

Sur les ellipsoïdes pleins inscrits dans (resp. circonscrits à) un compact

Sommaire

0. Introduction

1. L'énoncé du théorème et ses corollaires
2. L'ensemble convexe des ellipsoïdes
3. Sur la convexité de la fonction volume
4. Sur les ellipsoïdes contenus dans la réunion convexe de deux ellipsoïdes
5. La démonstration du théorème
6. Application au triangle
7. Application au simplexe en dimension $n \geq 3$
8. La polaire d'un ellipsoïde
9. Une démonstration directe pour le cas du triangle
10. Sur la convexité de la fonction déterminant
11. Bibliographie

0. Introduction

Le théorème bien connu de Loewner-Behrend-John dit que si K est un compact d'intérieur non vide d'un espace vectoriel euclidien, alors il existe un unique ellipsoïde plein centré en 0 , contenant K et de volume minimum.

L'utilisation de la polarité relativement à 0 , permet de montrer le résultat "dual" qui s'énonce ainsi. Soient K un compact convexe, contenant 0 dans son intérieur, alors il existe un unique ellipsoïde plein centré en 0 , contenu dans K , de volume maximum.

Géométriquement, il est assez naturel de s'intéresser à la version affine de ces problèmes, i.e. en considérant tous les ellipsoïdes de centre non fixé. C'est bien entendu, un peu plus difficile. D'autre part la polarité ne semble pas efficace pour passer du premier problème au second. C'est aussi bien ainsi, puisque cela nous a permis de résoudre le second problème sans l'usage de cet artifice.

L'application au triangle en dimension 2 et au simplexe en dimension supérieure est particulièrement intéressante même si le résultat

est celui attendu dans le cas régulier ; i.e. les ellipsoïdes ne sont autres que les sphères circonscrites et inscrites. Pour se convaincre de la profondeur de la méthode, on donne une démonstration directe dans le cas du triangle qui reste bien calculatoire.

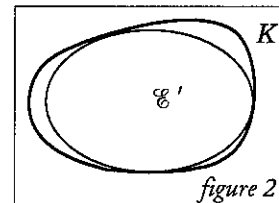
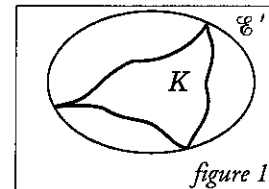
1. L'énoncé du théorème et ses corollaires

Définition Soient E un \mathbb{R} -espace affine, attaché à un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Une partie \mathcal{E}' de E est appelée *ellipsoïde plein* s'il existe une forme quadratique q sur T , définie positive, $o \in E$ tels que $\mathcal{E}' = \{ m \in E \mid q(m - o) \leq 1 \}$.

Théorème de Loewner-Behrend-John (version affine)

Soient E un espace affine euclidien, attaché à un espace vectoriel euclidien T , K un compact d'intérieur non vide E .

1. Il existe un unique ellipsoïde plein de volume minimum et contenant K .
2. On suppose en plus que K est convexe. Alors il existe un unique ellipsoïde plein de volume maximum et contenu dans K .



Corollaire 1 (boules et boules euclidiennes) Soient E un espace affine euclidien attaché à un espace vectoriel T , $\text{vol}(\cdot)$ une mesure de Lebesgue sur T de volume normalisé par le volume de l'hypercube engendré par une base orthonormale de T . Soient $\|\cdot\|$ une norme sur le \mathbb{R} -espace vectoriel T , $o \in E$ $B(o, 1) := \{ x \in E \mid \|x - o\| \leq 1 \}$.

1. Alors il existe une et une seule boule unité euclidienne, de volume minimum et contenant $B(o, 1)$; i.e. il existe un et un seul couple (o', q) où $o' \in E$, q est une forme quadratique, définie positive telle que $\{ x \in E \mid q(x - o') \leq 1 \} \supset B(o, 1)$ et soit de volume minimum. De plus, on a $o = o'$.
2. Alors il existe une et une seule boule unité euclidienne, de volume maximum et contenue dans $B(o, 1)$; i.e. il existe un et un seul couple (o', q) où $o' \in E$, q est une forme quadratique, définie positive telle que $\{ x \in E \mid q(x - o') \leq 1 \} \subset B(o, 1)$ et soit de volume maximum. De plus, on a $o = o'$.

Démonstration 1) Montrons 1. . Comme toutes les normes sur T sont équivalentes, $B(o, 1)$ est un compact d'intérieur non vide, ainsi le

théorème partie 1. dit qu'il existe un et un seul couple (o', q) tel que $\{x \in E \mid q(x - o') \leq 1\} \supset B(o, 1)$ et soit de volume minimum. Soit h l'homothétie de centre o et de rapport -1 , alors $h(B(o, 1)) = B(o, 1)$. Il suit de l'unicité que $B(o', q) := \{x \in E \mid q(x - o') \leq 1\}$ est invariant par h . Comme $B(o', q)$ est aussi invariant globalement par l'homothétie h' de centre o' et de rapport -1 , il suit que $B(o', q)$ est invariant par $h'h$ qui est la translation de vecteur $2(o' - o)$; donc $B(o', q)$ est invariant par la translation de $2z(o' - o)$ où $z \in \mathbb{Z}$. Sachant que $B(o', q)$ est borné, cela montre que $o = o'$.

2) Montrons 2. . L'inégalité triangulaire montre que $B(o, 1)$ est convexe. Alors une méthode analogue à ce qui précède conduit au résultat.

Corollaire 2 (sur les sous-groupes compacts du groupe affine) Soient E un \mathbb{R} -espace affine, attaché à un \mathbb{R} -espace vectoriel T , G un sous-groupe compact du groupe affine E . Alors il existe une forme quadratique définie positive sur T , $o \in E$ tel que $G \subset \{m \mapsto o + u(m - o) \mid u \in O(q)\}$; ainsi les éléments de G ont un point fixe commun et G est isomorphe à un sous-groupe du groupe orthogonal de q . Soient E un espace affine euclidien, $o_1 \in E$, G_1 le sous-groupe de $\mathcal{I}s(E)$ qui est le groupe d'isotropie de o_1 , i.e. $G_1 = \{\sigma \in \mathcal{I}s(E) \mid \sigma(o_1) = o_1\}$. Soient G le groupe affine de E , H un sous-groupe compact maximal de G , alors il existe $f \in G$ tel que $fGf^{-1} = G_1$.

Démonstration Soient K un compact d'intérieur non vide (par exemple, une boule fermée de rayon positif), $K_1 := \bigcup_{\sigma \in G} \sigma(K)$, alors K_1 est compact d'intérieur non vide et $\sigma(K_1) = K_1$ pour tout $\sigma \in G$. Soit $B(o, q) := \{m \in E \mid q(m - o) \geq 1\}$, l'unique ellipsoïde plein de volume minimum contenant K_1 . Soit $\sigma \in G$ et u son application linéaire associée. Alors $\sigma(B(o, q)) = B(\sigma(o), qu^{-1}) \supset \sigma(K_1) = K_1$, on a donc $\text{vol}(B(\sigma(o), qu^{-1})) \geq \text{vol}(B(o, q))$; i.e. $|\det u| \geq 1$. De même en considérant σ^{-1} on a $|\det u| \leq 1$. Cela montre que $\text{vol}(B(\sigma(o))) = \text{vol}(B(\sigma(o), qu^{-1}))$, il suit du théorème partie 1. et tenant compte de l'unicité que $B(o, q) = B(\sigma(o), qu^{-1})$ et donc que $o = \sigma(o)$ et $q = qu^{-1}$, i.e. $u \in O(q)$. Ce qui est le corollaire.

2. L'ensemble convexe des ellipsoïdes

Soient E un \mathbb{R} -espace affine, attaché à un \mathbb{R} -espace vectoriel T de dimension finie.

2.1. L'ensemble des fonctions polynômes de degré 2

Soient \mathcal{A} le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de E dans \mathbb{R} , muni de sa structure canonique d'espace affine, \mathcal{P}_2 le sous-ensemble des fonctions polynômes de degré 2. Si $e \in E$, un polynôme F de degré 2 sur E s'écrit sous la forme $F(m) = q_F(m - e) + \ell_{F,e}(m - e) + d_{F,e}$ où q_F (resp. $\ell_{F,e}, d_{F,e}$) est une forme quadratique non nulle sur T (resp. une forme linéaire, une constante) et q_F ne dépend pas du point e . Le sous-ensemble \mathcal{P}_2^{++} des polynômes F de degré 2 sur E dont la forme quadratique q_F associée est définie positive, est une partie convexe de l'espace affine \mathcal{A} . Soit $F \in \mathcal{P}_2^{++}$, alors il existe $o \in E$, $\mu > 0$, uniques tels que $\mu F(m) = q_F(m - o) - 1$ pour tout $m \in E$.

2.2. Le convexe des ellipsoïdes

Soient \mathcal{Q}^{++} l'ensemble des formes quadratiques, définies, positives sur T , $\mathcal{F} := \mathcal{Q}^{++} \times E$, $\rho: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}_2^{++}$ définie par $\rho(q, o)$ est l'application $m \mapsto q(m - o) - 1$. Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence sur \mathcal{P}_2^{++} définie par $F \mathcal{R} F'$ si et seulement si il existe $\mu > 0$ tel que $F' = \mu F$. Soit $\overline{\rho(q, o)}$ la classe d'équivalence de $\rho(q, o)$ modulo \mathcal{R} , alors l'application $(q, o) \mapsto \overline{\rho(q, o)}$ est une bijection de \mathcal{F} sur $P_2^{++} := \frac{\mathcal{P}_2^{++}}{\mathcal{R}}$. Cet ensemble P_2^{++} est l'ensemble des ellipsoïdes.

Si $(q_1, o_1), (q_2, o_2) \in \mathcal{F}$ et si $\lambda \in [0, 1]$, alors la fonction $m \mapsto \lambda(q_1(m - o_1) - 1) + (1 - \lambda)(q_2(m - o_2) - 1)$ est un polynôme de degré 2 sur E dont la forme quadratique associée est $\lambda q_1 + (1 - \lambda) q_2$, qui est définie positive. Par 1., il existe $\mu > 0$ et $o \in E$, uniques tels que $\lambda(q_1(m - o_1) - 1) + (1 - \lambda)(q_2(m - o_2) - 1) = \mu \left(\frac{\lambda q_1 + (1 - \lambda) q_2}{\mu} (m - o) - 1 \right)$.

2.3. La fonction volume de l'ellipsoïde plein

Soient \overline{F} l'ellipsoïde associé à la fonction F , on appelle *ellipsoïde plein* associé à \overline{F} l'ensemble $\overline{F'} := \{m \in E \mid F(m) \leq 0\}$; cet ensemble est bien associé à \overline{F} et c'est une partie convexe de E ; plus précisément, c'est l'enveloppe convexe de \overline{F} .

