Guy Métivier

INTÉGRALES SINGULIÈRES

INTÉGRALES SINGULIÈRES

Guy Métivier

TABLE DES MATIÈRES

PREFACE

Préface de 2004.

Ces notes de cours correspondent à un cours de DEA enseigné à l'Université de Rennes en 1981-1982. La partie sur les intégrales singulières est très classique (cf [**9, 4**]) et la partie sur le calcul para-différentiel, alors nouvelle, a reçu depuis de très nombreux développements. Néanmoins, parce que l'exposition est auto-contenue et de niveau DEA, ces notes peuvent encore servir d'introduction et il a paru utile de les rendre disponibles. Initialement dactylographiées, elles ont été mises au format TeX par Rémi Carles, que je remercie ici très chaleureusement.

Préface de 1982.

Le but de ce cours était d'étudier la continuité L^2, L^p ou dans des espaces de Hölder C^μ d'opérateurs qui interviennent dans l'étude déquations aux dérivées partielles, les applications étant l'obtention d'inégalités a-priori ou la preuve de la régularité de solutions.

Dans un premier temps on s'est intéressé aux opérateurs de convolution (intégrales singulières). Les chapitres 1 (théorème d'interpolation de Marcinkiewiecz), 2 (intégrales faiblement singulières) et 3 (intégrales de Calderòn-Zygmund) sont tout-à fait classiques et essentiellement tirés du livre de E.M. Stein [**9**] où on trouvera aussi les références "historiques". Au chapitre 4, on présente la notion de distribution de type 0, qui permet d'englober les situations non homogènes. En particulier, on caractérise leur transformée de Fourier : pour faire simple, modulo des conditions de régularité à preciser, ce sont les symboles $p(\xi)$ de degré 0 et de type 1. On voit alors l'équivalence presque parfaite entre le point de vue intégrale singulière et le point de vue pseudo-differentiel. Au chapitre 5 on étudie la théorie L^p de ces opérateurs, en suivant fidèlement E.M.Stein [**9**] et des présentations inspirées de R.Coifman et Y.Meyer [**4**]. Au chapitre 6 est faite la théorie Höldérienne. Les chapitres 7 et 8 présentent des applications classiques. Pour les problèmes aux limites elliptiques on renvoie à S.Agmon-A.Douglis-L.Nirenberg [**1**] ou à O.A.Ladyženskya-N.M.Ural'ceva [**5**] (voir aussi [**2**]).

La deuxième partie du cours commence au chapitre 9 (opérateurs pseuo-différentiels). On s'est contenté ici d'une présentation très succinte pour se concentrer très rapidement sur le théorème de Calreròn-Vaillancourt pour lequel on a suivi la démarche de Coifman-Meyer [**4**]. Au chapitre 10, on étudie les opérateurs de type $(1,1)$, notamment leur continuité dans les espaces H^s et C^μ pour $s > 0$ et $\mu > 0$, puis dans L^2 moyennant une condition de support. À ce point, on aurait pu, suivant les lignes du chapitre 4, "caractériser" les noyaux des opérateurs de type $(1,0)$ et des opérateurs paradifférentiels (c'est-à-dire de type $(1,1)$ avec condition de support) et faire le lien avec les opérateurs de Calderòn-Zygmund au sens de [**4**] chapitre 4. Faute de temps, cette étude qui mène aux résultats L^p, n'a pu être faite et on a préféré présenter aux chapitres 11 et 12 les techniques nouvelles introduites par J.M.Bony [**3**] concernant la para-linéarisation d'équations non linéaires et la régularité microlocale des solutions d'équations non linéaires. On s'est aussi inspiré dans ces chapitres des présentations et résultats de Y.Meyer [**6, 7, 8**].

Comme il s'agit de notes de cours et non d'une rédaction destinée à publication, il n'y a (malheureusement) pas de références bibliographiques dans le cours du texte. L'un des buts de cette introduction est de remédier partiellement à cette carence, qui s'explique aussi aussi par la classicité des résultats exposés, à l'exception de ceux des derniers chapitres.

CHAPITRE 1

LE THÉORÈME DE MARCINKIEWICZ

1.1. Opérateurs de type (p, q) et énoncé du théorème

On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Si f est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$) on définit la fonction λ_f de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty]$ par :

$$\lambda_f(t) = \operatorname{mes} \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ |f(x)| > t\} \ .$$

La fonction $t \mapsto \lambda_f(t)$ est décroissante et continue à droite. En outre, on a le

Lemme 1.1.1. — (i) *Pour $0 < p < \infty$ on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_f(t) dt \ ;$$

(ii) *si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $t > 0$:*

$$\lambda_f(t) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{t} \right)^p \ ;$$

(iii) *$f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\lambda_f(t) = 0$ pour t assez grand ($t > \|f\|_{L^\infty}$).*

Preuve. — Posons $\varphi(t, x) = 1$ si $|f(x)| > t$ et $\varphi(t, x) = 0$ sinon. Par définition on a :

$$\int_0^\infty t^{p-1} \lambda_f(t) = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x) dx \right) t^{p-1} dt \ ,$$

et d'après le théorème de Fubini cette intégrale vaut :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{|f(x)|} t^{p-1} dt \right) dx = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \ .$$

Puisque λ_f est décroissante on a :

$$t^p \lambda_f(t) \leq p \int_0^t s^{p-1} \lambda_f(s) ds \leq \|f\|_{L^p}^p \ .$$

Enfin (iii) est trivial, au vu des définitions. □

Définition 1.1.2. — *Une application T de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$) est dite de type fort (p, q) s'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on ait :*

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p} \ .$$

Définition 1.1.3. — *Pour $q<\infty$, une application T de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans l'ensemble des fonctions mesurables est dite de type faible (p,q) s'il existe $C>0$ tel que pour tout $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\forall t>0\ ,\ \lambda_{Tf}(t)\le\left(\frac{C\,\|f\|_{L^p}}{t}\right)^p\ .$$

Lorsque $q=+\infty$, T sera dit de type faible (p,∞) si elle est de type fort (p,∞).

Remarque. — Au vu du lemme 1.1.1, (ii), toute application de type fort (p,q) est aussi de type faible (p,q).

Considérons maintenant une application T définie de $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)+L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ $(1\le p_0<p_1\le\infty)$ dans l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que pour tous f, g et pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, on ait :

$$|T(f+g)(x)|\le|Tf(x)|+|Tg(x)|\ . \tag{1.1.1}$$

Soient $1\le q_0\le q_1\le\infty$ tels que $p_0\le q_0$ et $p_1\le q_1$.

Théorème 1.1.4 **(Marcinkiewicz)**. — *Si T est à la fois de type faible (p_0,q_0) et (p_1,q_1) alors pour tout $p\in]p_0,p_1[$, T applique $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ avec*

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{q_0}-\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_1}\right)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}\right)\frac{p_1p_0}{p_1-p_0}\ ,$$

et est de type fort (p,q).

Remarque. — Si $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_0}(1-\theta)+\theta\frac{1}{p_1}$, alors $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_0}(1-\theta)+\theta\frac{1}{q_1}$, ce qui exprime que $\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)$ est sur le segment de $\mathbb{R}^2$ qui joint $\left(\frac{1}{p_0},\frac{1}{q_0}\right)$ à $\left(\frac{1}{p_1},\frac{1}{q_1}\right)$. En particulier si $p_0=q_0$, et $p_1=q_1$, alors $p=q$.

1.2. Preuve du théorème

Donnons d'abord une démonstration dans le cas où $p_0=q_0$ et $p_1=q_1<\infty$, ce qui permettra ensuite de mieux comprendre le cas général.

Pour $\alpha>0$, on pose :

$$f_0(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } |f(x)|>\alpha\\ 0 & \text{si } |f(x)|\le\alpha\end{cases}\qquad\text{et}\qquad f_1(x)=f(x)-f_0(x).$$

Pour $p_0<p<p_1$ et $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\begin{cases}\|f_0\|_{L^{p_0}}^{p_0}=\displaystyle\int_{|f(x)>\alpha}|f(x)|^{p_0}dx\le\alpha^{p_0-p}\|f\|_{L^p}^p\ ,\\ \|f_1\|_{L^{p_1}}^{p_1}=\displaystyle\int_{|f(x)<\alpha}|f(x)|^{p_1}dx\le\alpha^{p_1-p}\|f\|_{L^p}^p\ .\end{cases}\tag{1.2.1}$$

On voit donc que $f_0\in L^{p_0}$ et $f_1\in L^{p_1}$ (ce qui redonne au passage l'inclusion $L^p\subset L^{p_0}+L^{p_1}$). Si l'on suppose que T est de type faible (p_j,p_j) $(j=0,1)$, il existe C_0 et C_1 tels que :

$$\lambda_{Tg}(t)\le\left(\frac{C_j\,\|g\|_{L^{p_j}}}{t}\right)^{p_j}\ ,\tag{1.2.2}$$

pour $g \in L^{p_j}(\mathbb{R}^n)$ $(j = 0, 1)$.

Puisque $f = f_0 + f_1$, on a $|Tf| \leq |Tf_0| + Tf_1|$ et

$$\lambda_{Tf}(t) \leq \lambda_{Tf_0}\left(\frac{t}{2}\right) + \lambda_{Tf_1}\left(\frac{t}{2}\right) .$$

Utilisant (1.2.2) pour f_0 et f_1 et tenant compte de (1.2.1) on obtient alors :

$$\lambda_{Tf}(t) \leq \left(2\frac{C_0}{t}\right)^{p_0} \int_{|f(x)|\geq\alpha} |f(x)|^{p_0} dx + \left(2\frac{C_1}{t}\right)^{p_1} \int_{|f(x)|\leq\alpha} |f(x)|^{p_1} dx .$$

Remarquons que cette inégalité a lieu pour tout α et tout t. <u>On choisit</u> maintenant de prendre <u>$\alpha = t$</u> et on obtient alors :

$$\begin{aligned} &\lambda_{Tf}(t) \leq (2C_0)^{p_0}\, \lambda_0(t) + (2C_1)^{p_1}\, \lambda_1(t) , \\ \text{avec}\quad &\lambda_0(t) = t^{-p_0} \int_{|f(x)|\geq\alpha} |f(x)|^{p_0} dx , \\ &\lambda_1(t) = t^{-p_1} \int_{|f(x)|\leq\alpha} |f(x)|^{p_1} dx . \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini il vient :

$$\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_0(t)dt \leq \int |f(x)|^{p_0} \left(\int_0^{|f(x)|} t^{p-p_0-1}dt\right) dx \leq \frac{1}{p-p_0} \int |f(x)|^p dx ,$$

puisque $p - p_0 > 0$. De même :

$$\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_1(t)dt \leq \int |f(x)|^{p_1} \left(\int_{|f(x)|}^\infty t^{p-p_1-1}dt\right) dx \leq \frac{1}{p_1-p} \int |f(x)|^p dx ,$$

puisque $p - p_1 < 0$. En conclusion on a montré que

$$\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_{Tf}(t)dt \leq \text{Constante} \cdot \int |f(x)|^p dx .$$

Avec le Lemme 1.1.1, ceci implique que $Tf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et que T est de type fort (p, p).

Avant de donner la démonstration du théorème dans le cas général, établissons quelques lemmes préliminaires :

Lemme 1.2.1. — *Pour $0 < r \leq \infty$, $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \infty$, il existe une constante C telle que pour toute fonction h décroissante et positive sur $]0, \infty[$, on a :*

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{1/r}h(t)\right)^{\alpha_2} \frac{dt}{t}\right)^{1/\alpha_2} \leq C \left(\int_0^\infty \left(t^{1/r}h(t)\right)^{\alpha_1} \frac{dt}{t}\right)^{1/\alpha_1} .$$

Preuve. — Notons

$$A = \int_0^\infty \left(t^{1/r}h(t)\right)^{\alpha_1} \frac{dt}{t} \cdot$$

Puisque h est décroissante on a :

$$\left(t^{1/r}h(t)\right)^{\alpha_1} \leq C_1 \int_{t/2}^t \left(s^{1/r}h(s)\right)^{\alpha_1} \frac{ds}{s} \leq C_1 A ,$$

et l'estimation est démontrée dans le cas $\alpha_2 = +\infty$.

Si $\alpha_2 < +\infty$ on écrit :

$$\int_0^\infty \left(t^{1/r}h(t)\right)^{\alpha_2} \frac{dt}{t} \leq \left(\sup_{t\geq 0} \left(t^{1/r}h(t)\right)^{\alpha_2-\alpha_1}\right) \int_0^\infty \left(t^{1/r}h(t)\right)^{\alpha_1} \frac{dt}{t} \ ,$$

et le lemme suit. □

Lemme 1.2.2. — *Soit g une fonction croissante positive sur $]0,\infty[$. Alors :*

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-1/r}g(t)\right)^{\alpha_2} \frac{dt}{t}\right)^{1/\alpha_2} \leq C \left(\int_0^\infty \left(t^{-1/r}g(t)\right)^{\alpha_1} \frac{dt}{t}\right)^{1/\alpha_1} \ ,$$

pour $0 < r \leq \infty$, $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \infty$.

