-dessus à droite par une matrice associée à une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma(1)=i_1,\sigma(2)=i_2,\ldots,\sigma(p)=i_p$.

Remarque La partie 1. peut être généralisée comme il suit. Soient $1\leq r\leq p\leq n$ des entiers. Alors les matrices de rang r de $M_{p,n}(K)$ engendrent le K-espace vectoriel $M_{p,n}(K)$.

Bibliographie

[Fl] H. Flanders, *On spaces of linear transformations with bounded rank*, J. London Math. Soc. 37 (1962), 10-16.
[Fr] J. Fresnel *Algèbre des matrices*, Hermann, Paris, 1997 ou 2011.
[M] R. Meshulam, *On the maximal rank in a subspaceof matrices*, Quat. J. Math. Oxford Ser. (2) 36 (1985), no. 142, 225-229
[L] Lorenzini Dino *Elementary Divisor Domains and Bézout Domains* J. of Algebra, 371 609-619, 2012.
[S, V] Shifrin T. et Varley R. *notes privées*

Jean Fresnel, le 16 août 2012

fresnel@math.u-bordeaux1.fr