On appelle volume de \overline{F} ou de $\overline{F'}$, le volume de l'ensemble \overline{F} relativement à une mesure de Lebesgue sur E pour laquelle le volume de l'hypercube associé à une base orthonormale est l'unité, on le note $\text{vol}(F)$ ou bien $\text{vol}(F')$. Si $\overline{F} = \overline{\rho(q, o)}$, on a $\text{vol}(\overline{\rho(q, o)}) = \det(q)^{-\frac{1}{2}} s_n$, où s_n est le volume de la sphère de rayon 1.

2.4. Une distance sur P_2^{++} ou sur \mathcal{F}

Soient $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur T , \mathcal{Q} le \mathbb{R} -espace vectoriel des formes quadratiques sur T . On définit une norme sur \mathcal{Q} par $\| q \| = \max_{\| x \| = 1} q(x)$. Cela conduit à une distance sur \mathcal{F} définie par $d((q_1, o_1); (q_2, o_2)) = \max(\| q_1 - q_2 \|, \| o_1 - o_2 \|)$. Ainsi la bijection de \mathcal{F} sur P_2^{++} permet de définir une distance sur P_2^{++} .

3. Sur la convexité de la fonction volume

Lemme de convexité Soient E un espace affine euclidien, attaché à un espace vectoriel euclidien T , q_i une forme quadratique définie positive sur T , $o_i \in E$, $i=1, 2$. Soient \mathcal{E}'_i l'ellipsoïde plein défini par

$$\mathcal{E}'_i := \{ m \in E \mid q_i(m - o_i) \leq 1 \}, \lambda \in]0, 1[,$$

$\mathcal{E}' := \{ m \in E \mid \lambda q_1(m - o_1) + (1 - \lambda) q_2(m - o_2) \leq 1 \}$. Si $\mathcal{E}' \neq \emptyset$ et si \mathcal{E}' n'est pas réduit à un point, alors \mathcal{E}' est l'ellipsoïde plein défini par

$$\mathcal{E}' = \{ m \in E \mid \left(\frac{\lambda q_1 + (1 - \lambda) q_2}{\delta} \right) (m - o_3) \leq 1 \}; o_3 \text{ est l'unique point tel que pour}$$

tout $t \in T$, on ait $(1 - \lambda) \hat{q}_2(t, o_2 - o_1) = (\lambda \hat{q}_1 + (1 - \lambda) \hat{q}_2)(t, o_3 - o_1)$ et

$\delta := 1 - \lambda \hat{q}_1(o_2 - o_1, o_3 - o_1)$ avec $0 < \delta \leq 1$, enfin \hat{q}_i est la forme bilinéaire symétriquement associée à q_i . Si en plus $(q_1, o_1) \neq (q_2, o_2)$, on a donc $\text{vol}(\mathcal{E}') < \delta^{\frac{n}{2}} (\lambda \text{vol}(\mathcal{E}'_1) + (1 - \lambda) \text{vol}(\mathcal{E}'_2))$; de plus pour $o_1 = o_2$, on a $\delta = 1$ et pour $o_1 \neq o_2$, on a $0 < \delta < 1$.

Démonstration

α) Il existe un unique point o_3 , le centre de \mathcal{E}' tel que pour tout $m \in E$, on ait

$$(1) \quad \lambda q_1(m - o_1) + (1 - \lambda) q_2(m - o_2) - 1 = (\lambda q_1 + (1 - \lambda) q_2)(m - o_3) - \delta ,$$

avec $\delta \in \mathbb{R}$.

On pose $a = o_2 - o_1$, $b = o_3 - o_1$, ainsi (1) veut dire que

$$(2) \quad 2(1 - \lambda) \hat{q}_2(t, -a) = 2(\lambda \hat{q}_1 + (1 - \lambda) \hat{q}_2)(t, -b) .$$

Comme $\lambda q_1 + (1 - \lambda) q_2$ est défini positif, donc non dégénéré, on a bien un tel b et il est unique. Il suit que

$$(1 - \lambda) q_2(a) - 1 = (\lambda q_1 + (1 - \lambda) q_2)(b) - \delta , \text{ i.e.}$$

$$(3) \quad \delta = 1 + (\lambda q_1 + (1 - \lambda) q_2)(b) - (1 - \lambda) q_2(a) .$$

En utilisant (2) pour $t = a$ et $t = b$, on a

$$(1 - \lambda) q_2(a) = (\lambda \hat{q}_1 + (1 - \lambda) \hat{q}_2)(a, b) ,$$

$$(1 - \lambda) \hat{q}_2(b, a) = (\lambda q_1 + (1 - \lambda) q_2)(b) .$$

On additionne et ça donne

$$(4) \quad (1 - \lambda) q_2(a) = \lambda \hat{q}_1(a, b) + (\lambda q_1 + (1 - \lambda) q_2)(b) .$$

Par (4) et (3), on a

(5) $\delta = 1 - \lambda \hat{q}_1(a, b)$.

β) Montrons que $\hat{q}_1(a, b) \geq 0$ et que $\hat{q}_1(a, b) > 0$ si $a \neq 0$, i.e. $o_1 \neq o_2$.

Soient $(e_i)_i$ une base orthonormale relativement à $(1 - \lambda)q_2$ et orthogonale relativement à λq_1 . On a donc $\text{Mat}((1 - \lambda)q_2; e_i) = I_n$, $\text{Mat}(\lambda q_1; e_i) = D$ qui est la matrice diagonale de diagonale (d_1, d_2, \dots, d_n) avec $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n > 0$. Soient X (resp. Y, Z) les vecteurs qui représentent t (resp. a, b). Alors (2) s'écrit

(6) ${}^t X I_n Y = {}^t X (D + I_n) Z$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. On a donc $Z = (D + I_n)^{-1} Y$. Il suit que

(7) $\lambda \hat{q}_1(a, b) = {}^t Y D (D + I_n)^{-1} Y$; comme $D(D + I_n)^{-1}$ est symétrique définie positive, on a donc $\lambda \hat{q}_1(a, b) > 0$ si $Y \neq 0$, i.e. $a \neq 0$.

γ) Il suit de β) et (5) que $\delta < 1$, si $a \neq 0$, $\delta = 1$, si $a = 0$.

Si donc $\delta > 0$, i.e. $\text{vol}(\mathcal{E}') > 0$, on a

$\text{vol}(\mathcal{E}') = \text{vol}(\{m \in E \mid (\frac{\lambda q_1 + (1-\lambda)q_2}{\delta})(m - o_3) \leq 1\})$. On a donc

$\text{vol}(\mathcal{E}') = \det(\frac{\lambda q_1 + (1-\lambda)q_2}{\delta})^{-\frac{1}{2}} s_n$ où s_n est le volume de la sphère unité. Or

par le paragraphe 10, on a

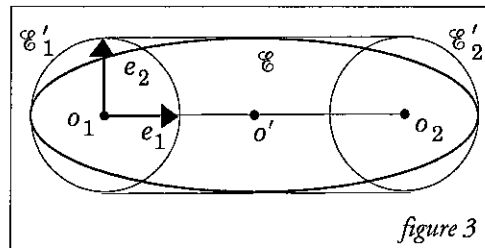
$\det(\frac{\lambda q_1 + (1-\lambda)q_2}{\delta})^{-\frac{1}{2}} \leq \lambda \det(\frac{q_1}{\delta})^{-\frac{1}{2}} + (1-\lambda) \det(\frac{q_2}{\delta})^{-\frac{1}{2}}$, avec inégalité stricte si

$q_1 \neq q_2$. Le résultat suit de cela.

4. Sur les ellipsoïdes contenus dans la réunion convexe de deux ellipsoïdes

Lemme fondamental Soient E un espace affine euclidien, attaché à un espace vectoriel euclidien T , $\mathcal{E}'_i := \{m \in E \mid q_i(m - o_i) \leq 1\}$ où $o_i \in E$, q_i est une forme quadratique sur T définie positive et $i = 1, 2$. On suppose que $\mathcal{E}'_1 \neq \mathcal{E}'_2$, i.e. $(q_1, o_1) \neq (q_2, o_2)$; et que $\det q_1 = \det q_2$, i.e. $\text{vol}(\mathcal{E}'_1) = \text{vol}(\mathcal{E}'_2)$. Alors il existe un ellipsoïde plein \mathcal{E}' contenu dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{E}'_1 \cup \mathcal{E}'_2$ avec $\text{vol}(\mathcal{E}') > \text{vol}(\mathcal{E}'_1)$. On peut décrire \mathcal{E}' comme il suit.

1. Si $q_1 = q_2$ et donc $o_1 \neq o_2$, il existe une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de T qui est orthonormale pour q_1 et telle que $e_1 = 2\lambda(o_2 - o_1)$ avec $\lambda > 0$. Soit q la forme quadratique sur T telle que $\text{Mat}(q; e_i)$ soit la matrice diagonale,



de diagonale $((1 + \lambda)^{-2}, 1, \dots, 1)$. Soient $o' := \frac{1}{2}(o_1 + o_2)$, \mathcal{E}' l'ellipsoïde plein défini par $\mathcal{E}' := \{m \in E \mid q(m - o') \leq 1\}$. Alors \mathcal{E}' est dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{E}'_1 \cup \mathcal{E}'_2$ et on a $\text{vol}(\mathcal{E}') = (1 + \lambda) \text{vol}(\mathcal{E}'_1)$.

2. Si $q_1 \neq q_2$, il existe une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de T qui est orthonormale pour q_1 et orthogonale pour q_2 . Ainsi $\text{Mat}(q_1; e_i) = I_n$ et $\text{Mat}(q_2; e_i)$ est la matrice diagonale, de diagonale $(\alpha_1^{-2}, \alpha_2^{-2}, \dots, \alpha_n^{-2})$. Soient u l'automorphisme de T tel que $u(e_i) = \alpha_i e_i$, σ l'application affine telle que

$\sigma(o_1 + t) = o_2 + u(t)$ pour tout $t \in T$, alors on a $\sigma(\mathcal{E}'_1) = \mathcal{E}'_2$. Soit

$\mathcal{E}' := \frac{1}{2}(\mathbb{1}_E + \sigma)(\mathcal{E}'_1)$, alors \mathcal{E}' est un ellipsoïde plein, contenu dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{E}'_1 \cup \mathcal{E}'_2$ et on a $\text{vol}(\mathcal{E}') > \text{vol}(\mathcal{E}'_1)$ parce que $\det(\frac{1}{2}(\mathbb{1}_T + u)) > 1$.