Preuve. — Il suffit de faire le changement de variable $t \mapsto 1/t$ pour se ramener au lemme précédent. □

Démonstration du théorème. — **a)** Supposons $q_1 < +\infty$; pour $\alpha > 0$ donné, on pose

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \alpha \ , \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \alpha \ , \end{cases}$$

et $f_1(x) = f(x) - f_0(x)$. Les inégalités (1.2.1) ont donc lieu. et à la place de (1.2.2), nous avons :

$$\lambda_{Tf_j}(t) \leq \left(\frac{C_j \, \|f_j\|_{L^{p_j}}}{t}\right)^{q_j} \ ,$$

pour $j = 0, 1$. Puisque $|TF| \leq |Tf_0| + |Tf_1|$, on a encore

$$\lambda_{Tf}(t) \leq \lambda_{Tf_0}\left(\frac{t}{2}\right) + \lambda_{Tf_1}\left(\frac{t}{2}\right),$$

et choisissant $\alpha = \gamma t^\delta$ ($\delta > 0$ et $\gamma > 0$ étant des paramètres à choisir ultérieurement), on arrive à la majoration suivante :

$$\lambda_{Tf}(t) \leq \text{Const.} \left(t^{-q_0}\varphi_0(t)^{q_0/p_0} + t^{-q_1}\varphi_1(t)^{q_1/p_1}\right) \ ,$$

avec

(1.2.3) $$\varphi_0(t) = \int_{|f(x)|\geq \gamma t^\delta} |f(x)|^{p_0} dx \ ,$$

(1.2.4) $$\varphi_1(t) = \int_{|f(x)|\leq \gamma t^\delta} |f(x)|^{p_1} dx \ .$$

D'après le lemme 1.2.1 on a :

$$\int_0^\infty t^{q-q_0-1} \left(\varphi_0(t)\right)^{q_0/p_0} dt \leq C \left(\int_0^\infty t^{(q/q_0-1)p_0-1}\varphi_0(t)dt\right)^{q_0/p_0} .$$

Avec la définition (1.2.3), cette dernière intégrale vaut :

$$\int |f(x)|^{p_0} \left(\int_0^{(|f(x)|/\gamma)^{1/\delta}} t^{(q/q_0-1)p_0-1}dt\right) dx = \gamma^{p_0-p} \int |f(x)|^p dx \ ,$$

si $\delta = \dfrac{q-q_0}{p-p_0} \cdot \dfrac{p_0}{q_0}$, car alors $p_0 + \dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{q}{q_0} - 1\right) p_0 = p$.

De même d'après le lemme 1.2.2 on a :

$$\int_0^\infty t^{q-q_1-1}\left(\varphi_1(t)\right)^{q_1/p_1} dt \leq C\left(\int_0^\infty t^{(q/q_1-1)p_1-1}\varphi_1(t)dt\right)^{q_1/p_1},$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{(q/q_1-1)p_1-1}\varphi_1(t)dt &= \int |f(x)|^{p_1}\left(\int_{(|f(x)|/\gamma)^{1/\delta}}^\infty t^{(q/q_1-1)p_1-1}dt\right)dx\\ &=\gamma^{p_1-p}\int |f(x)|^p dx\ ,\end{aligned}$$

car avec le **même choix de** δ on a

$$p_1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{q}{q_1}-1\right)p_1 = p\ .$$

Finalement on a la majoration :

$$\begin{aligned}\int t^{q-1}\lambda_{Tf}(t)dt &\leq \text{Const.}\left(\left(\gamma^{p_0-p}\|f\|_{L^p}^p\right)^{q_0/p_0}+\left(\gamma^{p_1-p}\|f\|_{L^p}^p\right)^{q_1/p_1}\right)\\ &\leq \text{Const.}\|f\|_{L^p}^p\end{aligned}$$

si l'on choisit $\gamma = \|f\|_{L^p}^{1-\delta}$. Cette estimation se réécrit :

$$\|Tf\|_{L^q}\leq C\,\|f\|_{L^p}\ ,$$

et le théorème est démontré dans le cas $q_1<\infty$.

b) Lorsque $q_1=\infty$, on refait le même découpage $f=f_0+f_1$ avec $\alpha=\gamma t^\delta$,

$$\delta=\frac{q-q_0}{p-p_0}\cdot\frac{p_0}{q_0}=\frac{p_1}{p_1-p}\ ,$$

et γ à choisir. On a :

$$\begin{aligned}\|f_0\|_{L^{p_0}}^{p_0}&=\varphi_0(t)=\int_{|f(x)|\geq\gamma t^\delta}|f(x)|^{p_0}dx\ ,\\ \|f_1\|_{L^{p_1}}&\leq\left(\gamma t^\delta\right)^{1-\frac{p}{p_1}}\|f\|_{L^p}^{p/p_1}=t\gamma'\ .\end{aligned}$$

De plus par hypothèse on a :

$$\begin{aligned}\lambda_{Tf_0}\left(\frac{t}{2}\right)&\leq\left(\frac{C_0\,\|f_0\|_{L^{p_0}}}{t}\right)^{q_0}\ ,\\ \|Tf_1\|_{L^\infty}&\leq C_1\|f_1\|_{L^{p_1}}\ .\end{aligned}$$

On a donc $\lambda_{Tf_1}(t/2)=0$ si $t/2>C_1\|f_1\|_{L^{p_1}}$, ce qui sera toujours vrai si $1>2C_1\gamma'$, c'est-à-dire si $\dfrac{\gamma}{\|f\|_{L^p}}$ est assez petit. Dans ce cas, on a :

$$\lambda_{Tf}(t)\leq\lambda_{Tf_0}\left(\frac{t}{2}\right)\ ,$$

et comme plus haut on conclut que

$$\int_0^\infty t^{q-1}\lambda_{Tf_0}\left(\frac{t}{2}\right)dt<\infty\ ,$$

et le théorème est démontré. $\square$

CHAPITRE 2

INTÉGRALES FAIBLEMENT SINGULIÈRES

2.1. Inégalité de Young

Théorème 2.1.1. — *Soient p, q, r dans $[1, \infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1 + 1/r$. Alors pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, l'intégrale*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

converge pour presque tout x, et $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. De plus,

$$\|h\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \ .$$

Preuve. — 1) Traitons d'abord le cas où $r = \infty$; on a alors $1/p + 1/q = 1$. Mais alors l'intégrale $h(x)$ converge pour tout x puisque $f(x - \cdot) \in L^p$ et $g \in L^q$, et d'après l'inégalité de Hölder :

$$|h(x)| \leq \|f(x-\cdot)\|_{L^p} \|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \ .$$

2) Traitons maintenant le cas où $r = 1$. On a alors $r = p = q = 1$. L'intégrale double

$$\iint |f(x-y)|\,|g(y)|dxdy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

converge d'après le théorème de Fubini.

Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int |f(x-y)|\,|g(y)|dy$ converge pour presque tout x. Par suite l'intégrale définissant h converge absolument pour presque tout x et

$$|h(x)| \leq \int |f(x-y)|\,|g(y)|dy$$

$$\int |h(x)|dx \leq \iint |f(x-y)|\,|g(y)|dxdy \, \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \ .$$

3) Nous supposons maintenant $1 < r < \infty$, et alors p et q sont aussi finis. On écrit :

$$|f(x-y)g(y)| = \varphi_x(y) \cdot \psi_x(y) \ ,$$

$$\text{avec} \quad \varphi_x(y) = |f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r} \ ,$$

$$\psi_x(y) = |f(x-y)|^{1-p/r}|g(y)|^{1-q/r} \ .$$

(On remarquera que $p \leq r$ et $q \leq r$.)

On a :

$$(\varphi_x(y))^r = |f(x-y)|^p |g(y)|^q \ .$$

Puisque $|f|^p$ et $|g|^q$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, d'après le raisonnement du 2) on voit que $\varphi_x \in L^r$ pour presque tout x et que :

$$\iint \left|\varphi_x(y)\right|^r dxdy = \|f\|_{L^p}^p \|g\|_{L^q}^q \ . \tag{2.1.1}$$

Montrons que $\psi_x(\cdot)$ est dans $L^{r'}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. (r' exposant conjugué de r : $1/r' = 1 - 1/r$). On a, en effet :

$$(\psi_x(y))^{r'} = |f(x-y)|^{pr'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} |g(y)|^{qr'\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)} \ .$$

Posons $r'\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{1}{s} > 0$, $r'\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{t} > 0$.

Remarquons alors que :

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = r'\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{2}{r}\right) = r'\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 1 \ .$$

On est donc dans la situation du 1) et on a :

$$\int |\psi_x(y)|^{r'} dy \le \left(\int |f(x-y)|^p dy\right)^{1/s} \left(\int |g(y)|^q dy\right)^{1/t} \ ,$$

soit :

$$\int |\psi_x(y)|^{r'} dy \le \|f\|_{L^p}^{p/s} \|g\|_{L^q}^{q/t} \ . \tag{2.1.2}$$

D'après (2.1.1), $\varphi_x(\cdot) \in L^r(\mathbb{R}^n)$ pour presque tout x, donc avec (2.1.2), $\varphi_x(\cdot)\psi_x(\cdot)$, c'est-à-dire $|f(x-y)g(y)|$, est intégrable pour presque tout x. On a aussi :

$$|h(x)| \le \left(\int |\varphi_x(y)|^r dy\right)^{1/r} \left(\int |\psi_x(y)|^{r'} dy\right)^{1/r'} \ ,$$

et

$$\int |h(x)|^r dx \le \iint |\varphi_x(y)|^r dy \|f\|_{L^p}^{\frac{pr}{sr'}} \|g\|_{L^q}^{\frac{qr}{tr'}} \ ,$$

ou enfin :

$$\|h\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}^{p\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{sr'}\right)} \|g\|_{L^q}^{q\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{tr'}\right)} \ .$$

On conclut en vérifiant que $p\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{sr'}\right) = 1$ et que $q\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{tr'}\right) = 1$! □

2.2. Noyaux faiblement singuliers

Le théorème 2.1.1 admet la généralisation suivante :

Théorème 2.2.1. — *Soient $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ et $1 \le r < \infty$ tels que $1/p + 1/q = 1 + 1/r$. Soit $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et soit f mesurable telle que :*

$$\forall t > 0 \ , \quad \lambda_f(t) \le \left(\frac{C_1}{t}\right)^p \ .$$

Alors l'intégrale $h(x) = \int f(x-y)g(y)dy$ *converge pour presque tout* x *et on a :*

$$\forall t > 0 \ , \quad \lambda_h(t) \leq \left(\frac{\gamma C_1 \|g\|_{L^q}}{t}\right)^r \ ,$$

où γ *ne dépend que de* p*,* q*,* r *et* n*. En outre, si* $1 < q < \infty$*, alors* $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\|h\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma' C_1 \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \ ,$$

où γ' *ne dépend que de* p*,* q*,* r *et* n*.*

Démonstration. — Remplaçant f par f/C_1 et g par $g/\|g\|_{L^q}$ on voit qu'on peut supposer que

$$C_1 = \|g\|_{L^q} = 1 \ .$$

Pour $\alpha > 0$ (à choisir) fixé on pose :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \alpha \ , \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \alpha \ , \end{cases}$$

et $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. On a :

$$\lambda_{f_1}(t) = \begin{cases} \lambda_f(\alpha) & \text{pour } t \leq \alpha \ , \\ \lambda_f(t) & \text{pour } t > \alpha \ , \end{cases}$$

et

$$\lambda_{f_2}(t) = \begin{cases} \lambda_f(t) - \lambda_f(\alpha) & \text{pour } t \leq \alpha \ , \\ 0 & \text{pour } t > \alpha \ . \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\|f_1\|_{L^1} = \int_0^\infty \lambda_{f_1}(t)dt = \alpha\lambda_f(\alpha) + \int_\alpha^\infty \lambda_f(t)dt \ ,$$

et puisque $\lambda_f(t) \leq t^{-p}$ et $p > 1$, il vient :

(2.2.1) $$\|f_1\|_{L^1} \leq \frac{p}{p-1}\alpha^{1-p} \ .$$

Notant q' l'exposant conjugué de q ($1/q' = 1 - 1/q = 1/p - 1/r$), on a : $q' > p$ et

$$\|f_2\|_{L^{q'}}^{q'} = q' \int_0^\infty t^{q'-1}\lambda_{f_2}(t)dt \leq q' \int_0^\alpha t^{q'-p-1}dt = \frac{q'}{q'-p}\alpha^{q'-p} \ ,$$

d'où

(2.2.2) $$\|f_2\|_{L^{q'}} \leq \gamma\alpha^{1-p/q'} \ .$$

(Pour établir (2.2.2) on a suposé que $q' < \infty$, mais si $q' = \infty$ on voit immédiatement que (2.2.2) a encore lieu avec $\gamma = 1$).

Puisque $f = f_1 + f_2$ on voit que $h = h_1 + h_2$ avec :

$$h_j(x) = \int f_j(x-y)g(y)dy \ ,$$

le sintégrales convergeant (absolument) pour presque tout x ; en outre on a $h_1 \in L^q$ et $h_2 \in L^\infty$ avec :

$$\|h_1\|_{L^q} \leq \gamma_1' \|f_1\|_{L^1} \leq \gamma_1\alpha^{1-p}$$
$$\|h_2\|_{L^\infty} \leq \gamma_2' \|f_2\|_{L^{q'}} \leq \gamma_2\alpha^{1-p/q'} \ .$$

D'après le lemme 1.1.1, on a :

$$\lambda_{h_1}(t) \leq \left(\frac{\gamma_1 \alpha^{1-p}}{t}\right)^q ,$$

et

$$\lambda_{h_2}(t) = 0 \quad \text{si } t > \gamma_2 \alpha^{1-p/q'} .$$

Par ailleurs on a $\lambda_h(t) \leq \lambda_{h_1}(t/2) + \lambda_{h_2}(t/2)$ et choisissant $t = 2\gamma_2\alpha^{1-p/q'}$ on voit que

$$\lambda_h(t) \leq \gamma_3 t^{\frac{q'}{q'-p}(1-p)q-q} = \gamma_3 t^{-r} ,$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

D'après ce qui précède on voit que l'application linéaire $g \mapsto h = f * g = Tg$ est de type faible $(1, p)$ et aussi de type faible (q_0, r_0) pour tout $q_0 < p'$ $(1/p + 1/p' = 1)$.
Par conséquent, d'après le théorème de Marcinkiewicz, elle est de type fort (q, r) pour $1 < q < q_0$ et $q_0 < p'$ étant arbitraire, elle est de type fort (q, r) dès que $1 < q < p'$.
(On notera que si $1/q = (1 - \theta) + \theta/q_0$, alors $1/r = (1 - \theta)/p + \theta/r_0$). □

Corollaire 2.2.2. — *Soit $f(x)$ une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$ telle que :*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-\alpha}} ,$$

pour un $0 < \alpha < n$. Alors pour tout q tel que $1 < q < n/\alpha$ et tout $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ avec $1/r = 1/q - \alpha/n$ et

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \gamma C \|g\|_{L^q} .$$

Preuve. — Il suffit de remarquer que

$$\lambda_f(t) \leq \text{mes}\left\{x \ / \ \frac{C}{|x|^{n-\alpha}} > t\right\} = \left(\frac{\gamma_3 C}{t}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} ,$$

et d'appliquer le théorème précédent avec $p = \dfrac{n}{n-\alpha}$. □

CHAPITRE 3

INTÉGRALES SINGULIÈRES DE CALDERON–ZYGMUND (THÉORIE L^2)

Il s'agit de définir et d'étudier l'opérateur de convolution avec une fonction $f(x)$, homogène de degré $-n$ sur $\mathbb{R}^n$.