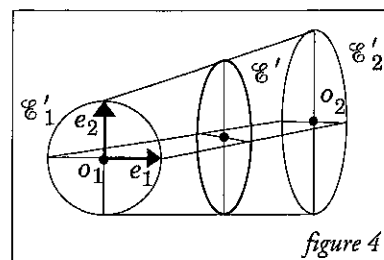


figure 4

Démonstration 1) Il s'agit de montrer 1. . Soit $x := o_1 + \sum_{i=1}^n x_i e_i$, un point de \mathcal{E}' , on a donc $(\frac{x_1 - \lambda}{1 + \lambda})^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$. Soit $\xi := \frac{x_1 - \lambda}{1 + \lambda}$, alors le segment $S := [-|\xi| e_1, (2\lambda + |\xi|) e_1]$ a pour milieu λe_1 et pour longueur $2|\xi| + 2\lambda$. Comme $|\xi| \leq 1$, on a $x_1 e_1 \in S$, ainsi il existe $\mu \in [0, 1]$ tel que $x_1 e_1 = \mu(-|\xi| e_1) + (1 - \mu)((2\lambda + |\xi|) e_1)$. Soient $y_1 := -|\xi| e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, $y_2 := (2\lambda + |\xi|) e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$; on a $x = \mu y_1 + (1 - \mu) y_2$ et $y_i \in \mathcal{E}'_i$. Cela montre bien que \mathcal{E}' est contenu dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{E}'_1 \cup \mathcal{E}'_2$.

2) Pour montrer 2., il suffit de montrer que $\det(\frac{1}{2}(\mathbb{1}_T + u)) > 1$, i.e.

$\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i) > 2^n$. Ceci repose sur la formule

$$(1) \quad \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i)^{\frac{1}{n}} > 1 + (\prod_{i=1}^n \alpha_i)^{\frac{1}{n}}, \text{ sachant que } \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = 1.$$

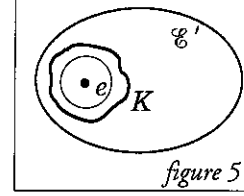
La formule (1) est issue du fait que $t \mapsto \log(1 + e^t)$ est strictement convexe. On a donc $\log(1 + e^{\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}}) < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 + e^{t_i})$, et donc $\log(1 + e^{\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}}) < \frac{1}{n} \log(\prod_{i=1}^n (1 + e^{t_i}))$. En posant $\alpha_i = e^{t_i}$, on a bien la formule souhaitée (on peut aussi consulter le paragraphe 10).

Remarque On pourrait aussi considérer $\mathcal{E}' := (\lambda \mathbb{1}_E + (1 - \lambda)\sigma)(\mathcal{E}'_1)$, pour la partie 2. .

5. La démonstration du théorème

1) Il s'agit de montrer 1. .

1.1) Le premier objectif consiste à montrer que le volume minimum est atteint pour un ellipsoïde contenant K . On adopte les notations et les propriétés du paragraphe 2 .



1.1.1) Soit e un point intérieur à K . Soit

$\mathcal{F}_1 := \{ (q, o) \in \mathcal{F} \mid \text{pour tout } m \in K, \text{ on ait } q(m - o) \leq 1 \}$. Montrons que la projection de \mathcal{F}_1 dans \mathcal{Q}^{++} est bornée. Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base orthonormale de T qui est orthogonale pour q , alors quitte à permuter les indices, on a $\|q\| = q(e_1)$. Soient $r > 0$ tel que la boule fermée de centre e et de rayon r soit contenue dans K , $m \in L$ avec $m - e = \varepsilon r e_1$ où $\varepsilon = \pm 1$. On a donc $m - o = (\varepsilon r + \theta_1) e_1 + \theta_2 e_2 + \dots + \theta_n e_n$, ainsi $1 \geq q(m - o) \geq (\varepsilon r + \theta_1)^2 q(e_1)$. Avec un bon choix de ε , on conclut que $1 \geq r^2 q(e_1)$, i.e. $\|q\| \leq \frac{1}{r^2}$.

1.1.2) Soient $R > 0$ tel que K soit contenu dans la boule fermée de centre e et de rayon R , $\mathcal{F}_2 := \{ (q, o) \in \mathcal{F}_1 \mid (\det q)^{-\frac{1}{2}} \leq R^n \}$. Alors on a $\min \{ \text{vol}(\overline{\rho(q, o)}) \mid (q, o) \in \mathcal{F}_1 \} = \min \{ \text{vol}(\overline{\rho(q, o)}) \mid (q, o) \in \mathcal{F}_2 \}$.

1.1.3) Montrons que \mathcal{F}_2 est fermé. Si $(q, o) = \lim_k (q_k, o_k)$ avec

$(q_k, o_k) \in \mathcal{F}_2$, on a bien $(\det q)^{-\frac{1}{2}} \leq R^n$. Si $m \in K$, on a $q_k(m - o_k) \leq 1$, il suit facilement, par continuité, que $q(m - o) \leq 1$. Ainsi donc \mathcal{F}_2 est fermé.

1.1.4) Montrons que \mathcal{F}_2 est borné. Par 1.1.1) la projection de \mathcal{F}_2 sur la première composante est bornée, il reste donc à montrer que sa projection sur sa seconde composante est bornée. Soit $(q, o) \in \mathcal{F}_2$, (e_1, e_2, \dots, e_n) une base orthonormée pour T , orthogonale pour q avec $q(e_1) \geq q(e_2) \geq \dots \geq q(e_n)$. Par 1.1.1) , on a $q(e_1) \leq \frac{1}{r^2}$ et par 1.1.2)

$(q(e_1) q(e_2) \dots q(e_n))^{-\frac{1}{2}} \leq R^n$, donc $q(e_n) \geq \frac{r^{2(n-1)}}{R^n}$. Ensuite on a

$1 \geq q(e - o) \geq \|e - o\| q(e_n)$. Il suit de cela que la projection sur la seconde composante est bornée ; ainsi \mathcal{F}_2 est borné.

1.1.5) Par 1.1.3) et 1.1.4) \mathcal{F}_2 est compact. Sachant que la fonction volume est une application continue de \mathcal{F} dans \mathbb{R} , il existe donc $(q, o) \in \mathcal{F}_2$ qui réalise le minimum de $\text{vol}(\overline{\rho(q, o)})$ sur \mathcal{F}_2 , donc sur \mathcal{F}_1 par 1.1.2) .

1.2) Montrons que le minimum est unique. Soient $(q_1, o_1), (q_2, o_2) \in \mathcal{F}_1$, avec $(q_1, o_1) \neq (q_2, o_2)$, $\text{vol}(\overline{\rho(q_1, o_1)}) = \text{vol}(\overline{\rho(q_2, o_2)})$. Soient $\lambda \in]0, 1[$, \mathcal{G}' l'ellipsoïde défini par

$\mathcal{E}' := \{ m \in E \mid (\lambda q_1(m - o_1) + (1 - \lambda) q_2(m - o_2)) \leq 1 \}$, alors pour λ proche de 1, l'ellipsoïde \mathcal{E}' est non vide et non réduit à un point. On a facilement $K \subset \mathcal{E}'$. Il suit du paragraphe 3 que

$\text{vol}(\mathcal{E}') < \delta^{\frac{n}{2}} (\lambda \text{vol}(\overline{\rho(q_1, o_1)}) + (1 - \lambda) \text{vol}(\overline{\rho(q_2, o_2)}))$; \mathcal{E}' est un ellipsoïde de $\rho(\mathcal{F}_1)$ avec $\text{vol}(\mathcal{E}') < \text{vol}(\overline{\rho(q_1, o_1)})$, ce qui contredit la définition de (q_1, o_1) et (q_2, o_2) . Il suit donc que le minimum est unique.

2) Il s'agit de montrer 2. .

2.1) Le premier objectif consiste à montrer que le volume maximum est atteint pour un ellipsoïde contenu dans K .

2.1.1) Soient e un point intérieur à K , $r > 0$ tel que la boule fermée de centre e et de rayon r soit contenue dans K . Soient

$$\mathcal{G}_1 := \{ (q, o) \in \mathcal{F} \mid \overline{\rho(q, o)'} := \{ m \in E \mid q(m - o) \leq 1 \} \subset K \},$$

$$\mathcal{G}_2 := \{ (q, o) \in \mathcal{G}_1 \mid B(e, r) \subset \overline{\rho(q, o)'} \}.$$

$$\max \{ (\text{vol} \overline{\rho(q, o)'}) \mid (q, o) \in \mathcal{G}_1 \} = \max \{ (\text{vol} \overline{\rho(q, o)'}) \mid (q, o) \in \mathcal{G}_2 \}.$$

2.1.2) La projection de \mathcal{G}_2 sur la première composante est bornée; il suffit de copier 1.1.1).

2.1.3) L'ensemble \mathcal{G}_2 est borné. En effet si $(q, o) \in \mathcal{G}_2$, on a $o \in K$, ainsi

$\|o - e\|$ est borné, ce qui montre avec 2.1.2) que \mathcal{G}_2 est un ensemble borné.

2.1.4) Montrons que \mathcal{G}_2 est fermé. Soit $(q, o) = \lim_k (q_k, o_k)$ avec

$$(q_k, o_k) \in \mathcal{G}_2.$$

2.1.4.1) Soit m tel que $q(m - o) < 1$, alors $m \in K$. En effet pour k assez grand, on a $q_k(m - o_k) < 1$, ce qui prouve que $m \in K$.

2.1.4.2) Soit m tel que $q(m - o) = 1$, alors $m \in K$. Soit la suite $(m_\ell)_\ell$ définie par $m_\ell - o = (1 - \frac{1}{\ell})(m - o)$; on a donc $q(m_\ell - o) < 1$ et par 2.1.4.1),

on a $m_\ell \in K$. Enfin, comme K est compact, donc fermé, on a $m \in K$. Cela prouve finalement que $(q, o) \in \mathcal{G}_1$.

2.1.4.3) Soit m tel que $\|m - e\| \leq r$, alors $q(m - o) \leq 1$. En effet, on a $q_k(m - o_k) \leq 1$ et par limite, on a aussi $q(m - o) \leq 1$. Cela montre avec 2.1.4.2) que $(q, o) \in \mathcal{G}_2$. Ainsi \mathcal{G}_2 est fermé.

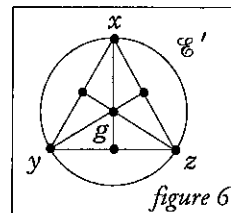
2.1.5) Par 2.1.3) et 2.1.4) \mathcal{G}_2 est compact. Sachant que la fonction volume est une application continue de \mathcal{F} dans \mathbb{R} , il existe donc $(q, o) \in \mathcal{G}_2$ qui réalise le maximum de $\text{vol}(\overline{\rho(q, o)'})$ sur \mathcal{G}_2 , donc sur \mathcal{G}_1 par 2.1.1).

2.2) Montrons que le maximum est unique. Soient $(q_1, o_1), (q_2, o_2) \in \mathcal{G}_1$ avec $(q_1, o_1) \neq (q_2, o_2)$, $\text{vol}(\overline{\rho(q_1, o_1)'}) = \text{vol}(\overline{\rho(q_2, o_2)'})$. Par le lemme fondamental (paragraphe 4), il existe un ellipsoïde plein \mathcal{E}' contenu dans l'enveloppe convexe de $\overline{\rho(q_1, o_1)'} \cup \overline{\rho(q_2, o_2)'}$, donc dans K , avec $\text{vol}(\mathcal{E}') > \text{vol}(\mathcal{E}'_1)$. Cela contredit la définition de \mathcal{E}'_1 .

6. Application au triangle

6.1. Le cas du triangle équilatéral

Soient E le plan euclidien, (x, y, z) un triangle équilatéral de E . On identifie \mathfrak{S}_3 au groupe des permutations de l'ensemble $\{x, y, z\}$; si $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, il existe une unique isométrie $\hat{\sigma}$ du plan euclidien E tel que $\hat{\sigma}(x) = \sigma(x)$, $\hat{\sigma}(y) = \sigma(y)$, $\hat{\sigma}(z) = \sigma(z)$.

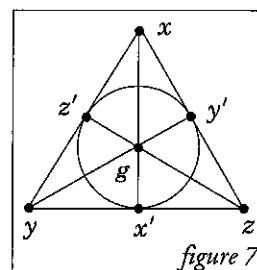


Facilement l'application $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ définit un isomorphisme de \mathfrak{S}_3 sur $\mathcal{P}_s(\{x, y, z\})$.

Soit \mathcal{E}' l'unique ellipse pleine, contenant $\{x, y, z\}$ et d'aire minimum. L'unicité de \mathcal{E}' implique que $\hat{\sigma}(\mathcal{E}') = \mathcal{E}'$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$; ainsi on a $\mathcal{P}_s(\{x, y, z\}) \subset \mathcal{P}_s(\mathcal{E}')$. Si \mathcal{E}' n'est pas un cercle plein, on a $\mathcal{P}_s(\mathcal{E}') \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$; comme $o(\mathcal{P}_s(\{x, y, z\})) = 6$, il suit que \mathcal{E}' est un cercle plein. Facilement le centre du cercle est invariant par $\hat{\sigma}$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$; il s'ensuit que le centre du cercle est $g := \frac{1}{3}(x + y + z)$.

Sachant que \mathcal{E}' est le cercle plein d'aire minimum contenant $\{x, y, z\}$, c'est donc le cercle plein de centre g , circonscrit à $\{x, y, z\}$.

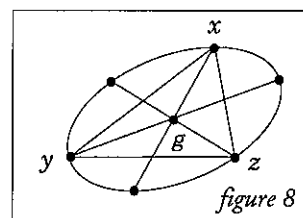
Soient maintenant \mathcal{T} l'enveloppe convexe de $\{x, y, z\}$, \mathcal{E}' l'unique ellipse pleine, d'aire maximum, contenue dans \mathcal{T} . Une méthode analogue à ce qui précède montre que \mathcal{E}' est le cercle de centre g , inscrit dans le triangle \mathcal{T} , i.e. passant par x', y', z' qui sont respectivement le milieu de y et z , de z et x et de x et y .



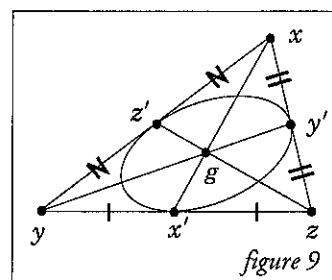
6.2. Le cas du triangle quelconque

Corollaire Soient E le plan euclidien, (x, y, z) un triangle, $g := \frac{1}{3}(x + y + z)$.

1. Soient \mathcal{E} l'unique ellipse de centre g passant par x, y, z , \mathcal{E}' l'enveloppe convexe de \mathcal{E} . Alors \mathcal{E}' est l'unique ellipse pleine, d'aire minimum contenant x, y, z .



2. Soient \mathcal{T} l'enveloppe convexe de $\{x, y, z\}$, \mathcal{E} l'unique ellipse de centre g passant par les milieux de x et y , y et z , z et x , \mathcal{E}' l'enveloppe convexe de \mathcal{E} . Alors \mathcal{E}' est l'unique ellipse pleine d'aire maximum, contenue dans \mathcal{T} .



Démonstration Il suffit de considérer une transformation affine qui envoie un triangle équilatéral sur le triangle (x, y, z) et d'appliquer 6.1. .

Remarque Soient (x, y, z) un triangle, $g := \frac{1}{3}(x+y+z)$, x' (resp. y', z') le milieu de y et z , z et x , x et y , \mathcal{E} l'ellipse de centre g passant par x', y', z' . Alors \mathcal{E} est tangente aux côtés du triangle (x, y, z) .

En effet $V(x, g)$ coupe $V(y', z')$ en le milieu de y' et z' . Il s'ensuit que $V(x, g)$ est le diamètre conjugué de la direction de $V(y, z)$. Comme la droite $V(y, z)$ coupe ce diamètre en un point x , il s'ensuit aussi facilement que $V(y, z)$ est tangente à \mathcal{E} .

7. Application au simplexe en dimension $n \geq 3$

Définition Soient E un espace affine, attaché à un espace vectoriel euclidien T de dimension n . On appelle *simplexe régulier de longueur d'arête 1*, un repère affine (a_0, a_1, \dots, a_n) tel que $\|a_i - a_j\| = 1$ pour tout $i \neq j$.

7.1. Le groupe des isométries d'un simplexe régulier

Soient $\mathcal{P}_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ un simplexe régulier de longueur d'arête 1, \mathfrak{S}_{n+1} le groupe des permutations de l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, il existe une et une seule isométrie $\hat{\sigma}$ de E telle que $\hat{\sigma}(a_i) = a_{\sigma(i)}$ (M.M.G. 1.4.3.1. partie 2). Il suit facilement de cela que $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ est isomorphisme de \mathfrak{S}_{n+1} sur le groupe $\mathcal{I}(\mathcal{P}_n)$ des isométries f de E telle que $f(\{a_0, a_1, \dots, a_n\}) = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Si $g := \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$, on a $\hat{\sigma}(g) = g$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$. Réciproquement si $m = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ avec $1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ et si $\hat{\sigma}(m) = m$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, on a $m = \lambda_0 a_{\sigma(0)} + \lambda_1 a_{\sigma(1)} + \dots + \lambda_n a_{\sigma(n)}$, il suit de cela que $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n$ et donc que $m = g$.

7.2. L'ellipsoïde de volume minimum contenant l'enveloppe convexe d'un simplexe régulier

Soient \mathcal{P}'_n l'enveloppe convexe d'un simplexe régulier \mathcal{P}_n de longueur d'arête 1, \mathcal{E}' l'unique ellipsoïde plein, de volume minimum contenant \mathcal{P}'_n . Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\hat{\sigma}(\mathcal{P}'_n) = \mathcal{P}'_n$ et $\hat{\sigma}(\mathcal{E}') \supset \hat{\sigma}(\mathcal{P}'_n) = \mathcal{P}'_n$; comme $\text{vol}(\mathcal{E}') = \text{vol}(\hat{\sigma}(\mathcal{E}'))$ l'unicité de \mathcal{E}' implique que $\hat{\sigma}(\mathcal{E}') = \mathcal{E}'$. Il suit de cela $\{\hat{\sigma} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}\} \subset \mathcal{I}(\mathcal{E}')$; de plus le centre de \mathcal{E}' est donc invariant par $\hat{\sigma}$, il suit de ce qui précède que g est le centre de \mathcal{E}' .

7.3. La structure du groupe des isométries d'un ellipsoïde plein

Soient \mathcal{E}' un ellipsoïde plein, de centre g , i.e.

$\mathcal{E}' := \{ m \in E \mid q(m-g) \leq 1 \}$ où q est une forme quadratique définie positive ; ainsi $q(t) = (u(t) \mid t)$ où u est un endomorphisme symétrique défini positif. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r > 0$ les valeurs propres de u ,

$E_i := \ker(u - \lambda_i \mathbb{1}_T)$, on a donc $T = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_r$ et $\mathcal{I}(\mathcal{E}')$ s'identifie à

$O(T) \cap O(q) \simeq O(E_1) \times O(E_2) \times \dots \times O(E_r)$ où $O(T)$ (resp. $O(E_i)$) est le groupe orthogonal de l'espace euclidien T (resp. E_i). Si f est une isométrie de E telle que $f(\mathcal{E}') = \mathcal{E}'$, on a $f(g) = g$ et $f(g+t) = g+v(t)$ avec $v \in O(T) \cap O(q)$. Pour un tel v , on a $v(E_i) = E_i$ et l'isomorphisme suit (Fr C.10.61, M.M.G. C.4.7.4.).

7.4. L'ellipsoïde plein de volume minimum contenant un simplexe régulier est la sphère circonscrite au simplexe

On souhaite montrer que selon l'isomorphisme précédent de 7.3. que $r=1$; i.e. que $u = \lambda_1 \mathbb{1}_T$. Soient $i \neq j$, s_{ij} la symétrie hyperplane définie par $s_{ij}(g) = g$, $s_{ij}(a_j) = a_i$ et $s_{ij}(a_i) = a_j$; on a donc

$s_{ij}(g+t) = g + v_{ij}(t)$ et v_{ij} est l'automorphisme orthogonal tel que

$v_{ij}(a_i - a_j) = a_j - a_i$, $v_{ij}(t) = t$ si $(t \mid a_i - a_j) = 0$. Tout d'abord $s_{ij} \in \mathcal{I}(\mathcal{S}_n)$,

en effet si $k \notin \{i, j\}$, on a $\|a_k - a_i\| = \|a_k - a_j\|$, donc a_k est dans

l'hyperplan médiateur de a_i et a_j , on a ainsi $s_{ij}(a_k) = a_k$; en d'autres

termes $s_{ij} = \hat{t}$ ou t est la transposition $t(i) = j$, $t(j) = i$ et $t(k) = k$ pour

$k \notin \{i, j\}$. Il suit du paragraphe précédent que v_{ij} induit sur E_k un

automorphisme orthogonal qui est soit l'identité, soit une symétrie

hyperplane. Comme $\dim(\ker(v_{ij} + \mathbb{1}_T)) = 1$, cela veut dire qu'il existe un

unique k tel que $a_i - a_j \in E_k$.