3.1. Énoncé du théorème

On suppose dans tout ce chapitre que

Hypothèse 3.1.1. — *f est une fonction homogène de degré $-n$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, i.e. :*

$$f(\lambda x) = \lambda^{-n} f(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0 \quad \text{et pour } \lambda > 0\ . \tag{3.1.1}$$

En outre f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$ et, en notant Σ la sphère unité,

$$\int_\Sigma f(\sigma) d\sigma = 0\ . \tag{3.1.2}$$

Dans (3.1.2), $d\sigma$ désigne la mesure sur Σ correspondant à la décomposition $dx = r^{n-1} dr \cdot d\sigma$ en coordonnées polaires $x = r\sigma$, $r = |x|, \sigma = x/r \in \Sigma$. Notons que l'on pourrait affaiblir cette hypothèse de régularité C^1. Un régularité C^α, avec $\alpha > 0$, suffirait (Exercice).

Pour préparer le chapitre suivant et comprendre l'importance de (3.1.2), on note que (3.1.1) implique que que pour tous $0 < r < R < \infty$ on a :

$$\int_{r<|x|<R} f(x) dx = \log \frac{R}{r} \int_\Sigma f(\sigma) d\sigma\ , \tag{3.1.3}$$

La condition (3.1.2) veut simplement dire que ces intégrales sont bornées.

Pour $\varepsilon > 0$ on pose :

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| > \varepsilon\ , \\ 0 & \text{si } |x| \leq \varepsilon\ . \end{cases} \tag{3.1.4}$$

La stratégie générale est de commencer par étudier la convolution par f_ε puis de faire tendre ε vers 0.

On note $C^1_0(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe C^1 à support compact sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme 3.1.2. — *Soit $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$. Alors $f_\varepsilon * \varphi \in L^p$ pour tout $p > 1$ et la limite $\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon * \varphi$ existe dans L^p pour tout $p > 1$. On notera $F\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon * \varphi$.*

Preuve. — On a $f_\varepsilon * \varphi = f_1 * \varphi + (f_\varepsilon - f_1) * \varphi$. Puisque $f_1 \in L^p$ pour tout $p > 1$ et que $\varphi \in L^1$, $f_1 * \varphi \in L^p$ pour tout $p > 1$. Par ailleurs $f_\varepsilon - f_1$ est à support compact dans la couronne $\varepsilon \leq |x| \leq 1$, et φ à support compact (disons dans la boule $\{|x| \leq A\}$). Donc $g_\varepsilon = (f_\varepsilon - f_1) * \varphi$ est à support dans la boule de rayon $A + 1$. On a :

$$g_\varepsilon(x) = \int_{\varepsilon<|y|<1} f(y)\varphi(x-y)dy \ ,$$

et à cause des propriétés (3.1.3) et (3.1.2) on a aussi :

$$g_\varepsilon(x) = \int_{\varepsilon<|y|<1} f(y)\left(\varphi(x-y) - \varphi(x)\right)dy \ .$$

Puisque φ est de classe C^1 et à support compact, il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ |\varphi(x-y) - \varphi(x)| \leq C|y| \ ,$$

et on obtient :

$$|g_\varepsilon(x)| \leq C \int_{\varepsilon<|y|<1} |y|\,|f(y)|dy \ .$$

Mais d'après (3.1.1) on a :

$$|f(y)| \leq |y|^{-n} \max_{\sigma\in\Sigma} |f(\sigma)| \ , \tag{3.1.5}$$

et puisque $|y|^{-n+1}$ est intégrable sur la boule unité, on voit que les g_ε sont bonrées en norme L^∞. En outre on obtient de même

$$|g_\varepsilon(x) - g_{\varepsilon'}(x)| \leq C' \int_{\varepsilon'<|y|<\varepsilon} |y|^{-n+1}dy \ ,$$

ce qui montre que g_ε converge vers $g(x) = \displaystyle\int_{|y|\leq 1} f(y)\left(\varphi(x-y) - \varphi(x)\right)dy$ dans L^∞.

Puisque g_ε et g sont à support dans la boule $\{|x| \leq A+1\}$, $g_\varepsilon \to g$ dans L^p pour tout $p \geq 1$. □

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 3.1.3. — *Il existe une constante C telle que pour tout $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ on ait :*

$$\|F\varphi\|_{L^2} \leq C\,\|\varphi\|_{L^2} \ .$$

Par suite, F se prolonge en opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.

3.2. Le Lemme de Cotlar-Stein

La démonstration du théorème **??** repose sur le

***Lemme 3.2.1* (Cotlar–Stein).** — *Soient $T_0, T_{\pm1}, \dots, T_{\pm N}$ une famille d'opérateurs bornés dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\|T_k^* T_j\| \leq \omega(k-j) \ ,$$
$$\|T_j T_k^*\| \leq \omega(j-k) \ ,$$

où ω est une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}_+$. Alors

$$\Bigg\| \sum_{|j|\leq N} T_j \Bigg\| \leq \sum_j \sqrt{\omega(j)} \ .$$

(les normes désignent les normes d'opèrateurs de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$).

Preuve. — On part de la relation suivante :

$$\|T\|^2 = \|T^*T\| = \lim_{n\to+\infty} \|(T^*T)^n\|^{1/n} \ . \tag{3.2.1}$$

On applique (3.2.1) à $T = T_{-N} + \ldots + T_N$; on a :

$$(T^*T)^n = \sum_{\substack{-N\leq k_1\leq N \\ -N\leq j_1\leq N \\ \vdots \\ -N\leq j_n\leq N}} T^*_{k_1}T_{j_1}\ldots T^*_{k_n}T_{j_n}$$

On majore $\|T^*_kT_j\|$ par $\omega(k-j)$ et il vient :

$$\big\|T^*_{k_1}T_{j_1}\ldots T^*_{k_n}T_{j_n}\big\| \leq \omega(k_1-j_1)\omega(k_2-j_2)\ldots\omega(k_n-j_n) \ . \tag{3.2.2}$$

Notant $A = \sum_j \sqrt{\omega(j)}$, et majorant $\|T^*_{k_1}\| = \|T^*_{k_1}T_{k_1}\|^{1/2} \leq \sqrt{\omega(0)} \leq A$, et $\|T_{j_n}\| \leq A$, on obtient aussi :

$$\big\|T^*_{k_1}T_{j_1}\ldots T^*_{k_n}T_{j_n}\big\| \leq A\omega(j_1-k_2)\omega(j_2-k_3)\ldots\omega(j_{n-1}-k_n)A \ ,$$

et avec (3.2.2) il vient :

$$\big\|T^*_{k_1}T_{j_1}\ldots T^*_{k_n}T_{j_n}\big\| \leq A\left(\omega(k_1-j_1)\omega(j_1-k_2)\ldots\omega(k_n-j_n)\right)^{1/2} \ .$$

On somme ces inégalités ; si l'on somme d'abord en j_n, on voit que dans le membre de droite on a $A\left(\omega(k_1-j_1)\omega(j_1-k_2)\ldots\omega(j_{n-1}-k_n)\right)^{1/2}$ en facteur de $\sum\left(\omega(k_n-j_n)\right)^{1/2}$, cette dernière somme valant A. On voit donc qu'en sommant successivement par rapport à j_n, k_n, j_{n-1},…, j_1, on fait sortir à chaque fois la somme de la série A.

À la fin il reste à sommer par rapport à k_1, $(2N+1)$ termes et on obtient l'estimation

$$\|(T^*T)^n\| \leq (2N+1)A^{2n} \ .$$

Prenant la racine $2n$–ième et faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient le lemme puisque $(2N+1)^{1/2n} \to 1$. □

3.3. Preuve du théorème 3.1.3

Revenons aux intégrales singulières. On suppose que f satisfait l'hypothèse 3.1.1 et pour $j \in \mathbb{Z}$ on pose :

$$f_j(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 2^j < |x| < 2^{j+1} \ , \\ 0 & \text{sinon} \, , \end{cases}$$

et on définit l'opérateur T_j par

$$T_j\varphi = f_j * \varphi \ . \tag{3.3.1}$$

Il est clair que $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et T_j est borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. En outre on a :

$$\|T_j\varphi\|_{L^2} = \|f_j * \varphi\|_{L^2} \leq \|f_j\|_{L^1} \|\varphi\|_{L^2} \ ,$$

et donc

$$\|T_j\| \leq \|f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \int_{2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}} \frac{dx}{|x|^n} \leq C' \ . \tag{3.3.2}$$

Lemme 3.3.1. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tous j et k de $\mathbb{Z}$ on a :*

$$\|T_k^* T_j\| = \|T_j T_k^*\| \leq C\, 2^{-|k-j|} \ . \tag{3.3.3}$$

Preuve. — Supposons que $j - k \geq 2$; l'adjoint T_k^* est l'opérateur de convolution par $\check{\overline{f_k(x)}} = \overline{f_k(-x)}$; par conséquent $T_k^* T_j$ et $T_j T_k^*$ sont égaux et représentent l'opérateur de convolution par :

$$f_{j,k}(x) = f_j * \check{\overline{f_k}} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f_k(y)} f_j(x+y) dy \ .$$

On a donc la majoration :

$$\|T_k^* T_j\| = \|T_j T_k^*\| \leq \|f_{j,k}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \ . \tag{3.3.4}$$

Or f_j est à support dans la couronne $2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}$ et $\overline{f_k}$ à support dans la couronne $2^k \leq |x| \leq 2^{k+1}$. Par conséquent $f_{j,k}$ est à support dans la couronne

$$\Gamma = \left\{ x \ / \ 2^j - 2^{k+1} \leq |x| \leq 2^{j+1} + 2^{k+1} \right\} \ .$$

Considérons alors la couronne :

$$\Gamma' = \left\{ x \ / \ 2^j + 2^{k+1} \leq |x| \leq 2^{j+1} - 2^{k+1} \right\} \ ,$$

de sorte que pour tout $x \in \Gamma'$ et tout $|y| \leq 2^{k+1}$ on ait $2^j \leq |x+y| \leq 2^{j+1}$. Pour $x \in \Gamma'$ on a donc :

$$f_{j,k}(x) = \int_{2^k \leq |y| \leq 2^{k+1}} \overline{f_k(y)} f_j(x+y) dy \ ,$$

et avec la propriété de moyenne nulle,

$$f_{j,k}(x) = \int_{2^k \leq |y| \leq 2^{k+1}} \overline{f_k(y)} \left(f_j(x+y) - f_j(x) \right) dy \ .$$

Pour σ sur la sphère unité et pour $|u| \leq 1/2$, on a $|f(\sigma + u) - f(\sigma)| \leq C|u|$ puisque f est de classe C^1 sur la couronne $1/2 \leq |x| \leq 3/2$. Par homogénéité on voit que :

$$|f(x+y) - f(x)| \leq C_1 \frac{|y|}{|x|^{n+1}} \ , \tag{3.3.5}$$

pour $|y| \leq |x|/2$.

Puisque $k \leq j+2$, pour $x \in \Gamma'$ et $|y| \leq 2^{k+1}$ on a bien $|y| \leq |x|/2$ et en appliquant l'inégalité (3.3.5) et la majoration (3.1.5) on trouve que :

$$|f_{j,k}(x)| \leq \int_{2^k \leq |y| \leq 2^{k+1}} \frac{C_2}{|y|^n} \frac{|y|}{|x|^{n+1}} dy \leq \frac{C_3}{|x|^{n+1}} 2^k \ .$$

On a alors :

$$\int_{\Gamma'} |f_{j,k}(x)| dx \leq \int_{|x| \geq 2^j} C_3 2^k \frac{dx}{|x|^{n+1}} \leq C_4 2^{k-j} \ . \tag{3.3.6}$$

Par ailleurs on a $|f_j(x+y)| \leq C\,2^{-nj}$ et donc puisque

$$\int_{2^k \leq |y| \leq 2^{k+1}} \frac{dy}{|y|^n} = \text{Const.}\ ,$$

on a $|f_{j,k}(x)| \leq C_5 2^{-nj}$. Par conséquent,

$$\|f_{j,k}\|_{L^1(\Gamma\setminus\Gamma')} \leq C_5\,2^{-nj}\,\text{mes}\,(\Gamma\setminus\Gamma')\ .$$

La mesure de la couronne $r < |x| < R$ étant Const.$(R^n - r^n)$, et $\Gamma \setminus \Gamma'$ étant la réunion des deux couronnes

$$2^j - 2^{k+1} < |x| < 2^j + 2^{k+1}\ ,\quad 2^{j+1} - 2^{k+1} < |x| < 2^{j+1} + 2^{k+1}\ ,$$

on voit que

$$\|f_{j,k}\|_{L^1(\Gamma\setminus\Gamma')} \leq C\left(\left(1+2^{k+1-j}\right)^n - \left(1-2^{k+1-j}\right)^n\right)\ .$$

Utilisant que pour $t < 1/2$ on a : $(1+t)^n - (1-t)^n \leq \text{Const.}t$, on obtient

$$\|f_{j,k}\|_{L^1(\Gamma\setminus\Gamma')} \leq C\,2^{k-j}\ ,$$

ce qui avec (3.3.6) montre l'inégalité (3.3.3) lorsque $j - k \geq 2$. Si $k - j \leq 2$, il suffit de permuter le rôle de j et k, et si $|j-k| \leq 1$, il suffit d'appliquer (3.3.2). Le lemme est donc démontré. □

Démonstration du théorème. — D'après le lemme de Cotlar–Stein, si l'on pose :

$$g_N(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=-N}^{N} f_j(x) = f(x) & \text{si } 2^{-N} < |x| < 2^{N+1}\ , \\ 0 & \text{sinon}\,, \end{cases}$$

et si l'on note F_N l'opérateur de convolution avec g_N, il existe C indépendant de N et φ tel que :

$$\|F_N\varphi\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^2}\ , \tag{3.3.7}$$

pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Mais pour $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ on sait d'après le lemme 3.1.2 que $F_N\varphi$ converge vers $F\varphi$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Passant à la limite dans (3.3.7) on obtient :

$$\|F\varphi\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^2}\ ,$$

avec la même constante C. □

CHAPITRE 4

DISTRIBUTIONS DE TYPE 0

Le but de ce chapitre est de généraliser les résultats du chapitre précédent au cas de la convolution par certaines fonctions non homogènes, “les distributions de type 0”, (voir corollaire 4.4.3). On étudie aussi leur transformées de Fourier.