Supposons $r \geq 2$, on aurait alors $0 < i < j$, $\alpha \neq \beta$ avec $a_i - a_0 \in E_\alpha$ et

$a_j - a_0 \in E_\beta$. Il suit de ce qui précède que $a_i - a_j \in E_\gamma$. Si $\gamma = \alpha$, c'est impos-

sible parce que $E_\alpha + E_\beta = E_\alpha \oplus E_\beta$; de même $\gamma = \beta$ est impossible. Enfin

$\gamma \notin \{\alpha, \beta\}$ est aussi impossible parce que $E_\alpha + E_\beta + E_\gamma = E_\alpha \oplus E_\beta \oplus E_\gamma$. On a

donc $r=1$, $u = \lambda_1 \mathbb{1}_T$, ce qui veut dire que \mathcal{E}' est la sphère de centre g et de

rayon $\sqrt{\lambda_1}$.

En faisant agir le groupe \mathfrak{S}_{n+1} sur \mathcal{S}_n on a $\|g - a_0\| = \|g - a_k\|$

pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Il suit de cela que la sphère de plus petit rayon

de centre g , contenant \mathcal{S}_n est celle de rayon $\|g - a_0\|$, donc circonscrite à

\mathcal{S}_n , i.e. passant par a_k pour $0 \leq k \leq n$. De façon plus précise

$g - a_0 = \frac{1}{n+1} ((a_1 - a_0) + (a_2 - a_0) + \dots + (a_n - a_0))$, sachant que

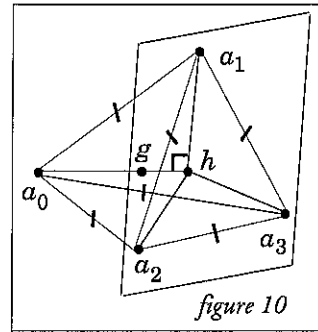
$(a_k - a_0 \mid a_k - a_0) = 1$, $(a_{k'} - a_0 \mid a_{k'} - a_0) = 1$ et que $(a_k - a_0 \mid a_{k'} - a_0) = \frac{1}{2}$

pour $k \neq k', k \neq 0, k' \neq 0$, on a donc $\|g - a_0\|^2 = \frac{1}{(n+1)^2} (n + \frac{n^2-n}{2}) = \frac{n}{2(n+1)}$.

On peut montrer (voir le paragraphe 5) que $V(a_0, g)$ est orthogonal à l'hyperplan $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Il suit encore que la sphère de centre g passant par les points a_i est tangente en a_i à l'hyperplan parallèle à $V(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

7.5. L'ellipsoïde plein, de volume maximum contenu dans l'enveloppe convexe d'un simplexe régulier est la sphère inscrite à l'enveloppe convexe du simplexe

Soient \mathcal{S}'_n l'enveloppe convexe de \mathcal{S}_n , \mathcal{E}' l'unique ellipsoïde plein de volume maximum contenu dans \mathcal{S}'_n . Une méthode analogue au paragraphe 7.4., montre que \mathcal{E}' est une sphère de centre g , contenue dans \mathcal{S}'_n et de volume maximum, i.e. de rayon maximum. Il s'agit donc de déterminer ce rayon. Soit $h := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, on a



$$g = \frac{1}{n+1} a_0 + \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \right),$$

i.e. $g = \frac{1}{n+1} a_0 + \frac{n}{n+1} h$. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$h - a_k = \frac{1}{n} ((a_1 - a_k) + \dots + (a_{k-1} - a_k) + (a_{k+1} - a_k) + \dots + (a_n - a_k)),$$

comme dans le calcul du paragraphe 7.4., on a donc

$$\|h - a_k\|^2 = \frac{1}{n^2} (n-1 + \frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2}) = \frac{(n-1)}{2n}. \text{ Il suit que } h \text{ est dans l'hyperplan médiateur de } a_1 \text{ et } a_k, \text{ de même } a_0 \text{ est dans l'hyperplan médiateur de } a_1 \text{ et } a_k; \text{ ainsi } V(a_0, h) \text{ est orthogonal à } a_k - a_1 \text{ pour } 2 \leq k \leq n. \text{ Il suit que } V(a_0, h) = V(a_0, g) \text{ est orthogonal à } V(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ et que } h \text{ est la projection orthogonale de } a_0 \text{ sur } V(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Soit \mathcal{E}'' la sphère de centre g et de rayon $\|g - h\|$, il s'agit de montrer que tout point m de \mathcal{E}'' s'écrit $m = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ avec $\lambda_0 \geq 0$.

Soit $s := \frac{1}{1-\lambda_0} (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n)$, donc

$$m = \lambda_0 a_0 + (1 - \lambda_0) s, \quad m - g = \lambda_0 a_0 + (1 - \lambda_0) s,$$

$$m - g = \lambda_0 (a_0 - g) + (1 - \lambda_0) (s - h) + (1 - \lambda_0) (h - g).$$

Sachant que

$$g - h = \frac{-1}{n(n+1)} (a_1 - a_0) + (a_2 - a_0) + \dots + (a_n - a_0),$$

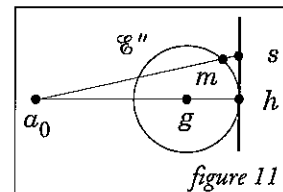
$$g - a_0 = \frac{-1}{n+1} ((a_1 - a_0) + (a_2 - a_0) + \dots + (a_n - a_0)), \text{ on a}$$

$$m - g = (1 - \lambda_0 - n \lambda_0) (h - g) + (1 - \lambda_0) (s - h), \text{ donc}$$

$$\|m - g\|^2 = (1 - 2\lambda_0(1+n) + \lambda_0^2(1+n)^2) \|h - g\|^2 + (1 - \lambda_0)^2 \|s - h\|^2.$$

Sachant que $\|m - g\| \leq \|h - g\|$, on a

$$\lambda_0(1+n)(\lambda_0(1+n) - 2) \|h - g\|^2 \leq 0. \text{ Cela montre que } \lambda_0 \geq 0. \text{ On a de}$$



même $\lambda_i \geq 0$; ce qui prouve que $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{S}'_n$.

Soit \mathcal{E}_1 une sphère de centre g et de rayon $r > \|g-h\|$, $h_1 = \frac{r}{\|g-h\|}g + g \in \mathcal{E}_1$, donc

$$h_1 := \left(1 - \frac{r}{\|g-h\|}\right) \frac{1}{n+1} a_0 + \mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n.$$

Comme $1 - \frac{r}{\|g-h\|} < 0$, on a $h_1 \notin \mathcal{S}'_n$. Ainsi

donc \mathcal{E}' est la sphère de centre g , de rayon $\|h-g\|$, avec $\|h-g\|^2 = \frac{1}{2n(n+1)}$; cette sphère est tangente à l'hyperplan

$V(a_0 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n)$ au point $\frac{1}{n}(a_0 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n)$.

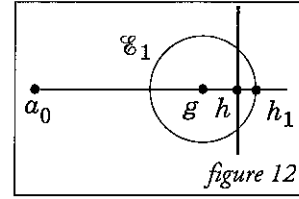


figure 12

7.6. Ellipsoïdes et simplexes

Corollaire Soient E un espace affine euclidien, attaché à un espace vectoriel euclidien T , $\mathcal{S}_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un simplexe de E , i.e. un repère affine de E , \mathcal{S}'_n l'enveloppe convexe de \mathcal{S}_n . Soient $g := \frac{1}{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$,

$(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ un simplexe régulier de longueur d'arête 1 tel que

$g = \frac{1}{n+1}(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$, $e_i = a_i - g$ (resp. $f_i = b_i - g$) pour $0 \leq i \leq n$. Alors

(e_1, e_2, \dots, e_n) (resp. (f_1, f_2, \dots, f_n)) est une base du \mathbb{R} -espace vectoriel T .

Soit S la matrice de (f_1, f_2, \dots, f_n) dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) .

1. Soient q la forme quadratique sur T telle que $\text{Mat}(q; e_i) = \frac{2(n+1)}{n} {}^t S S$, \mathcal{E}'

l'ellipsoïde plein de E défini par $\mathcal{E}' := \{m \in E \mid q(m-g) \leq 1\}$. Alors \mathcal{E}' est l'unique ellipsoïde plein contenant \mathcal{S}'_n et de volume minimum.

En termes plus géométriques, \mathcal{E}' est l'ellipsoïde plein de centre g et tangent en a_i à l'hyperplan parallèle à $V(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ pour $0 \leq i \leq n$.

2. Soient q la forme quadratique sur T telle que

$\text{Mat}(q; e_i) = 2n(n+1) {}^t S S$, \mathcal{E}' l'ellipsoïde plein de E défini par

$\mathcal{E}' := \{m \in E \mid q(m-g) \leq 1\}$. Alors \mathcal{E}' est l'unique ellipsoïde plein contenu dans \mathcal{S}'_n , de volume maximum.

En termes plus géométriques, \mathcal{E}' est l'ellipsoïde plein de centre g et tangent en $h_i := \frac{1}{n}(a_0 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n)$ à l'hyperplan

$V(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Démonstration Soit f la bijection affine définie par $f(g+t) := g+v(t)$ où $v(f_i) = e_i$. On a donc $f(b_i) = a_i$ pour $0 \leq i \leq n$. Si \mathcal{E}' est un ellipsoïde plein contenant l'enveloppe convexe de $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$, alors $f(\mathcal{E}')$ est un ellipsoïde plein contenant l'enveloppe convexe de $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ et de plus $\text{vol}(f(\mathcal{E}')) = |\det v| \text{vol}(\mathcal{E}')$. Il suit donc du paragraphe 4 que l'image par

f de la sphère pleine de centre g et de carré de rayon $\frac{n}{2(n+1)}$ est l'ellipsoïde plein \mathcal{E}' contenant l'enveloppe convexe de $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ et de volume minimum. On a donc $\mathcal{E}' = \{f(m) \mid \frac{2(n+1)}{n} (m-g \mid m-g) \leq 1\}$, i.e.

$\mathcal{E}' = \{m \in E \mid \frac{2(n+1)}{n} (v^{-1}(m-g) \mid v^{-1}(m-g)) \leq 1\}$. C'est donc

$\mathcal{E}' = \{m \in E \mid \frac{2(n+1)}{n} q(m-g) \leq 1\}$, avec $\text{Mat}(q; e_i) = {}^t S S$ et

$S = \text{Mat}(v^{-1}; e_i)$, i.e. la matrice de (f_1, f_2, \dots, f_n) dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) .

Le cas 2. se traite de la même façon.

8. La polaire d'un ellipsoïde plein

Lemme Soient E un espace affine euclidien, attaché à un espace vectoriel euclidien $(T, (\cdot \mid \cdot))$, \mathcal{E}' l'ellipsoïde plein défini par

$\mathcal{E}' := \{m \in E \mid q(m-o') \leq 1\}$ où $o' \in E$, q est une forme quadratique définie positive sur T , i.e. il existe w un endomorphisme symétrique défini positif tel

que $q(t) = (w(t) \mid w(t))$. Soient $o \in E$ tel que $q(o-o') < 1$, i.e. o est intérieur à \mathcal{E}' , \mathcal{E}'_o la polaire de \mathcal{E}' relativement au pôle o , définie par

$\mathcal{E}'_o := \{s \in E \mid (s-o \mid m-o) \leq 1 \text{ pour tout } m \in \mathcal{E}'\}$. Soient q' la forme quadratique sur T définie par $q'(t) := (w^{-1}(t) \mid w^{-1}(t)) - (w^{-1}(t) \mid w(o'-o))^2$, alors q' est définie positive. Soient $\theta \in T$ tel que pour tout $t \in T$, on ait

$\hat{q}'(t, \theta) = (w^{-1}(t) \mid w(o'-o))$, où \hat{q}' est la forme bilinéaire symétrique associée à q' . Soient $o'' := o + \theta$, alors on a $\mathcal{E}'_o = \{s \in E \mid \frac{q'(s-o'')}{1+q(\theta)} \leq 1\}$. On a

$\text{vol}(\mathcal{E}') = (\det q)^{-\frac{1}{2}} s_n$ est le volume de la sphère unité; on a

$\text{vol}(\mathcal{E}'_o) \geq (\det q)^{\frac{1}{2}} s_n$ et on a $\text{vol}(\mathcal{E}'_o) = (\det q)^{\frac{1}{2}} s_n$ si et seulement si $o' = o$ et dans ce cas $o'' = o' = o$.

Démonstration Soit $u \in T$ tel que $(w^{-1}(u) \mid w^{-1}(u)) = 1$, on cherche l'intersection de $o + \mathbb{R}u$ avec \mathcal{E}'_o . On a donc $(\lambda u \mid m-o') + (\lambda u \mid o'-o) \leq 1$ pour tout $m \in \mathcal{E}'$, soit $\lambda((w^{-1}(u) \mid w(m-o')) + (w^{-1}(u) \mid w(o'-o))) \leq 1$ pour tout $m \in \mathcal{E}'$. Or $m \in \mathcal{E}'$ si et seulement si $\xi := w(m-o')$ est tel que $(\xi \mid \xi) \leq 1$. Ainsi $\lambda((w^{-1}(u) \mid \xi) + (w^{-1}(u) \mid w(o'-o))) \leq 1$ pour tout ξ tel que $(\xi \mid \xi) \leq 1$.

(1) Si $\lambda \geq 0$, cela veut dire que $\lambda \leq \frac{1}{1+(w^{-1}(u) \mid w(o'-o))}$,

(2) si $\lambda \leq 0$, cela veut dire que $\lambda \geq \frac{1}{-1+(w^{-1}(u) \mid w(o'-o))}$; en effet

$\|w(o'-o)\| < 1$ implique que les dénominateurs ne sont pas nuls.

En posant $t = \lambda u$, (1) et (2) impliquent

(3) $(w^{-1}(t) \mid w^{-1}(t)) - (w^{-1}(t) \mid w(o'-o))^2 + 2(w^{-1}(t) \mid w(o'-o)) - 1 \leq 0$.

Réciproquement, en posant $t = \lambda u$, avec u fixé et $(w^{-1}(u) | w^{-1}(u)) = 1$, la relation (3) implique la relation du second degré.

$$(4) \quad \lambda^2(1 - ((w^{-1}(u) | w(o' - o))^2) + 2\lambda(w^{-1}(u) | w(o' - o)) - 1 \leq 0.$$

Cette dernière se traduit par

$$(5) \quad \frac{1}{-1 + (w^{-1}(u) | w(o' - o))} \leq \lambda \leq \frac{1}{1 + (w^{-1}(u) | w(o' - o))}.$$
 Soit

$$f(t) := (w^{-1}(t) | w^{-1}(t)) - (w^{-1}(t) | w(o' - o))^2 + 2(w^{-1}(t) | w(o' - o)) - 1.$$

Ce qui précède montre que $\mathcal{E}'_o = \{s \in E | f(s - o) \leq 0\}$.

Il reste à montrer que c'est un ellipsoïde, i.e. que

$t \mapsto (w^{-1}(t) | w^{-1}(t)) - (w^{-1}(t) | w(o' - o))^2$ est une forme quadratique q' , définie positive ; c'est bien une forme quadratique. Par ailleurs

$q(o' - o) < 1$, veut dire que $\|w(o' - o)\| < 1$ et la relation Schwarz dit que

$$(w^{-1}(t) | w(o' - o))^2 \leq \|w^{-1}(t)\|^2 \|w(o' - o)\|^2, \text{ ainsi}$$

$$(w^{-1}(t) | w^{-1}(t)) - (w^{-1}(t) | w(o' - o))^2 > 0 \text{ pour tout } t \neq 0.$$

Comme q' est non dégénérée, il existe $\theta \in T$, unique tel que pour

tout $t \in T$, on ait $\hat{q}'(t, \theta) = (w^{-1}(t) | w(o' - o))$. On a donc

$$f(t) = q'(t - \theta) - (1 + q(\theta)).$$
 Cela veut bien dire que

$$\mathcal{E}'_o = \{s \in E | \frac{q'(s - o'')}{1 + q(\theta)} \leq 1\} \text{ avec } o'' = o + \theta.$$
 On a

$$\text{vol}(\mathcal{E}') = (\det q)^{-\frac{1}{2}} s_n, \quad \text{vol}(\mathcal{E}'_o) = (1 + q(\theta))^{\frac{1}{2}} (\det q')^{-\frac{1}{2}} s_n.$$

Comme w^{-1} est symétrique, défini, positif, il existe une base

orthonormale $(e_i)_i$ de telle que $w^{-1}(e_i) = d_i e_i$ avec $d_i > 0$. On a

$$w(o' - o) = \sum_i a_i e_i \text{ avec } 1 > \sum_i a_i^2; \text{ ainsi donc } q'(t) = \sum_i d_i^2 t_i^2 - \sum_i d_i^2 a_i^2 t_i^2$$

avec $t = \sum_i t_i e_i$. Il suit que $\text{Mat}(q'; e_i)$ est la matrice diagonale, de diagonale

$$(d_1^2(1 - a_1^2), d_2^2(1 - a_2^2), \dots, d_n^2(1 - a_n^2)),$$

cela montre que $\det q' \leq (\det q)^{-1}$ et que $\det q' < (\det q)^{-1}$ si $o' \neq o$. On a donc le résultat cherché.

Remarque Soient E un espace affine euclidien, attaché à un espace vectoriel euclidien T , K un compact de E d'intérieur non vide, \mathcal{E}' l'ellipsoïde plein, de volume maximum, contenu dans K , o son centre, \mathcal{E}'_o (resp. K_o^*) la polaire de \mathcal{E}' (resp. K) relativement au pôle o . Alors \mathcal{E}'_o est l'ellipsoïde plein, de volume minimum contenant K_o^* et son centre est o .

En effet, on a $\frac{1}{s_n} \text{vol}(\mathcal{E}'_o) = \frac{1}{s_n} \text{vol}(\mathcal{E}')^{-1}$. Soit Θ l'ellipsoïde plein,

de volume minimum, contenant K_o^* . Si $\Theta \neq \mathcal{E}'_o$, on aurait

$$\frac{1}{s_n} \text{vol}(\Theta) < \frac{1}{s_n} \text{vol}(\mathcal{E}'_o). \text{ Ensuite } \frac{1}{s_n} \text{vol}(\Theta_o^*) \geq \frac{1}{s_n} \text{vol}(\Theta)^{-1}; \text{ ainsi}$$

$$\frac{1}{s_n} \text{vol}(\Theta_o^*) > \frac{1}{s_n} \text{vol}(\mathcal{E}'_o)^{-1} = \text{vol}(\mathcal{E}').$$
 Ce qui est impossible puisque $K_o^{**} = K$

et $\Theta_o^* \subset K$. Donc $\Theta = \mathcal{E}'_o$.

9. Ellipses inscrites dans un triangle d'aire maximum

Comme il est dit dans l'introduction, l'objet de ce paragraphe est de montrer combien la recherche d'une ellipse pleine d'aire maximum, contenue dans un triangle, par une méthode directe, est bien calculatoire.

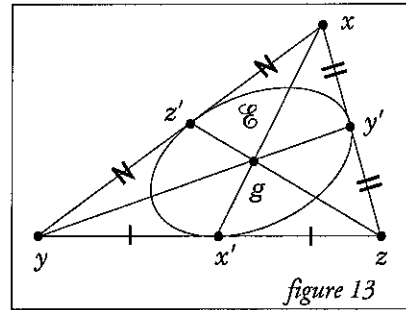
Soit E le plan affine euclidien, associé à l'espace vectoriel euclidien T .

1. Soit (x, y, z) un triangle équilatéral du plan euclidien. Alors l'ellipse contenue dans l'enveloppe convexe de (x, y, z) , d'aire maximum, est unique et c'est le cercle inscrit de (x, y, z) .

2. Soit (x, y, z) un triangle du plan euclidien. Alors l'ellipse contenue dans l'enveloppe convexe de (x, y, z) , d'aire maximum, est unique et c'est l'ellipse \mathcal{E} de centre, le centre de gravité de (x, y, z) , tangente aux côtés du triangle en leurs milieux. Si $e_1 := x' - g$, $e_2 := y' - g$ et si q est la forme quadratique sur T telle que

$$\text{Mat}(q; e_1, e_2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

alors $\mathcal{E} = \{ m \in E \mid q(m - g) = 1 \}$.



1) Il s'agit de montrer 1. . Soient E le plan euclidien attaché à l'espace vectoriel euclidien T . Soit \mathcal{E} l'ellipse de centre o définie par une forme quadratique q sur T définie positive, i.e. $\mathcal{E} := \{ m \in E \mid q(m - o) = 1 \}$. Alors on appelle ellipse pleine l'ensemble \mathcal{E}' défini par $\mathcal{E}' := \{ m \in E \mid q(m - o) \leq 1 \}$.

1.1) Une ellipse contenue dans l'enveloppe convexe de (x, y, z) , et d'aire maximum, est tangente aux côtés du triangle (x, y, z) .

1.1.1) Une ellipse qui est contenue dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de (x, y, z) n'est pas d'aire maximum.