4.1. Parties finies

Soit $f(x)$ une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifie pour une constante C_0 convenable

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |f(x)| \leq \frac{C_0}{|x|^n}\ . \tag{4.1.1}$$

f définit une distribution sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, mais par sur $\mathbb{R}^n$ car elle n'est pas (forcément) intégrable au voisinage de 0. Cependant il existe des distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dont la restriction à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est f : en effet, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \tag{4.1.2}$$

converge si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est telle que $\varphi(0) = 0$, car au voisinage de 0 on a alors $|f(x)\varphi(x)| \lesssim 1/|x|^{n-1}$ et $1/|x|^{n-1}$ est intégrable.

Mais la condition $\varphi(0) = 0$ définit un hyperplan de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, notons-le E ; choisissant $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\theta(0) \neq 0$ ($\theta \notin E$), on a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = E \oplus \mathbb{R}\theta$ et pour définir la distribution T, il suffit de définir $\langle T, \varphi\rangle$ par la formule (4.1.2) si $\varphi \in E$, et de donner une valeur arbitraire à $\langle T, \theta\rangle$.

On peut aussi procéder de la façon suivante : soit θ une fonction mesurable bornée à support compact (nulle pour $|x|$ grand) qui vaut 1 sur tout un voisinage de l'origine. Alors :

Proposition 4.1.1. — *Si f vérifie* (4.1.1)*, l'intégrale*

$$\langle T_\theta, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)\right) dx \tag{4.1.3}$$

converge pour tout $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ et définit une distribution T_θ. Si θ et θ' sont deux fonctions comme indiquées ci-dessus, alors il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $T_{\theta'} = T_\theta + a\delta$, où δ désigne la masse de Dirac á l'origine.

Preuve. — Soient A et ε tels que $\theta(x) = 0$ pour $|x| > A$, et $\theta(x) = 1$ pour $|x| < \varepsilon$. Les intégrales suivantes sont évidemment convergentes “

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)\varphi(x)dx \ , \quad \text{et } \varphi(0)\int_{\varepsilon\leq|x|\leq A} f(x)\theta(x)dx \ .$$

Pour $|x| < \varepsilon$, on a :

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq |x| \max_{|x|\leq\varepsilon} |\nabla\varphi(x)| \ ,$$

et l'intégrale

$$\int_{|x|<\varepsilon} |f(x)|\ |\varphi(x) - \varphi(0)|\, dx \lesssim \int_{|x|<\varepsilon} \frac{dx}{|x|^{n-1}} < \infty$$

converge. Par conséquent l'intégrale (4.1.3) converge et

$$|\langle T_\theta, \varphi\rangle| \leq C \left(\max|\varphi(x)| + \max_{|x|\leq\varepsilon} |\nabla\varphi(x)| \right) \ ,$$

avec C indépendante de φ si le support de φ reste contenu dans un compact fixe, ce qui montre que T_θ est une distribution.

Enfin, il est clair que :

$$\langle T_{\theta'} - T_\theta, \varphi\rangle = \varphi(0) \int \big(\theta(x) - \theta'(x)\big)\, f(x)dx \ ,$$

l'intégrale étant bien convergente puisque $\theta(x) - \theta'(x) = 0$ à la fois pour $|x|$ grand et pour $|x|$ petit. □

Définition 4.1.2. — *Dans la suite, on note* $T_\theta = \mathrm{pf}_\theta\, f$.

4.2. Distributions de type 0

Définition 4.2.1. — *Une distribution de type* 0 *sur* $\mathbb{R}^n$ *est une distribution* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *telle que :*

i) la restriction de T *à* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *est une fonction mesurable* f*, et il existe* C_0 *tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |f(x)| \leq \frac{C_0}{|x|^n} \ ; \tag{4.2.1}$$

ii) pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*, il existe* C *tel que*

$$\forall t > 0,\ |\langle T, \varphi_t\rangle| \leq C \ , \tag{4.2.2}$$

où l'on note $\varphi_t(x) = \varphi(x/t)$.

Proposition 4.2.2. — *Soit* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *dont la restriction à* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *est une fonction* f *qui vérifie* (4.2.1)*. Alors* T *est une distribution de type* 0 *si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

i) il existe $C_1 > 0$ *tel que :*

$$\forall t,\ \forall t',\ 0 < t < t' < \infty,\ \left| \int_{t<|x|<t'} f(x)dx \right| \leq C_1 \ ; \tag{4.2.3}$$

ii) T *est de la forme* $\mathrm{pf}_\theta\, f + a\delta$.

Preuve. — **a)** Supposons que f vérifie (4.2.3), et montrons que $T = \mathrm{pf}_\theta\, f$ est de type 0. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule $\{|x| \leq R\}$ et telle que $\varphi(0) = 0$, on a $|\varphi(x)| \leq C|x|$ et

$$|\langle T, \varphi_t \rangle| \leq C\, C_0 \int |x| \leq Rt \frac{|x|}{t} \frac{dx}{|x|^n} = C' \int_0^{Rt} \frac{1}{t} dx = C'R\ .$$

Il suffit donc de montrer (4.2.2) pour *une* fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(0) = 1$. On prendra φ à support dans la boule $\{|x| \leq 2\}$ valant 1 sur la boule $\{|x| \leq 1\}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $R > 0$ tels que $\theta(x) = 0$ pour $|x| \geq R$ et $\theta(x) = 1$ pour $|x| \leq \varepsilon$. Pour $t < \varepsilon/2$, on a alors

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi_t \rangle = \int_{t \leq |x| \leq 2t} f(x) \varphi\left(\frac{x}{t}\right) dx - \int_{2t \leq |x| \leq \varepsilon} f(x)\varphi(0) dx \\ - \varphi(0) \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} f(x)\theta(x) dx\ .\end{aligned}$$

La première intégrale se majore en valeur absolue par :

$$\|\varphi\|_{L^\infty} \int_{t \leq |x| \leq 2t} \frac{C_0}{|x|^n} dx = C \int_t^{2t} \frac{dr}{r} = C \ln 2\ . \tag{4.2.4}$$

La seconde intégrale est bornée par hypothèse et la troisième ne dépend pas de t.

Pour $t > R$, on a

$$\langle T, \varphi_t \rangle = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq t} f(x) dx + \int_{t \leq |x| \leq 2t} f(x)\varphi\left(\frac{x}{t}\right) dx - \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} f(x)\theta(x) dx\ .$$

La première intégrale est bornée par hypothèse, la seconde se majore par (4.2.4) et la troisième ne dépend pas de t.

Pour $\varepsilon < t < R$, on a :

$$|\langle T_\theta, \varphi \rangle| \leq (\max |\varphi| + \max |\theta|) \int_{\varepsilon \leq 2R} |f(x)| dx\ ,$$

ce qui achève de montrer que (4.2.2) est satisfaite.

Par ailleurs on a $\langle \delta, \varphi_t \rangle = \varphi(0)$ pour tout t et δ est une distribution de type 0. En conclusion on a montré que si f vérifie (4.2.1) et (4.2.3), les distributions $\mathrm{pf}_\theta\, f + a\delta$ sont de type 0.

b) Inversement, donnons-nous T de type 0. Fixons $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule $\{|x| \leq 2\}$ et valant 1 pour $|x| \leq 1$. Alors $\varphi - \varphi_t$ est à support compact dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et

$$\langle T, \varphi - \varphi_t \rangle = \int f(x) \left(\varphi(x) - \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right) dx\ .$$

Pour $t \leq 1/2$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{2t < |x| < 1} f(x) dx = \langle T, \varphi - \varphi_t \rangle - \int_{1 \leq |x| \leq 2} f(x)\varphi(x) dx \\ - \int_{t \leq |x| \leq 2t} f(x) \left(1 - \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right) dx\ .\end{aligned}$$

Dans cette somme le premier terme est borné par hypothèse, le second ne dépend pas de t et le troisième se majore comme en (4.2.4).

Pour $t > 2$, on a :

$$\int_{1 < |x| < t} f(x) dx = \langle T, \varphi - \varphi_t \rangle - \int_{t \leq |x| \leq 2t} f(x)\varphi\left(\frac{x}{t}\right) dx + \int_{1 \leq |x| \leq 2} f(x)\varphi(x) dx\ ,$$

et on voit donc que les intégrales $\displaystyle\int_{1<|x|<t} f(x)dx$ sont bornées uniformément pour $t > 2$; elles le sont également pour $1 \leq t \leq 2$, et on a donc démontré que la fonction f vérifie (4.2.2). Pour achever la démonstration, il nous faut vérifier que T est de la forme $\mathrm{pf}_\theta\, f + a\delta$; mais la distribution $S = T - \mathrm{pf}_\theta\, f$ est nulle sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et de type 0 puisque T et $\mathrm{pf}_\theta\, f$ le sont. Puisque le support de S est (au plus) l'origine, S est une combinaison linéaire de dérivées de la masse de Dirac :

$$S = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \delta^{(\alpha)} \ .$$

Avec la même fonction φ que plus haut (valant 1 pour $|x| \leq 1$), on note $\varphi^{\langle\alpha\rangle}(x) = x^\alpha \varphi(x)$, et alors :

$$\langle S, \varphi_t^{\langle\alpha\rangle} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \alpha!\ a_\alpha t^{-|\alpha|} \ .$$

Puisque S est de type 0, ceci doit être borné lorsque $t \to 0$, ce qui implique que $a_\alpha = 0$ pour $\alpha \neq 0$, et $S = a_0 \delta$. $\square$

Remarque. — Si T est une distribution de type 0, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\varphi(0) = 0$ on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx \ .$$

En effet, il suffit de dire que T est de la forme $\mathrm{pf}_\theta\, f + a\delta$ et d'appliquer la définition (4.1.3) de pf_θ.

4.3. Convolution et transformation de Fourier

Pour étudier la convolution par des distributions de type 0, on utilise la transformation de Fourier qui donne une caractérisation simple des opérateurs de convolution bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Rappelons que si $T \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$, alors la convolution $T * \varphi$ est définie par la formule $(T * \varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle$ et $T * \varphi \in C^\infty \cap \mathcal{S}'$. En outre, en notant $\widehat{\ }$ la transformation de Fourier, on a $\widehat{T * \varphi} = \widehat{T}\widehat{\varphi}$, ce dernier terme étant défini comme la multiplication d'une distribution $\widehat{T}$ par une fonction C^∞, $\widehat{\varphi}$.

Théorème 4.3.1. — *Soit $T \in \mathcal{S}'$. Pour qu'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T * \varphi \in L^2 \quad \textit{et} \quad \|T * \varphi\|_{L^2} \leq C \|\varphi\|_{L^2} \ , \tag{4.3.1}$$

il faut et il suffit que $\widehat{T} \in L^\infty$. Dans ce cas, l'opérateur $u \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{T}.\widehat{u}\right)$, borné de L^2 dans L^2, prolonge à L^2 l'opérateur $\varphi \mapsto T * \varphi$.

Preuve. — Par transformation de Fourier, (4.3.1) est equivalent à

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \widehat{T}\varphi \in L^2 \quad \text{et} \quad \left\|\widehat{T}\varphi\right\|_{L^2} \leq C \|\varphi\|_{L^2} \tag{4.3.2}$$

ce qui est clair si $\widehat{T} \in L^\infty$.

Inversement, (4.3.2) implique que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\left|\langle \widehat{T}, \varphi^2 \rangle\right| = \left|\langle \widehat{T}\varphi, \varphi \rangle\right| \leq C\|\varphi\|_{L^2}^2. \tag{4.3.3}$$

On choisit une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, paire et telle que $\|\varphi\|_{L^2} = 1$. Pour $\delta > 0$ on note $\varphi_\delta(x) = \delta^{-n/2}\varphi(x/\delta)$ de sorte que φ_δ^2 est une approximation de l'indentité. En appliquant (4.3.3) à $\varphi_\delta(x - \cdot)$, on en déduit que

$$\forall \delta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left|(\widehat{T} * \varphi_\delta^2)(x)\right| \leq C. \tag{4.3.4}$$

Les fonctions $\widehat{T} * \varphi_\delta^2$ sont donc uniformément bornées dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour $\psi \in \mathcal{S}$, on a

$$\langle \widehat{T} * \varphi_\delta^2 \, , \, \psi \rangle = \langle \widehat{T} \, , \, \varphi_\delta^2 * \psi \rangle.$$

Comme $\varphi_\delta^2 * \psi\rangle$ converge vers ψ dans $\mathcal{S}$, on déduit de (4.3.4) que

$$\forall \psi \in \mathcal{S}, \quad \left|\langle \widehat{T} \, , \, \psi \rangle\right| \leq C\|\psi\|_{L^1}$$

ce qui implique, par densité de $\mathcal{S}$ dans L^1, que $\widehat{T} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. □

Toute distribution de type 0 est somme d'une distribution (de type 0) à support compact et d'une fonction de L^2. Par conséquent elle est tempérée et on peut considérer sa transformée de Fourier. En particulier, si $T = \mathrm{pf}_\theta\, f + a\delta$ est une distribution de type 0, on a :

$$(T * \varphi)(x) = a\varphi(x) + \int f(y)\,(\varphi(x-y) - \varphi(x)\theta(y))\,dy \ ,$$

et $\widehat{T * \varphi}(\xi) = \widehat{T}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$,

4.4. Distributions régulières de type 0

Définition 4.4.1. — *Une distribution T de type 0 sera dite régulière jusqu'à l'ordre $k \geq 0$ si sa restriction f à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est de classe C^k et vérifie :*

$$\forall x \neq 0, \ \forall \alpha, \ |\alpha| \leq k, \ |\partial_x^\alpha f(x)| \leq \frac{C_\alpha}{|x|^{n+\alpha}} \ . \tag{4.4.1}$$

Nous étudions dans ce paragraphe les transformées de Fourier des distributions régulières de type 0. Le premier résultat est le suivant.

Théorème 4.4.2. — *Soit T une distribution de type 0 régulière d'ordre 1. Alors sa transformée de Fourier est une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Avec le théorème 4.3.1 on en déduit le résultat suivant qui étend le théorème 3.1.3 du chapitre précédent.

Corollaire 4.4.3. — *L'opérateur de convolution par une distribution de type 0 régulière d'ordre 1 est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve du théorème 4.4.2. — Introduisons à nouveau une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 pour $|x| \leq 1$ et 0 pour $|x| \geq 2$. On notera $T_N = \varphi(x/N)T$.

T_N est une distribution à support compact, sa transformée de Fourier est donc une fonction régulière et on a :

$$\widehat{T_N}(\xi) = \langle T_N, e^{-ix\cdot\xi}\rangle = \left\langle T, \varphi\left(\frac{x}{N}\right) e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle \ . \tag{4.4.2}$$

On vérifie que T_N est une distribution de type 0, dont la restriction f_N à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est $f_N(x) = \varphi(x/N)f(x)$. On a en effet

$$|f_N(x)| \le \frac{C_0}{|x|^n} \ , \tag{4.4.3}$$

avec C_0 indépendant de N. En outre :

$$\frac{\partial f_N}{\partial x_j} = \varphi\left(\frac{x}{N}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\left(\frac{x}{N}\right)\ f(x) \ .$$

Puisque $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}\left(\dfrac{x}{N}\right) = 0$ sauf lorsque $N \le |x| \le 2N$, on a $\left|\dfrac{1}{N}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}\left(\dfrac{x}{N}\right)\right| \le \dfrac{C}{|x|}$, et avec (4.4.1), on voit que :

$$\left|\frac{\partial f_N}{\partial x_j}(x)\right| \le \frac{C_1}{|x|^{n+1}} \ , \tag{4.4.4}$$

avec C_1 indépendant de N.

On vérifie enfin en utilisant (4.2.2) que l'on a :

$$|\langle T_N, \varphi_t\rangle| \le C_2 \ , \tag{4.4.5}$$

avec C_2 indépendant de N et t.

Revenant à (4.4.2), on peut écrire pour $\xi \ne 0$:

$$\begin{aligned}\widehat{T_N}(\xi) = \langle T_N, \varphi(x|\xi|)\rangle &+ \left\langle T_N, \varphi(x|\xi|)\left(e^{-ix\cdot\xi} - 1\right)\right\rangle \\ &+ \left\langle T_N, (\varphi(x|\xi|) - 1)\, e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle \ .\end{aligned}$$

Le premier terme est de la forme $\langle T_N, \varphi_t\rangle$, avec $t = 1/|\xi|$, et se majore donc par C_2.

Pour $|x|\,|\xi| \le 2$, on a $|e^{-ix\cdot\xi} - 1| \le |x|\,|\xi|$ et on majore le deuxième terme par :

$$\int_{|x|\,|\xi|\le 2} \frac{C_0}{|x|^n}|x|\,|\xi|dx \le C_0' \int_0^{2/|\xi|} |\xi|dr = 2C_0' \ .$$

Quant au troisième terme, il s'écrit :

$$I(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\,(\varphi(x|\xi|) - 1)\, f_N(x)dx \ .$$

Multipliant par $-i\xi_j$ et intégrant par parties, on trouve

$$-i\xi_j I(\xi) = I_1 + I_2 \ ,$$

avec

$$I_1 = \int e^{-ix\cdot\xi}\,(1 - \varphi(x|\xi|))\,\frac{\partial f_N}{\partial x_j}(x)dx \ ; \quad I_2 = -\int e^{-ix\cdot\xi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x|\xi|)f_N(x)dx \ .$$

Compte tenu de (4.4.4), I_1 se majore par :

$$\int_{|x|\,|\xi|\ge 1} \frac{C_1}{|x|^{n+1}}dx = C_1' \int_{1/|\xi|}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = C_1'|\xi| \ ,$$

et I_2 se majore par :

$$\int_{1\le|x|\,|\xi|\le 2} |\xi| \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\|_{L^\infty} \frac{C_0}{|x|^n}dx = C_3|\xi| \int_{1/|\xi|}^{2/|\xi|} \frac{dr}{r} = C_3|\xi|\ln 2 \ .$$

Finalement on obtient que :

$$|\xi_j|\,|I(\xi)| \le C_4|\xi| \ .$$

Sommant en j, il vient que $I(\xi)$ est lui aussi borné, et on a donc montré que l'on a :

$$\left|\widehat{T_N}(\xi)\right| \le C_5 \ , \tag{4.4.6}$$

pour tout $\xi \neq 0$ et tout N. $\widehat{T_N}$ étant continue, (4.4.6) s'étend à $\xi = 0$.
Maintenant nous remarquons que $T_N - T_1$ n'est rien d'autre que la fonction $f_N(x) - f_1(x)$ qui est nulle au voisinage de 0. En outre, il est clair que $f_N - f_1$ converge quand $N \to \infty$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ vers $f - f_1 = T - T_1$. Par conséquent, $\widehat{T} - \widehat{T_1} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{T_N} - \widehat{T_1} \to \widehat{T} - \widehat{T_1}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Il ya donc une sous-suite N_k telle que $\widehat{T_{N_k}} - \widehat{T_1} \to \widehat{T} - \widehat{T_1}$ presque partout.

On a $\widehat{T} = \widehat{T_1} + \widehat{T} - \widehat{T_1}$; $\widehat{T_1}$ est une fonction continue bornée et $\widehat{T} - \widehat{T_1} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Par suite $\widehat{T}$ est une fonction mesurable et $\widehat{T_{N_k}} \to \widehat{T}$ presque partout. Mais alors on déduit de (4.2.2) que $\left|\widehat{T}(\xi)\right| \le C_5$, et le théorème est démontré. □

Théorème 4.4.4. — *Soit T une distribution de type 0 régulière d'ordre ∞. Alors sa transformée de Fourier est bornée sur $\mathbb{R}^n$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$,*

$$|\xi|^{|\alpha|}\left|\partial_\xi^\alpha \widehat{T}(\xi)\right| \text{ \textit{est bornée sur} } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ .$$

Preuve. — On sait que pour α et β multi-indices, $|\alpha| = |\beta|$,

$$\xi^\beta \partial_\xi^\alpha \widehat{T}(\xi) = \widehat{\partial_x^\beta x^\alpha T}\, i^{-(|\alpha|+|\beta|)} \ .$$

Montrons que $\partial_x^\beta x^\alpha T$ est une distribution de type 0, régulière d'ordre 1. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\langle \partial_x^\beta x^\alpha T, \varphi_t\rangle = (-1)^{|\beta|}\langle T, x^\alpha \partial_x^\beta \varphi_t\rangle \ .$$

Or puisque $|\alpha| = |\beta|$, on a $x^\alpha \partial_x^\beta\left(\varphi(x/t)\right) = \left(x^\alpha \partial_x^\beta\right)\varphi(x/t)$. Puisque $\psi = x^\alpha \partial_x^\beta \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que $\langle T, \psi_t\rangle$ est borné, on en déduit que $\langle \partial_x^\beta x^\alpha T, \varphi_t\rangle$ est aussi borné.

En outre, la restriction de $\partial_x^\beta x^\alpha T$ à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est $\partial_x^\beta x^\alpha f$, si $f = T|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$. Puisque f est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a $\partial_x^\beta x^\alpha f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. La formule de Leibniz montre que :

$$\partial_x^\beta x^\alpha f = \sum_{\substack{\gamma\le\beta\\ \gamma\le\alpha}} \binom{\beta}{\gamma} \frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!} x^{\alpha-\gamma}\partial_x^{\beta-\gamma} f \ ,$$

et que pour $|\gamma| = 1$,

$$\partial_x^\gamma \partial_x^\beta x^\alpha f = \sum 1 + |\gamma''| = |\gamma'| x^{\gamma''}\partial_x^{\gamma'} f \ .$$

Avec (4.4.1), on voit que $\partial_x^\beta x^\alpha T$ est une distribution de type 0 sur $\mathbb{R}^n$, régulière d'ordre 1. Par conséquent :

$$\widehat{\partial_x^\beta x^\alpha T} = (-1)^{|\alpha|}\xi^\beta \partial_\xi^\alpha \widehat{T} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \ .$$

Puisque l'on a $\displaystyle\sum_{|\beta|=|\alpha|} |\xi^\beta| \ge C|\xi|^{|\alpha|}$, on conlut que $|\xi|^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha \widehat{T} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. □

On va maintenant établir des "réciproques" des théorèmes précédents.

Théorème 4.4.5. — *Soit $p(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $p|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ soit de classe C^{n+1} et vérifie les estimations :*

$$\forall\alpha,\ |\alpha| \leq n+1,\ \forall\xi \neq 0,\ \left|\partial_\xi^\alpha p(\xi)\right| \leq C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}\ .$$

Alors $\mathcal{F}^{-1}p$ est une distribution de type 0, régulière d'ordre 0.

Preuve. — Soit $T = \mathcal{F}^{-1}p$, et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a :

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle p, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle\ ,$$

et donc

$$\langle T, \varphi_t\rangle = \langle p, \mathcal{F}^{-1}(\varphi_t)\rangle\ .$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\varphi_t)(\xi) &= (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)dx\\ &= (2\pi)^{-n}t^n\int e^{itx\cdot\xi}\varphi(x)dx = t^n\mathcal{F}^{-1}\varphi(t\xi)\ ,\end{aligned}$$

et $\left\|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_t)\right\|_{L^1} = \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\right\|_{L^1} < \infty$.

Donc on a :

$$|\langle T, \varphi_t\rangle| \leq \|p\|_{L^\infty}\left\|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_t)\right\|_{L^1} \leq \|p\|_{L^\infty}\left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\right\|_{L^1}\ ,$$

et la condition (4.2.2) est satisfaite. Il nous reste à montrer que $f = T|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ est une fonction de L^∞_{loc} et vérifie (4.2.1).

Introduisons à nouveau une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 pour $|x| \leq 1$ et 0 pour $|x| \geq 2$.

On introduit les fonctions $p_N(\xi) = \varphi(\xi/N)p(\xi)$. On a $p_N \in L^\infty$ et

$$\|p_N\|_{L^\infty} \leq \|p\|_{L^\infty} = C_0\ . \tag{4.4.7}$$

En outre p_N est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et vérifie :

$$\forall N,\ \forall\alpha,\ |\alpha| \leq n+1,\ \forall\xi\neq 0,\ \left|\partial_\xi^\alpha p_N(\xi)\right| \leq \frac{C_1}{|\xi|^{|\alpha|}}\ . \tag{4.4.8}$$

En effet, on a :

$$\partial_\xi^\alpha p_N(\xi) = \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\frac{1}{N^{|\beta|}}\left(\partial^\beta\varphi\right)\left(\frac{\xi}{N}\right)\partial^{\alpha-\beta}p\ .$$

Utilisant l'hypothèse sur les $\partial^{\alpha-\beta}p$ et le fait que $N \leq |\xi| \leq 2N$ sur le support des dérivées de φ, on obtient (4.4.8).

Notons $T_N = \mathcal{F}^{-1}p_N \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a

$$T_N(x) = \int e^{ix\cdot\xi}p_N(\xi)đ\xi\ . \tag{4.4.9}$$

(convention : $đ\xi = (2\pi)^{-n}d\xi$)

L'intégrale de (4.4.9) converge absolument, puisque p_N est borné et à support dans la boule $\{|\xi| \leq 2N\}$.