Si $m \in E$, on écrit

$$m = \lambda(m)x + \mu(m)y + \nu(m)z \text{ avec}$$

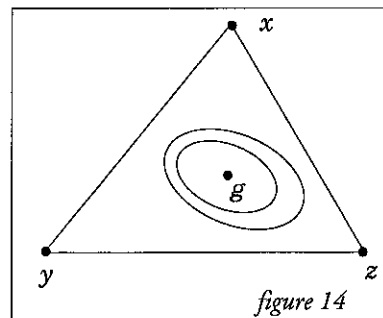
$$\lambda(m) + \mu(m) + \nu(m) = 1 \text{ et}$$

$\lambda(m), \mu(m), \nu(m) \in [0, 1]$. Soit \mathcal{E}' une ellipse pleine contenue dans l'intérieur de

l'enveloppe convexe de (x, y, z) . Alors pour tout $m \in \mathcal{E}'$, on a

$\lambda(m), \mu(m), \nu(m) \in]0, 1[$. Sachant que \mathcal{E}' est compact il existe a, b avec $0 < a < b < 1$ tels que pour tout $m \in \mathcal{E}'$, on ait $\lambda(m), \mu(m), \nu(m) \in [a, b]$.

Soient $g = \frac{1}{3}(x + y + z)$, $h(g, 1 + \varepsilon)$ l'homothétie de centre g et de rapport

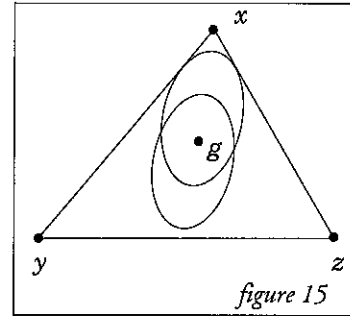


$1 + \varepsilon$, il s'agit de montrer que $h(g, 1 + \varepsilon)(\mathcal{E}')$ est contenu dans l'enveloppe convexe de (x, y, z) . Si $m' = h(g, 1 + \varepsilon)(m)$, on a $m' = (1 + \varepsilon)m - \varepsilon g$, ainsi pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a bien $h(g, 1 + \varepsilon)(\mathcal{E}')$ qui est contenu dans l'enveloppe convexe de (x, y, z) . Or

$$\text{Aire}(h(g, 1 + \varepsilon)(\mathcal{E}')) = (1 + \varepsilon)^2 \text{Aire}(\mathcal{E}').$$

1.1.2) Une ellipse qui n'est pas tangente aux trois côtés du triangle (x, y, z) n'est pas d'aire maximum.

On suppose que $V(y, z)$ n'est pas tangente à \mathcal{E} , alors cela veut dire que \mathcal{E} ne coupe pas $V(y, z)$. Sinon \mathcal{E} coupe $V(y, z)$ en deux points distincts m_1 et m_2 , comme \mathcal{E} est contenue dans l'enveloppe convexe de

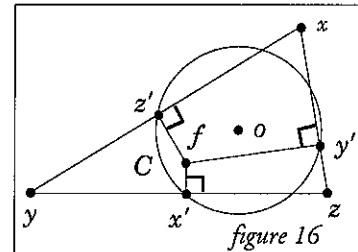


(x, y, z) , comme \mathcal{E}' est strictement convexe, on a une contradiction. Ainsi pour tout $m \in \mathcal{E}'$, on a $\lambda(m) > 0$ et donc $\mu(m) < 1$, $\nu(m) < 1$. Comme \mathcal{E}' est compact il existe $0 < a < b < 1$ avec $\lambda(m) \geq a$, $\mu(m) \leq b$, $\nu(m) \leq b$. Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a pour tout $m \in \mathcal{E}'$,

$$m + \varepsilon(g - x) = (\lambda(m) - \frac{2}{3}\varepsilon)x + (\mu(m) + \frac{\varepsilon}{3})y + (\nu(m) + \frac{\varepsilon}{3})z \text{ qui est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de } (x, y, z).$$

Or cette translation de vecteur $\varepsilon(g - x)$ ne change pas l'aire et alors 1.1.1) permet de conclure.

1.2) Soient (x, y, z) un triangle équilatéral, \mathcal{E} une ellipse de foyer f , de cercle principal C dont le centre est o , le rayon a , et on suppose que \mathcal{E} est tangente aux côtés du triangle. Soient x' (resp. y' , z') la projection orthogonale de f sur $V(y, z)$ (resp. $V(z, x)$, $V(x, y)$).



Alors $x', y', z' \in C$, on a

$$\text{Aire}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\|f - x'\| + \|f - y'\| + \|f - z'\|)^2, \text{ Aire } \mathcal{E}' = \pi a \sqrt{a^2 - \|f - o\|^2}.$$

Soient $\ell := \|x - y\| = \|y - z\| = \|z - x\|$, on a

$$\text{Aire}(x, y, z) = \frac{1}{2} \ell \ell \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \ell (\|f - x'\| + \|f - y'\| + \|f - z'\|), \text{ il suit que}$$

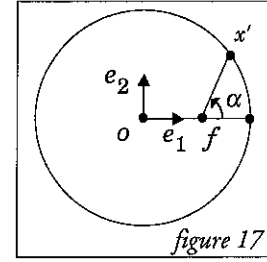
$$\ell = \frac{2}{\sqrt{3}} (\|f - x'\| + \|f - y'\| + \|f - z'\|); \text{ ce qui conduit au résultat pour l'aire}$$

du triangle. Pour \mathcal{E} , le grand axe a pour longueur a , le petit axe a pour longueur b avec $a^2 = b^2 + \|f - o\|^2$. Sachant que $\text{Aire } \mathcal{E}' = \pi a b$, on a bien le résultat.

1.3) Soient $c := \|f - o\|$, $\alpha := \text{mes}(f - o, x' - f)$, alors on a

$$\frac{\text{Aire } \mathcal{E}'}{\text{Aire}(x, y, z)} = \pi \sqrt{3} \frac{a \sqrt{a^2 - c^2}}{(\sqrt{a^2 - c^2} \sin^2 \alpha + \sqrt{a^2 - c^2} \sin^2(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sqrt{a^2 - c^2} \sin^2(\alpha + \frac{4\pi}{3}))^2}.$$

Il s'agit de calculer $\|f-x'\| + \|f-y'\| + \|f-z'\|$.
Soient (e_1, e_2) une base orthonormée de T avec
 $e_1 := \frac{f-o}{\|f-o\|}$, $u = \|x'-f\|$. Ainsi



$x' = o + (c + u \cos \alpha) e_1 + u \sin \alpha e_2$,
 $\|x' - o\|^2 = \alpha^2 = c^2 + 2cu \cos \alpha + u^2$. Ainsi u est la
racine positive de $u^2 + 2cu \cos \alpha + c^2 - \alpha^2$, i.e.

$u := u(\alpha) := c \cos \alpha + \sqrt{\alpha^2 - c^2 \sin^2 \alpha} = \|x' - f\|$, $u(\alpha + \frac{2\pi}{3}) = \|y' - f\|$,

$u(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = \|z' - f\|$. Sachant que $\cos \alpha + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$ (en
considérant $\xi + \xi j + \xi j^2$) et en utilisant 1.2), on a le résultat souhaité.

1.4) Soit $\theta := \frac{c^2}{\alpha^2}$, $r(\theta) := (\sqrt{1-\theta}) q(\theta)^{-2}$ avec

$q(\theta) := \sqrt{1-\theta \sin^2 \alpha} + \sqrt{1-\theta \sin^2(\alpha + \frac{2\pi}{3})} + \sqrt{1-\theta \sin^2(\alpha + \frac{4\pi}{3})}$, on a donc

$\frac{\text{Aire } \mathcal{C}'}{\text{Aire}(x, y, z)} = \pi \sqrt{3} r(\theta)$. En plus $r(0) = \max\{r(\theta) \mid 0 \leq \theta \leq 1\}$. Cela montre que
l'ellipse d'aire maximum inscrite dans le triangle (x, y, z) est le cercle inscrit.

1.4.1) Il s'agit de montrer que $r(\theta) \leq r(0) = \frac{1}{9}$. Soit

$s(\theta) := 9\sqrt{1-\theta} - q(\theta)^2$. Il faut donc montrer que $s'(\theta) \leq 0$ sur $[0, 1[$. On a

$s'(\theta) = q(\theta) \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{1-\theta \sin^2 \alpha}} + \frac{\sin^2(\alpha + \frac{2\pi}{3})}{\sqrt{1-\theta \sin^2(\alpha + \frac{2\pi}{3})}} + \frac{\sin^2(\alpha + \frac{4\pi}{3})}{\sqrt{1-\theta \sin^2(\alpha + \frac{4\pi}{3})}} \right) - \frac{9}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$. Facile-

ment, sur $[0, 1]$, on a $q(\theta) \leq 3$, et donc

$s'(\theta) \leq 3 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{1-\theta \sin^2 \alpha}} + \frac{\sin^2(\alpha + \frac{2\pi}{3})}{\sqrt{1-\theta \sin^2(\alpha + \frac{2\pi}{3})}} + \frac{\sin^2(\alpha + \frac{4\pi}{3})}{\sqrt{1-\theta \sin^2(\alpha + \frac{4\pi}{3})}} \right) - \frac{9}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$.

1.4.2) Il faut montrer que

$\frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{1-\theta \sin^2 \alpha}} + \frac{\sin^2(\alpha + \frac{2\pi}{3})}{\sqrt{1-\theta \sin^2(\alpha + \frac{2\pi}{3})}} + \frac{\sin^2(\alpha + \frac{4\pi}{3})}{\sqrt{1-\theta \sin^2(\alpha + \frac{4\pi}{3})}} \leq \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$.

Pour $0 \leq \theta < 1$, on a $\frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{1-\theta \sin^2 \alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \theta^k \sin^{2(k+1)} \alpha$ et

$\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \theta^k$. Montrons que

(1) $\sin^{2k}(\alpha) + \sin^{2k}(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin^{2k}(\alpha + \frac{4\pi}{3}) \leq \frac{3}{2}$.

Soient $\xi := e^{i2\alpha}$, $j := e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Supposons que

(2) $(\xi + \xi^{-1})^t + (\xi j + (\xi j)^{-1})^t + (\xi j^2 + (\xi j^2)^{-1})^t \leq 3(2^t - 1)$.

On a $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\xi + \xi^{-1}}{4}$.

Ainsi $\sin^{2k}(\alpha) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-j} (\xi + \xi^{-1})^{k-j}$.

En utilisant (2), on a

$$(3) \quad \sin^{2k}(\alpha) + \sin^{2k}(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin^{2k}(\alpha + \frac{4\pi}{3}) \leq \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\frac{1}{2})^j (\frac{1}{2})^{k-j} \frac{3}{2}, \text{ i.e.}$$

$$(4) \quad \sin^{2k}(\alpha) + \sin^{2k}(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin^{2k}(\alpha + \frac{4\pi}{3}) \leq \frac{1}{2^k} (1+1)^k \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Il reste donc à prouver la relation (2).