Pour $x \neq 0$, on coupe cette intégrale en deux : $T_N(x) = T_1 + T_2$, avec

$$T_1 = \int e^{ix\cdot\xi}\varphi(|x|\xi)p_N(\xi)đ\xi\ \ ;\ \ T_2 = \int e^{ix\cdot\xi}\left(1-\varphi(|x|\xi)\right)p_N(\xi)đ\xi\ .$$

On majore :

$$|T_1| \leq \int_{|\xi|\leq 2/|x|} C_0 d\xi = C_0'|x|^{-n} \ . \tag{4.4.10}$$

Pour α de longueur $|\alpha| = n+1$, on a :

$$\begin{aligned} x^\alpha T_2 &= i^{-|\alpha|} \int \partial_\xi^\alpha \left(e^{ix\cdot\xi}\right) (1-\varphi(|x|\xi))\, p_N(\xi) đ\xi \\ &= i^{|\alpha|} \int e^{ix\cdot\xi} \,(1-\varphi(|x|\xi))\, \partial_\xi^\alpha p_N(\xi) đ\xi \\ &\quad + i^{|\alpha|} \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\beta|}|x|^{|\beta|} \int e^{ix\cdot\xi} \left(\partial^\beta\varphi\right)(|x|\xi)\partial^{\alpha-\beta} p_N(\xi) đ\xi \ . \end{aligned}$$

Avec (4.4.8), on majore la première intégrale par :

$$\int_{|\xi|\geq 1/|x|} \frac{C_1}{|\xi|^{n+1}} d\xi = C_1'|x| \ .$$

Puisque les dérivées de φ sont à support dans la couronne $\{1 \leq |\xi| \leq 2\}$, on majore les autres termes par :

$$|x|^{|\beta|} \int_{1/|x|\leq|\xi|\leq 2/|x|} C_2|\xi|^{-(n+1)+\beta} d\xi = C_2'|x| \ .$$

En conclusion, pour tout α, $|\alpha| = n+1$, on a :

$$|x^\alpha|\, |I_2| \leq C_3|x| \ . \tag{4.4.11}$$

Notant que $|x|^{n+1} \leq C_4 \sum\limits_{|\alpha|=n+1} |x^\alpha|$, en sommant on obtient que :

$$|x|^{n+1}\, |I_2| \leq C_5|x| \ , \quad \text{donc que } |I_2| \leq C_5|x|^{-n} \ ,$$

et avec (4.4.10), on vient de montrer qu'il existe C_6 tel que pour tout N et tout $x \neq 0$, on a :

$$|T_N(x)| \leq \frac{C_6}{|x|^n} \ . \tag{4.4.12}$$

Il nous reste à passer à la limite quand $N \to \infty$. La fonction $p_N - p_1$ est nulle pour $|\xi| \leq 1$, de classe C^{n+1}, et

$$\text{pour } |\alpha| = n+1, \ \left|\partial_\xi^\alpha (p_N - p_1)\right| \leq C_1|\xi|^{-(n+1)} \ .$$

On voit alors que $\partial_\xi^\alpha (p_N - p_1)$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ vers $\partial_\xi^\alpha (p - p_1)$. Par Fourier inverse, on voit donc que $x^\alpha(T_N - T_1)$ converge vers $x^\alpha(T - T_1)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent $(T_N - T_1)(x)$ converge vers $(T - T_1)(x)$ pour $x \neq 0$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. On en déduit que $T|_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}$ est *continue* et passant á la limite dans (4.4.12), on obtient : $|f(x)| \leq C_6|x|^{-n}$, pour $x \neq 0$. □

On énonce maintenant une réciproque exacte du théorème 4.4.4 :

Théorème 4.4.6. — *Soit $p \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, dont la restriction à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est C^∞. On suppose en outre que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la fonction $|\xi|^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha p(\xi)$ est bornée sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Alors $\mathcal{F}^{-1}p$ est une distribution de type 0 régulière d'ordre ∞.

Preuve. — Soient j et k deux entiers de $\{1, \dots, n\}$. Notons $h = \xi_j \frac{\partial p}{\partial \xi_k}\big|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$, et q la distribution $\xi_j \frac{\partial p}{\partial \xi_k} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. h est bornée sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et définit une distribution $\widetilde{h}$ sur $\mathbb{R}^n$; on a en fait (exercice) $q = \widetilde{h} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

En outre, q est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et

$$\partial_\xi^\alpha q = \xi_j \partial_\xi^\alpha \frac{\partial p}{\partial \xi_k} + \alpha_j \partial_\xi^{\alpha-(j)} \frac{\partial p}{\partial \xi_k} \ ,$$

où (j) est le multi-indice $(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$, avec le 1 en j ième position.

On vient de démontrer que si p vérifie les hypothèses du théorème, alors $\frac{\partial}{\partial \xi_k}(\xi_j p)$ les vérifie aussi. Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$, on voit que les distributions $\partial_\xi^\alpha(\xi^\beta p)$ pour $|\alpha| = |\beta| = m$ les vérifient aussi. Par conséquent, en vertu du théorème 4.4.5, $T = \mathcal{F}^{-1}p$ est une distribution de type 0, et il en est de même de $x^\alpha \partial_x^\beta T$ pour $|\alpha| = |\beta|$. En outre, $(x^\alpha \partial_x^\beta T)|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} = x^\alpha \partial_x^\beta \left(T|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}\right)$ est continue ; on voit donc que $f = T|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que

$$\left| x^\alpha \partial_x^\beta f(x) \right| \leq \frac{C_{\alpha\beta}}{|x|^n} \ .$$

Sommant pour les $|\alpha| = |\beta|$, on voit que

$$\left| \partial_x^\beta f(x) \right| \leq \frac{C_{\alpha\beta}}{|x|^{n+|\beta|}} \ ,$$

ce qui achève de montrer que T est régulière d'ordre ∞. $\square$

CHAPITRE 5

INTÉGRALES SINGULIÈRES. THÉORIE L^p

Le but de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 5.0.7. — *Soit T une distribution de type 0 sur $\mathbb{R}^n$, régulière d'ordre 1. Alors pour tout p, $1 < p < \infty$, il existe C_p tel que :*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|T * \varphi\|_{L^p} \leq C_p \|\varphi\|_{L^p} \ ,$$

et l'opérateur $\varphi \mapsto T * \varphi$ se prolonge en opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.

Notons que le cas $p = 2$ a été établi au chapitre précédent (cf corollaire 4.4.3). On va montrer que T est de type faible $(1,1)$ et appliquer le théorème de Marcinkiewicz pour conclure lorsque $p \in]1,2]$. Pour $p > 2$, on procède par dualité. La preuve du type faible (1.1) repose sur une décomposition des fonctions due à Calderon et Zygmund

5.1. Décomposition de Calderon-Zygmund d'une fonction

Théorème 5.1.1. — *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$, et soit $\alpha > 0$. Alors il existe une décomposition*

$$\mathbb{R}^n = F \cup \Omega \ , \quad F \cap \Omega = \emptyset \ ,$$

telle que :

i) $|f(x)| \leq \alpha$ *p.p.* $x \in F$ *;*

ii) $\operatorname{mes} \Omega \leq \alpha^{-1} \|f\|_{L^1}$ *;*

iii) Ω *est une réunion finie ou dénombrable de cubes Q_j, deux à deux disjoints, et pour tout j :*

$$\alpha \leq \frac{1}{\operatorname{mes} Q_j} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq 2^n \alpha \ .$$

Preuve. — On fixe δ_0 assez grand pour que

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha 2^n \delta_0^n \ , \tag{5.1.1}$$

et on décompose $\mathbb{R}^n$ en la réunion de cubes deux à deux disjoints de côté de taille δ_0 :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} Q_{0,\nu} \ ,$$

avec

$$Q_{0,\nu} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \delta_0 \nu_j \leq x_j < \delta_0(1 + \nu_j), \text{ pour } j = 1, \ldots, n\} \ .$$

À cause de (5.1.1), on a pour tout ν,

$$\frac{1}{\operatorname{mes} Q_{0,\nu}} \int_{Q_{0,\nu}} |f(x)| dx \le 2^n \alpha \ . \tag{5.1.2}$$

On note A_0 l'ensemble des indices $\nu \in \mathbb{Z}^n$ tels que

$$\frac{1}{\operatorname{mes} Q_{0,\nu}} \int_{Q_{0,\nu}} |f(x)| dx > \alpha \ , \tag{5.1.3}$$

et $A'_0 = \mathbb{Z}^n \setminus A_0$. On découpe chaque cube $Q_{0,\nu}$ pour $\nu \in A'_0$, en 2^n cubes égaux, de côté de taille $\delta_1 = \delta_0/2$,

$$Q_{0,\nu} = \bigcup_{\mu} Q_{1,2\nu+\mu} \ ,$$

où μ parcourt l'ensemble des mulit-indices de $\mathbb{Z}^n$ dont les composantes sont soit 1 soit 0, et où

$$Q_{1,\nu} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \delta_1 \nu_j \le x_j < \delta_1(1+\nu_j), \ \text{pour } j = 1, \dots, n\} \ ,$$

si bien que l'on recouvre

$$F_1 := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\nu \in A_0} Q_{0,\nu}$$

par des cubes $Q_{1,\nu}$, ν variant dans un ensemble d'indices $B_1 \in \mathbb{Z}^n$.

Pour $\nu \in A'_0$, on a :

$$\frac{1}{\operatorname{mes} Q_{0,\nu}} \int_{Q_{0,\nu}} |f(x)| dx \le \alpha \ .$$

Donc si $Q_{1,\nu'} \subset Q_{0,\nu}$, on a :

$$\frac{1}{\operatorname{mes} Q_{1,\nu'}} \int_{Q_{1,\nu'}} |f(x)| dx = \frac{2^n}{\operatorname{mes} Q_{0,\nu}} \int_{Q_{1,\nu'}} |f(x)| dx \le 2^n \alpha \ . \tag{5.1.4}$$

On note maintenant A_1 l'ensemble des indices $\nu \in B_1$ tels que

$$\frac{1}{\operatorname{mes} Q_{1,\nu}} \int_{Q_{1,\nu}} |f(x)| dx > \alpha \ , \tag{5.1.5}$$

et $A'_1 = B_1 \setminus A_1$. On découpe maintenant les cubes $Q_{1,\nu}$ ($\nu \in A'_1$) en 2^n cubes égaux de côté $\delta_2 = \delta_1/2$, etc. Plus généralement, on montre par récurrence sur j que l'on décompose $\mathbb{R}^n$ en :

$$\mathbb{R}^n = \left(\bigcup_{\nu \in A_0} Q_{0,\nu} \right) \cup \dots \cup \left(\bigcup_{\nu \in A_j} Q_{j,\nu} \right) \cup \left(\bigcup_{\nu \in A'_j} Q_{j,\nu} \right) \ , \tag{5.1.6}$$

les cubes $Q_{k,\nu}$ ($\nu \in A_k$, $k = 0, \dots, j$ et $\nu \in A'_j$) étant deux à deux disjoints, de côté $2^{-k}\delta_0$, et tels que :

i) pour tout $k = 0, \dots, j$ et $\nu \in A_k$:

$$\alpha < \frac{1}{\operatorname{mes} Q_{k,\nu}} \int_{Q_{k,\nu}} |f(x)| dx \le 2^n \alpha \ ; \tag{5.1.7}$$

ii) pour tout $\nu \in A'_j$,

$$\frac{1}{\operatorname{mes} Q_{j,\nu}} \int_{Q_{j,\nu}} |f(x)| dx \le \alpha \ . \tag{5.1.8}$$

On a vérifié que cette propriété est vraie pour $j = 1$. Si elle est vérifiée au rang j, on découpe les cubes $Q_{j,\nu}$ de $\nu \in A'_j$ en 2^n cubes de côté $\delta_j/2 = 2^{-(j+1)}\delta_0$: appelons-les $Q_{j+1,\nu}$ $(\nu \in B_{j+1})$. Comme on a montré (5.1.4), on voit que :

$$\forall \nu \in B_{j+1}, \ \frac{1}{\operatorname{mes} Q_{j+1,\nu}} \int_{Q_{j+1,\nu}} |f(x)|dx \leq 2^n \alpha \ .$$

On appelle A_{j+1} l'ensemble des indices $\nu \in B_{j+1}$ tels que

$$\frac{1}{\operatorname{mes} Q_{j+1,\nu}} \int_{Q_{j+1,\nu}} |f(x)|dx \geq \alpha \ ,$$

et $A'_{j+1} = B_{j+1} \setminus A_{j+1}$. Les propriétés (5.1.7) et (5.1.8) sont alors satisfaites à l'ordre $j+1$. La décomposition (5.1.6) est donc vraie pour tout j.

Finalement, on note :

$$\Omega = \bigcup_j \bigcup_{\nu \in A_j} Q_{j,\nu} \ , \tag{5.1.9}$$

et

$$F = \bigcap_j \bigcup_{\nu \in A'_j} Q_{j,\nu} \ , \tag{5.1.10}$$

si bien que $\mathbb{R}^n = \Omega \cup F$, et que la propriété iii) du théorème résulte de (5.1.9) et (5.1.7).

La réunion (5.1.9) étant disjointe, on a :

$$\operatorname{mes} \Omega = \sum_j \sum_{\nu \in A_j} \operatorname{mes} Q_{j,\nu} \ ,$$

et à cause de (5.1.7), on a $\operatorname{mes} Q_{j,\nu} \leq \alpha^{-1} \int_{Q_{j,\nu}} |f(x)|dx$ pour $\nu \in A_j$. Par suite on a bien :

$$\operatorname{mes} \Omega \leq \frac{1}{\alpha} \int |f(x)|dx = \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \ .$$

Il nous reste à établir le point i) du théorème, qui va résulter du théorème de différentiation de Lebesgue : en effet, on sait que pour $f \in L^1$, il existe un ensemble N de mesure nulle tel que pour tout $x \notin N$, tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, de sorte que si Q est un cube contenant x de côté inférieur à η, on a :

$$\left| \frac{1}{\operatorname{mes} Q} \int_Q |f(y)|dy - |f(x)| \right| \leq \varepsilon \ . \tag{5.1.11}$$

Par hypothèse, pour tout $x \in F$, et pour tout j, il existe un cube $Q_{j,\nu}$ $(\nu \in A'_j)$ de côté $2^{-j}\delta_0$ qui contient x.

Pour $x \in N$, $x \in F$, on déduit alors de (5.1.8) et (5.1.11) que

$$|f(x)| \leq \alpha \ ,$$

et le théorème est démontré. □

5.2. Les intégrales singulières de L^1 dans L^1 faible

Soit T une distribution de type 0 régulière d'ordre 1. Sa restriction f à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est de classe C^1 et il existe C_0 tel que

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq \frac{C_0}{|x|^{n+|\alpha|}} \quad \text{pour } |\alpha| \leq 1,\ x \neq 0\,. \tag{5.2.1}$$

On a vu au chapitre précédent que l'opérateur de convolution $T * \varphi$ de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ se prolonge en un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On notera A cet opérateur.

Nous démontrons dans ce paragraphe le théorème suivant :

Théorème 5.2.1. — *Il existe une constante C telle que pour toute fonction $\phi \in L^2 \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ et tout $\lambda > 0$, on a :*

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, |A\phi(x)| > \lambda\} \leq \frac{C\,\|\phi\|_{L^1}}{\lambda}\,.$$

Démonstration. — Fixons $\lambda > 0$ et $\phi \in L^2 \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. D'après le paragraphe précédent, il existe une partition de $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$ telle que :

$$|\phi(x)| \leq \lambda \quad \text{p.p. } x \in F\,, \tag{5.2.2}$$

$$\operatorname{mes}\Omega \leq \frac{1}{\lambda}\,\|\phi\|_{L^1}\,, \tag{5.2.3}$$

$$\begin{gathered}\Omega \text{ est une réunion de cubes } Q_j,\ 2 \text{ à } 2 \text{ disjoints, et pour tout } j,\\ \lambda \leq \frac{1}{\operatorname{mes} Q_j}\int_{Q_j}|\phi(x)|dx \leq 2^n\lambda\,.\end{gathered} \tag{5.2.4}$$

On notera y_j le centre de Q_j et δ_j son côté ; $\widetilde{Q}_j$ désignera le cube de centre y_j et de côté $2\delta_j$, et $\widetilde{\Omega} = \cup\widetilde{Q}_j$.

On remarque que :

$$\operatorname{mes}\widetilde{\Omega} \leq \sum \operatorname{mes}\widetilde{Q}_j = 2^n \sum \operatorname{mes} Q_j = 2^n \operatorname{mes}\Omega\,,$$

et donc que :

$$\operatorname{mes}\widetilde{\Omega} \leq \frac{2^n}{\lambda}\,\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{5.2.5}$$

On définit la fonction g de la manière suivante :

$$g(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{pour } x \in F,\\ m_j(\phi) := \dfrac{1}{\operatorname{mes} Q_j}\displaystyle\int_{Q_j}\phi(x)dx & \text{pour } x \in Q_j. \end{cases}$$

En vertu de (5.2.2), on a :

$$\int_F |g(x)|^2 dx \leq \lambda \int_F |\phi(x)|dx \leq \lambda\,\|\phi\|_{L^1}\,,$$

et en vertu de (5.2.4), on a :

$$\int_{Q_j}|g(x)|^2 dx = |m_j(\phi)|^2 \operatorname{mes} Q_j \leq 2^{2n}\lambda^2 \operatorname{mes} Q_j\,,$$

donc avec (5.2.3),

$$\int_\Omega |g(x)|^2 dx \le 4^n \lambda \|\phi\|_{L^1} ,$$

d'où finalement,

$$\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le (1+4^n)\,\lambda\,\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \tag{5.2.6}$$

On pose $b = \phi - g = \sum b_j$, où $b_j(x)$ vaut 0 pour $x \notin Q_j$ et $\phi(x) - m_j(\phi)$ pour $x \in Q_j$. On a :

$$\begin{cases} \|b_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|\phi\|_{L^2(Q_j)} , \\ \|b_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le 2\,\|\phi\|_{L^1(Q_j)} , \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \|b\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} , \\ \|b\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le 2\,\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \end{cases} \tag{5.2.7}$$

Puisque ϕ, g et b sont dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on a $A\phi = Ag + Ab$, avec :

$$\|Ag\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C_1\,\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} . \tag{5.2.8}$$

C_1 désignant la norme d'opérateur de A de L^2 dans L^2.

En vertu du lemme 1.1.1, on a :

$$\text{mes}\left\{x \;/\; |Ag(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \le \left(\frac{2\,\|Ag\|_{L^2}}{\lambda}\right)^2 ,$$

et avec (5.2.8) et (5.2.6), on voit que :

$$\text{mes}\left\{x \;/\; |Ag(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \le \frac{4C_1^2\,(1+4^n)}{\lambda}\,\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

Comme on l'a déjà noté au chapitre 1, on a :

$$\text{mes}\,\{x \;/\; |A\phi(x)| > \lambda\} \le \text{mes}\left\{x \;/\; |Ag(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} + \text{mes}\left\{x \;/\; |Ab(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} ,$$

et pour démontrer le théorème il nous suffit maintenant de montrer qu'avec une constante C convenable, on a :

$$\text{mes}\left\{x \;/\; |Ab(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \le \frac{C}{\lambda}\,\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

Puisque d'après (5.2.5), $\text{mes}\,\widetilde{\Omega} \le 2^n/\lambda\,\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, il suffit en fait de montrer que :

$$\text{mes}\left\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega} \;/\; |Ab(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \le \frac{C}{\lambda}\,\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} ,$$

ce qui, compte tenu du lemme 1.1.1, résultera de l'estimation :

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega}} |Ab(x)| dx \le C\,\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \tag{5.2.9}$$

On remarque alors que si Q est un cube de $\mathbb{R}^n$, si $\widetilde{Q}$ désigne le cube "double" de Q (de même centre et de côté double) et si h une fonction de $L^2 \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ nulle en dehors de Q, pour $x \notin \widetilde{Q}$, on a :

$$Ah(x) = \int_Q f(x-y)h(y)dy\,. \tag{5.2.10}$$

En effet, pour $\psi \in C_0^\infty(Q)$ on a $A\psi = T * \psi$ et par définition de $f = T|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$, la formule (5.2.10) a bien lieu si $h = \psi \in C_0^\infty(Q)$. Le membre de droite de (5.2.10) est continu pour la norme de L^1 ou L^2 de h, et par densité, (5.2.10) a bien lieu pour $h \in L^2$, nulle en dehors de Q.

On en déduit que :

$$Ab_j(x) = \int_{Q_j} f(x-y)b_j(y)dy = \int_{Q_j} \left(f(x-y) - f(x-y_j)\right) b_j(y)dy\,, \tag{5.2.11}$$

la dernière égalité r'esultant de ce que $\int_{Q_j} b_j = 0$. Pour $x \notin \widetilde{Q}_j$, on a pour tout point z du segment $[y_j, y] \subset Q_j$:

$$|x-z| \geq \frac{1}{2}|x-y_j|\,,$$

et avec (5.2.1) et le théorème des accroissements finis, on voit que pour $x \notin \widetilde{Q}_j$ et $y \in \widetilde{Q}_j$ on a :

$$|f(x-y) - f(x-y_j)| \leq \frac{C_2\delta_j}{|x-y_j|^{n+1}}\,.$$

Reportant dans (5.2.11) on obtient que pour $x \notin \widetilde{Q}_j$:

$$|Ab_j(x)| \leq \frac{C_2\delta_j}{|x-y_j|^{n+1}}\, \|b_j\|_{L^1}\,.$$

Par ailleurs

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{Q}_j} \frac{\delta_j}{|x-y_j|^{n+1}}dx \leq \int_{|x-y_j|>\delta_j} \frac{\delta_j}{|x-y_j|^{n+1}}dx \leq C_3\,,$$

et donc

$$\|Ab_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{\Omega})} \leq \|Ab_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{Q}_j)} \leq C_4\, \|b_j\|_{L^1}\,. \tag{5.2.12}$$

Maintenant on remarque que

$$\|b_j\|_{L^1} \leq \int_{Q_j} |\phi(x)|dx + m_j(\phi)\,\mathrm{mes}\, Q_j \leq 2\int_{Q_j} |\phi(x)|dx\,,$$

et d'après (5.2.4) on a :

$$\|b_j\|_{L^1} \leq 2^n\lambda\, \mathrm{mes}\, Q_j\,. \tag{5.2.13}$$

Par (5.2.7), la série $\sum b_j$ converge normalement vers b dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; donc la série $\sum Ab_j$ converge normalement dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ vers Ab. Rappelons le lemme suivant d'intégration :

Lemme 5.2.2. — *Si u_n est une suite qui converge vers u dans $L^2(U)$ et si $\|u_n\|_{L^1(U)} \leq M$ pour tout n, alors $\|u\|_{L^1(U)} \leq M$.*

On en déduit alors avec (5.2.12), (5.2.13) et (5.2.3) que l'on a :

$$\|Ab\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{\Omega})} \leq 2^n\lambda C_4\, \mathrm{mes}\, \Omega \leq 2^n C_4\, \|\phi\|_{L^1}\,,$$

c'est-à-dire l'estimation (5.2.9), et le théorème est démontré. □

5.3. Les intégrales singulières dans L^p

Soit T une distribution de type 0, vérifiant (5.2.1) comme au paragraphe précédent. L'opérateur A est borné de L^2 dans L^2, et si $\phi \in L^1 \cap L^2$, $A\phi$ vérifie

$$\text{mes}\,\{x \in \mathbb{R}^n \;/\; |A\phi(x)| > \lambda\} \leq \frac{C\,\|\phi\|_{L^1}}{\lambda}\,. \tag{5.3.1}$$

Autrement dit, A est de type faible $(1,1)$. D'après le théorème de Marcinkiewicz, A est donc de type fort (p,p) pour tout $p \in]1,2]$, et plus précisément pour $1 < p \leq 2$, il existe C_p tel que :

$$\forall \phi \in L^2 \cap L^p(\mathbb{R}^n),\ \|A\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p\,\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{5.3.2}$$

(Un lecteur attentif aura remarqué que nous n'avons pas défini $A\phi$ pour ϕ dans L^1, et nous n'avons donc pas vraiment établi que A est de type faible $(1,1)$ au sens de la définition du paragraphe 1. On laisse en exercice la vérification que le théorème du chapitre 1 admet la modification suivante : si A est borné de L^2 dans L^2 et vérifie (5.3.1) pour $\phi \in L^1 \cap L^2$, alors on a (5.3.2)).

Rappelons maintenant le lemme suivant :

Lemme 5.3.1. — *Soit $p \in [1,2]$. Alors la transformée de Fourier applique $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ ($1/p + 1/p' = 1$).*

Preuve. — La transformation de Fourier est bornée de L^1 dans L^∞, et de L^2 dans L^2. Le résultat suit pas interpolation. □

Revenons à notre distribution T de type 0 qui vérifie (5.2.1). Alors, pour $\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq 2$, $\widehat{\phi} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ d'après le lemme 5.3.1 ; puisque $\widehat{T} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (chapitre 4), $\widehat{T}\widehat{\phi}$ est bien défini comme une fonction de $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ et $A\phi = \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{T}\widehat{\phi}\right)$ a un sens en tant que distribution tempérée ; en outre, on a :

Théorème 5.3.2. — *Pour $1 < p \leq 2$, et $\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $A\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, et il existe une constante C telle que :*

$$\forall \phi \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \|A\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p\,\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Preuve. — Définissons, pour N entier :

$$\phi_N(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } |\phi(x)| \leq N\,, \\ 0 & \text{si } |\phi(x)| > N\,. \end{cases}$$

Alors $\phi_N \in L^p \cap L^\infty \subset L^p \cap L^2$, et ϕ_N converge vers ϕ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Appliquant (5.3.2) aux fonctions $\phi_N - \phi_{N'}$, on voit que la suite $A\phi_N$ est dans L^p, et est de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Elle converge donc dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, vers une limite $\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, et on a :

$$\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lim_{N\to\infty} \|A\phi_N\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p\,\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{5.3.3}$$

Puisque $\phi_N \to \phi$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\phi}_N \to \widehat{\phi}$ dans $L^{p'}$, et $\widehat{T}\widehat{\phi}_N \to \widehat{T}\widehat{\phi}$ dans $L^{p'}$. C'est–à–dire que $\widehat{A\phi_N} \to \widehat{A\phi}$; mais $\widehat{A\phi_N} \to \widehat{\psi}$ dans $L^{p'}$, puisque $A\phi_N \to \psi$ dans L^p. On en déduit que $\widehat{\psi} = \widehat{A\phi}$, et donc que $A\phi = \psi$, ce qui avec (5.3.3) démontre le théorème. □

Il nous reste à étudier le cas $p \geq 2$, et pour cela on introduit la distribution $S(x) = T(-x)$, définie plus correctement par la formule

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \langle S, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle\,, \tag{5.3.4}$$

où $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Clairement la restriction de S à $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ est $f(-x)$ (si $f = T|_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}$) et S est une distribution de type 0, régulière d'ordre 1.

Par ailleurs, pour φ et ψ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\langle S * \varphi, \psi\rangle = \langle T * \psi, \varphi\rangle\,. \tag{5.3.5}$$

(Les crochets sont ceux de la dualité $\mathcal{D}' \times C_0^\infty$; en fait on sait que $S * \varphi$ et $T * \psi$ sont dans L^2, et ces crochets ne désignent rien d'autre que des intégrales).

En effet, par définition de la convolution des distributions, on a :

$$\langle S * \varphi, \psi\rangle = \langle S, \check{\varphi} * \psi\rangle \quad ; \quad \langle T * \psi, \varphi\rangle = \langle T, \check{\psi} * \varphi\rangle\,.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}(\check{\varphi} * \psi)(-x) &= \int \check{\varphi}(-x-y)\psi(y)dy = \int \varphi(x+y)\psi(y)dy \\ &= \int \varphi(y)\psi(y-x)dy = \varphi * \check{\psi}(x) = \check{\psi} * \varphi(x)\,.\end{aligned}$$

Avec (5.3.4), on obtient alors (5.3.5).