1.4.3) On a $(\xi + \xi^{-1})^t + (\xi j + (\xi j)^{-1})^t + (\xi j^2 + (\xi j^2)^{-1})^t \leq 3(2^{t-1})$. On a

$$(5) \quad (\xi + \xi^{-1})^t + (\xi j + (\xi j)^{-1})^t + (\xi j^2 + (\xi j^2)^{-1})^t = \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} (\xi^{2i-t} + (\xi j)^{2i-t} + (\xi j^2)^{2i-t}).$$

Montrons que

$$(6) \quad \sum_{2i-t \equiv 0(3)} \binom{t}{i} \leq 2^{t-1}.$$

Deux cas sont à considérer. D'abord on suppose qu'il existe α tel que $2\alpha - t \equiv 0(3)$, $\alpha < \frac{t}{2} < \alpha + 3$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{\substack{i \leq \alpha \\ 2i-t \equiv 0(3)}} \binom{t}{i} \leq \sum_{\substack{i \leq \alpha \\ 2i-t \equiv 0(3)}} \binom{t}{i+1} \text{ et } \sum_{\substack{i > \alpha \\ 2i-t \equiv 0(3)}} \binom{t}{i} \leq \sum_{\substack{i > \alpha \\ 2i-t \equiv 0(3)}} \binom{t}{i-1}, \text{ il suit que}$$

$$\sum_{2i-t \equiv 0(3)} \binom{t}{i} \leq \sum_{\substack{i \leq \alpha \\ 2i-t \equiv 0(3)}} \binom{t}{i+1} + \sum_{\substack{i > \alpha \\ 2i-t \equiv 0(3)}} \binom{t}{i-1}; \text{ comme}$$

$$\sum_{i=0}^t \binom{t}{i} = 2^t, \text{ on a donc } \sum_{2i-t \equiv 0(3)} \binom{t}{i} \leq \frac{1}{2} 2^t.$$

On suppose maintenant qu'il existe α tel que $2\alpha - t \equiv 0(3)$ et $\alpha = \frac{t}{2}$. Dans ce cas

$$\sum_{\substack{i < \alpha \\ 2i-t \equiv 0(3)}} \binom{t}{i} \leq \sum_{\substack{i \leq \alpha \\ 2i-t \equiv 0(3)}} \binom{t}{i+1} \text{ et } \sum_{\substack{i > \alpha \\ 2i-t \equiv 0(3)}} \binom{t}{i} \leq \sum_{\substack{i > \alpha \\ 2i-t \equiv 0(3)}} \binom{t}{i-1}. \text{ Enfin}$$

$$\binom{t}{\alpha} \leq \binom{t}{\alpha-1} + \binom{t}{\alpha+1}. \text{ Cela permet aussi de conclure que}$$

$$\sum_{2i-t \equiv 0(3)} \binom{t}{i} \leq \binom{t}{i} \leq \frac{1}{2} 2^t.$$

2) Il s'agit de montrer 2. .

Soient (x, y, z) un triangle équilatéral, C le cercle inscrit à (x, y, z) de centre $o = \frac{1}{3}(x+y+z)$, x' (resp. y', z') le milieu de y et z (resp. z et x , x et y). Ainsi C est tangent aux côtés du triangle en x', y', z' .

Soient (a, b, c) un triangle quelconque, f l'application affine telle que $f(a) = x$, $f(b) = y$, $f(c) = z$, u son application linéaire associée. Soit \mathcal{E} une ellipse contenue dans l'enveloppe convexe de (a, b, c) , \mathcal{E}' l'ellipse pleine associée. Alors $f(\mathcal{E})$ est une ellipse contenue dans l'enveloppe convexe de x, y, z et $\text{Aire } f(\mathcal{E}') = |\det u| (\text{Aire } \mathcal{E}')$. Si donc \mathcal{E}' est une ellipse pleine d'aire maximum contenue dans l'enveloppe convexe de (a, b, c) , alors $f(\mathcal{E}')$ est une ellipse pleine contenue dans l'enveloppe convexe de (x, y, z) et d'aire maximum. Il suit de 1. que $\mathcal{E}' = f^{-1}(C)$. En particulier \mathcal{E}' a pour centre $g = f^{-1}(o) = \frac{1}{3}(a+b+c)$; de plus \mathcal{E}' est tangente aux côtés du triangle (a, b, c) en $a' = f^{-1}(x')$, $b' = f^{-1}(y')$,

$c' = f^{-1}(z')$ et a' (resp. b', c') est le milieu de b et c (resp. c et a , a et b).

Soient $e_1 := a' - g$, $e_2 = b' - g$, on a donc $-(e_1 + e_2) = c' - g$. Par ailleurs, il existe une forme quadratique q sur T telle que

$\mathcal{E} = \{ m \in E \mid q(m - g) = 1 \}$. Il suit facilement que

$$\text{Mat}(q; e_1, e_2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10. Sur la convexité de la fonction déterminant

Proposition Soit \mathcal{C} un sous-ensemble convexe de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable avec des valeurs propres strictement positives; en plus pour tout $A, B \in \mathcal{C}$ on suppose aussi que $A^{-1}B$ est diagonalisable à valeurs propres strictement positives.

1. Soit $\alpha > 0$, un nombre réel, alors l'application $A \mapsto (\det A)^{-\alpha}$ est strictement convexe.
2. Soit α un nombre réel avec $0 < \alpha \leq \frac{1}{n}$, alors l'application $A \mapsto (\det A)^\alpha$ est strictement concave.
3. Si $\alpha > \frac{1}{n}$, alors il y a des exemples où la fonction $A \mapsto (\det A)^\alpha$ n'est ni convexe, ni concave.
4. Un exemple de sous-ensemble \mathcal{C} est constitué par les matrices symétriques définies positives, et par toute partie convexe des matrices symétriques définies positives.

1) Il s'agit de montrer 1. .

1.1) Remarquer qu'il suffit de montrer que

$$\det(\lambda I_n + (1-\lambda)D)^{-\alpha} < \lambda(\det I_n)^{-\alpha} + (1-\lambda)(\det D)^{-\alpha} \text{ lorsque}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & d_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & d_n \end{bmatrix} \text{ avec } d_i > 0, D \neq I_n \text{ et } 0 < \lambda < 1.$$

1.2) En utilisant le fait que la fonction \log est concave, montrer que pour $0 < \lambda < 1$, on a $-\alpha \sum_{i=1}^n \log(\lambda + (1-\lambda)d_i) < (1-\lambda)(-\alpha \sum_{i=1}^n \log d_i)$

1.3) Conclure que $\log(\prod_{i=1}^n (\lambda + (1-\lambda)d_i)^{-\alpha}) < \log((\prod_{i=1}^n d_i)^{-\alpha})$.

1.4) En utilisant de nouveau le fait que la fonction \log est concave montrer que $\log(\prod_{i=1}^n (\lambda + (1-\lambda)d_i)^{-\alpha}) < \log(\lambda 1 + (1-\lambda)(\prod_{i=1}^n d_i)^{-\alpha})$.

1.5) En conclure que $A \mapsto (\det A)^{-\alpha}$ est strictement convexe.

2) Il s'agit de montrer 2. .

2.1) Remarquer qu'il suffit de montrer 2. pour $A=I_n$ et

$$B=D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & d_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & d_n \end{bmatrix}, \text{ avec } d_i > 0.$$

2.2) Sachant que la fonction $t \mapsto \log(\lambda + (1-\lambda)e^{\beta t})$ est strictement convexe pour $0 < \lambda < 1$ et $0 < \beta \leq 1$, montrer que

$$\log(\lambda + (1-\lambda)e^{\beta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i}) < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(\lambda + (1-\lambda)e^{\beta t_i}).$$

2.3) En posant $e^{\beta t_i} = d_i$ et $\alpha = \frac{\beta}{n}$, en déduire que

$$\log(\lambda + (1-\lambda)(d_1 d_2 \dots d_n)^\alpha) < \log\left(\prod_{i=1}^n (\lambda + (1-\lambda)d_i^\alpha)\right).$$

2.4) Sachant que $x \mapsto x^\beta$ est concave, montrer que

$$\log(\lambda + (1-\lambda)(d_1 d_2 \dots d_n)^\alpha) < \log\left(\prod_{i=1}^n (\lambda + (1-\lambda)d_i^\alpha)\right).$$

2.5) Conclure que $A \mapsto (\det A)^\alpha$ est strictement concave pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{n}$.

3) Il s'agit de montrer 3. .

3.1) Considérer la matrice I_n et la matrice diagonale, de diagonale (d_1, d_2, \dots, d_n) avec $1 = d_1 d_2 \dots d_n$, $d_i > 0$, $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1}$ assez petit et $\lambda = \frac{1}{2}$, conclure que $A \mapsto \det A^\alpha$ n'est pas concave.

3.2) Considérer la matrice I_n et la matrice diagonale, de diagonale (d_1, d_2, \dots, d_n) avec $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$ et $d > 0$ assez petit, $\lambda = \frac{1}{2}$.

Conclure que $A \mapsto (\det A)^\alpha$ n'est pas convexe.

Bibliographie

- [*Be*] Marcel Berger *Géométrie* (11.8.10.7) (Nathan 1990)
- [*Fr 1*] Jean Fresnel *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens*, (Hermann 1999)
- [*Fr 2*] Jean Fresnel *Méthodes modernes en géométrie* (Hermann 1996)
- [*Ba*] Bambah *Polar reciprocal bodies*, Proceedings of the Cambridge philosophical society 51, 377-378 (1954)
- [*B,F*] Barany-Füredi *Computing the volume is difficult*, Discrete and computational geometry 2, 319-326 (1987)
- [*B,M*] Bourgain-Milman *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in \mathbb{R}^n* , Inventiones mathematicæ 88, 319-340 (1987)
- [*G,L,S*] Grötschel-Lovasz-Schrijver *Geometric algorithms and combinatorial optimization*, Springer (1988)

- [*Ma*] **Mahler** *Ein Übertragungsprinzip für Konvexe Körper*, Casopsis Matematiky a Fysiky 68, 93-102 (1939)
- [*SR*] **Saint Raymond** *Sur le volume des corps convexes symétriques*, Séminaire d'initiation à l'analyse de Paris VI, exposé 11 (5/2/1981)
- [*Sa*] **Santaló** *Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones*, Portugaliae mathematica 8, 155-161 (1949)



"Été 2002"

le dernier défilé des collections Yves Saint-Laurent, mardi 22 janvier 2002



"Une voix de magicienne, une voix à nulle autre pareille, à la fois féérique et terrible : la voix de Callas"

(octobre 1989 Y.S.L.)

robe créée par Yves Saint-Laurent pour Maria Callas

(reproduit avec l'aimable autorisation de Y.S.L.)

cf *"Méthodes Modernes en Géométrie"*

Jean Fresnel (Hermann, collection formation des enseignants et formation continue) page 356