On peut appliquer le théorème 5.3.2 à la distribution S et à l'exposant conjugué p' de p, si $2 \leq p < \infty$. On obtient alors que, pour φ et ψ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\left|\int (S * \varphi)(x)\psi(x)dx\right| \leq \|S * \varphi\|_{L^{p'}} \|\psi\|_{L^p} \leq C\,\|\varphi\|_{L^{p'}} \|\psi\|_{L^p}\ .$$

Avec (5.3.5) on en déduit que :

$$\left|\int (T * \psi)(x)\varphi(x)dx\right| \leq C\,\|\varphi\|_{L^{p'}} \|\psi\|_{L^p}\ .$$

Par densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ et utilisant le fait que L^p est le dual de $L^{p'}$, on en déduit que pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, A
$psi = T * \psi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et :

$$\|A\psi\|_{L^p} \leq C\,\|\psi\|_{L^p}\ . \tag{5.3.6}$$

Par densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2 \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, cette inégalité se prolonge à tous les $\psi \in L^2 \cap L^p$. En fait par densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, on a :

Théorème 5.3.3. — *Pour* $2 < p < \infty$, *il existe un opérateur* $\widetilde{A}_p$ borné *de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *dans lui-même, tel que pour* $\phi \in L^2 \cap L^p$ *on ait* $\widetilde{A}_p\phi = A\phi$ *(*$\widetilde{A}_p$ *est une extension à* L^p *de* A *opérant sur* $L^2 \cap L^p$*).*

Remarque. — Pour $2 < p < \infty$ on ne sait ps très bien où se trouve $\widehat{\phi}$ lorsque $\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, et on ne peut pas définir *a priori* $\widetilde{A}\phi = \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{T}\widehat{\phi}\right)$, car on sait seulement que $\widehat{T} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, et le produit $\widehat{T}\widehat{\phi}$ n'est pas défini sous ces seules hypothèse.

Cependant, et ce sera le cas dans de nombreuses applications, si l'on sait que $\widehat{T} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ainsi que ses dérivées, alors le produit $\widehat{T}\widehat{\phi}$ est bien défini au sens des distributions et on a alors $\widetilde{A}\phi = \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{T}\widehat{\phi}\right)$.

Les théorèmes 5.3.2 et 5.3.3 impliquent le théorème 5.0.7, nous avons donc atteint le but fixé au début de ce chapitre.

Insistons pour terminer sur le fait que le résultat est <u>faux</u> pour les indices limites $p = 1$ et $p = \infty$.

CHAPITRE 6

INTÉGRALES SINGULIÈRES DANS LES ESPACES DE HÖLDER

Nous continuons à étudier l'action des intégrales singulières dans les différents espaces fonctionnels usuels, ici les espaces C^μ.

6.1. Énoncé du résultat

Dans ce chapitre, nous adopterons les notations suivantes : pour $\mu \in]0,1[$, on notera $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions ϕ continues, bornées sur $\mathbb{R}^n$ telles que :

$$[\phi]_\mu = \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^\mu} < +\infty\,.$$

L'espace $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ est muni de la norme :

$$\|\phi\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} = \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + [\phi]_\mu\,,$$

et muni de cette norme, $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach ; c'est même une algèbre de Banach.

On notera $C^\mu_0(\mathbb{R}^n)$ ou $C^\mu_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace de $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ des fonctions à support compact. Enfin, $C^\mu_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ désignera l'espace des fonctions ϕ localement höldériennes, c'est-à-dire des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$, telles que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$\sup_{\substack{(x,y)\in K\times K \\ x\neq y}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^\mu} < +\infty\,.$$

On vérifie (exercice) que $\phi \in C^\mu_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si, pour toute fonction $\chi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, $\chi\phi \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$.

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $\mu \in]0,1[$, $C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C^{m+\mu}_0(\mathbb{R}^n)$, $C^{m+\mu}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$) est l'espace des fonctions de classe C^m sur $\mathbb{R}^n$, dont les dérivées d'ordre $\leq m$ sont dans $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C^\mu_0(\mathbb{R}^n)$, $C^\mu_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$). $C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ est muni habituellement de la norme :

$$\|\phi\|_{C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m} [\partial^\alpha\phi]_\mu\,.$$

En cohérence avec ces notations, pour m entier $C^m_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions de classe C^m sur $\mathbb{R}^n$, $C^m(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctionsde classe C^m, bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$.

Considérons à nouveau une distribution T, de type 0 et régulière d'ordre 1, c'est-à-dire que $f = T|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ est de classe C^1 et vérifie :

$$\forall\alpha,\ |\alpha| \leq 1,\ x \neq 0,\ |\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{M}{|x|^{n+|\alpha|}}\,. \tag{6.1.1}$$

Fixons θ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, à support dans la boule $\{|x| \leq 2\}$, valant 1 sur la boule unité, et prenant ses valeurs dans $[0,1]$. On a vu au chapitre 4 (proposition 4.2.2) qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que :

$$T = \mathrm{pf}_\theta\, f + a\delta\,. \tag{6.1.2}$$

Pour $0 < \mu < 1$ et $\phi \in C^\mu_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$, l'intégrale

$$\int f(y)\,(\phi(x-y) - \phi(x)\theta(y))\,dy$$

converge absolument, puisque qu'elle porte sur un ensemble borné en y, et qu'au voisinage de $y = 0$ on a :

$$|f(y)\,(\phi(x-y) - \phi(x)\theta(y))| \leq \frac{M}{|y|^{n-\mu}}[\phi]_\mu\,.$$

Par conséquent la convolution

$$(T * \phi)(x) = \int f(y)\,(\phi(x-y) - \phi(x)\theta(y))\,dy + a\phi(x) \tag{6.1.3}$$

est bien définie, et correspond bien à la convolution $T * \phi$ au sens des distributions si $\phi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$.

Comme $C^\mu_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut comparer l'opérateur $T*$ à l'opérateur A de L^2 dans L^2 défini au chapitre 4. On vérifie (exercice) que pour $\phi \in C^\mu_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$, on a $T * \phi = A\phi$,

Théorème 6.1.1. — *Pour $0 < \mu < 1$, l'opérateur $\phi \mapsto T * \phi$ opère de $C^\mu_{comp}(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\mu(\mathbb{R}^n)$. Si la fonction f vérifie en plus de* (6.1.1) *la condition :*

$$\int_{|y|\geq 1} |f(y)|dy < +\infty\,, \tag{6.1.4}$$

alors l'opérateur $\phi \mapsto T * \phi$ opère de $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\mu(\mathbb{R}^n)$.

Remarque. — Le résultat est **faux** pour $\mu = 0$ et $\mu = 1$.

6.2. Preuve du Théorème 6.1.1

Au vu de (6.1.3), on peut oublier le terme $a\phi(x)$ et supposer que $T = \mathrm{pf}_\theta$. On a :

$$(T * \phi)(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)\,, \quad \text{avec}\ :$$

$$\psi_1(x) = \int_{|y|\leq 1} f(y)\,(\phi(x-y) - \phi(x))\,dy\,,$$

$$\psi_2(x) = \int_{|y|\geq 1} f(y)\,(\phi(x-y) - \phi(x)\theta(y))\,dy\,.$$

On a :

$$|\psi_1(x)| \leq \int_{|y|\leq 1} [\phi]_\mu M|y|^{-n+\mu}dy \leq M_1[\phi]_\mu\,, \tag{6.2.1}$$

et

$$|\psi_2(x)| \leq \int_{1\leq|y|\leq 2} \frac{2M}{|y|^n} \|\phi\|_{L^\infty} \, dy + \int_{|y|\geq 2} \frac{M}{|y|^n} |\phi(x-y)| dy \,,$$

d'où

$$|\psi_2(x)| \leq M_2 \|\phi\|_{L^\infty} + M_3 \|\phi\|_{L^1} \,. \tag{6.2.2}$$

Noter que $\|\phi\|_{L^1} < +\infty$, puisque ϕ est à support compact.

Ajoutant (6.2.1) et (6.2.2), on voit que $T * \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Lorsque f vérifie (6.1.4), alors on a :

$$|\psi_2(x)| \leq 2 \|\phi\|_{L^\infty} \int_{|y|\geq 1} |f(y)| dy = M_4 \|\phi\|_{L^\infty} \,,$$

ce qui montre que $T * \phi$ est bien défini pour $\phi \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$, sans restriction sur le support, et que $T * \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Pour évaluer $[T * \phi]_\mu$, on se donne deux points x et x' distincts, et on pose $\delta = |x - x'| > 0$. Nous allons montrer que :

$$\left| T * \phi(x) - T * \phi(x') \right| \leq M_5 \|\phi\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} \delta^\mu \,, \tag{6.2.3}$$

ce qui finira de démontrer le théorème. On a :

$$T * \phi(x) - T * \phi(x') = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \,,$$

avec :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{|x-y|\leq 2\delta} f(x-y) \left(\phi(y) - \phi(x)\theta(x-y)\right) dy \,, \\
I_2 &= -\int_{|x-y|\leq 2\delta} f(x'-y) \big(\phi(y) - \phi(x')\theta(x'-y)\big) dy \,, \\
I_3 &= \int_{|x-y|>2\delta} \big(f(x-y) - f(x'-y)\big) \big(\phi(y) - \phi(x')\theta(x'-y)\big) dy \,, \\
I_4 &= \int_{|x-y|>2\delta} f(x-y) \big(\phi(x')\theta(x'-y) - \phi(x)\theta(x-y)\big) dy \,.
\end{aligned}$$

Pour $|x - y| \leq 1$, on a :

$$|\phi(y) - \phi(x)\theta(x-y)| \leq |x-y|^\mu [\phi]_\mu \,,$$

et pour $|x - y| \geq 1$,

$$|\phi(y) - \phi(x)\theta(x-y)| \leq 2 \|\phi\|_{L^\infty} \leq 2|x-y|^\mu \|\phi\|_{C^\mu} \,,$$

donc dans tous les cas :

$$|\phi(y) - \phi(x)\theta(x-y)| \leq 2|x-y|^\mu \|\phi\|_{C^\mu} \,. \tag{6.2.4}$$

On a alors :

$$|I_1| \leq \int_{|x-y|\leq 2\delta} 2M|x-y|^{-n+\mu} \|\phi\|_{C^\mu} \, dy \leq M_5' \|\phi\|_{C^\mu} \delta^\mu \,.$$

Puisque $\delta = |x - x'|$, pour $|x - y| \leq 2\delta$ on a $|x' - y| \leq 3\delta$ et on obtient de même

$$|I_2| \leq \int_{|x'-y|\leq 3\delta} 2M|x'-y|^{-n+\mu} \|\phi\|_{C^\mu} \, dy \leq M_5'' \|\phi\|_{C^\mu} \delta^\mu \,.$$

Par ailleurs, pour $|x-y| > 2\delta$ et $\delta = |x-x'|$, tous les points du segment $[x, x']$ sont à une distance $\geq |x-y|/2$ de y et on a l'estimation suivante (déjà utilisée plusieurs fois dans les chapitres précédents) :

$$\left|f(x-y) - f(x'-y)\right| \leq \frac{M_6|x-x'|}{|x-y|^{n+1}} .$$

Avec (6.2.4) et la majoration $|x'-y| \leq 2|x-y|$, on en déduit :

$$|I_3| \leq \int_{|x-y|>2\delta} 4M_6\delta \, \|\phi\|_{C^\mu} |x-y|^{-n-1+\mu} dy = M_5''' \, \|\phi\|_{C^\mu} \, \delta^\mu .$$

Pour estimer I_4 on remarque d'abord que si $\delta > 2$, pour $|x-y| > 2\delta$ on a aussi $|x'-y| > \delta$ et donc $\theta(x'-y) = \theta(x-y) = 0$, ce qui implique que $I_4 = 0$. Ensuite on écrit que :

$$\left|\phi(x')\theta(x'-y) - \phi(x)\theta(x-y)\right| \leq \delta^\mu[\phi]_\mu + \delta \, \|\phi\|_{L^\infty} \, \|\nabla\theta\|_{L^\infty} ,$$

et donc, pour $\delta \leq 2$,

$$\left|\phi(x')\theta(x'-y) - \phi(x)\theta(x-y)\right| \leq M_7\delta^\mu[\phi]_\mu .$$

Si $\delta \geq 1/3$,

$$|I_4| \lesssim \int_{1/3 \leq |x-y| \leq 2+\delta} \delta^\mu \, \|\phi\|_{C^\mu} \frac{dy}{|y|^n} \lesssim \delta^\mu \, \|\phi\|_{C^\mu} . \tag{6.2.5}$$

Si $\delta < 1/3$ (le seul cas vraiment important !), on écrit $I_4 = I_4' + I_4''$, avec

$$\begin{aligned} I_4' &= \int_{2\delta<|x-y|<1-\delta} f(x-y)\left(\phi(x') - \phi(x)\right) dy , \\ I_4'' &= \int_{1-\delta<|x-y|<2+\delta} f(x-y)\left(\phi(x')\theta(x'-y) - \phi(x)\theta(x-y)\right) dy . \end{aligned}$$

I_4'' se majore exactement comme (6.2.5), et I_4' lui se majore par :

$$|I_4'| \leq \delta^\mu[\phi]_\mu \sup_{0<t<t'<1} \left| \int_{t<|y|<t'} f(y) dy \right| .$$

En vertu de la propriété des moyennes bornées (Proposition 4.2.2, (4.2.3)), ce sup est fini.

En conclusion nous avons montré que les intégrales I_1 à I_4 vérifient une majoration (6.2.3) et le théorème 6.1.1 est démontré.

CHAPITRE 7

QUELQUES APPLICATIONS

7.1. Le théorème de Sobolev

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$, on définit $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ comme l'espace des fonctions $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dont les dérivées d'ordre $\leq k$ prises au sens des distributions sont aussi dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme :

$$\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/p} \tag{7.1.1}$$

avec la modification habituelle pour $p = \infty$. Pour $p = 2$, on note habituellement $H^k(\mathbb{R}^n)$ à la place de $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$, et les espaces $H^k(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces de Hilbert.

On rappelle que pour $p < \infty$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Si T est une distribution de type 0, régulière d'ordre 1, pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$\partial_x^\alpha (T * \phi) = T * (\partial_x^\alpha \phi)\,, \tag{7.1.2}$$

et les résultats des chapitres 4 et 5 admettent la généralisation suivante :

Théorème 7.1.1. — *Pour $1 < p < +\infty$ et $k \in \mathbb{N}$, l'opérateur de convolution $\phi \mapsto T * \phi$ se prolonge en opérateur borné de $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.*

Preuve. — D'après le chapitre 5 on a :

$$\|T * \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \, \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ ,$$

pour $1 < p < +\infty$ et $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Il résulte de (7.1.2) et de la définition (7.1.1) que :

$$\|T * \phi\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \, \|\phi\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)}\ ,$$

et le théorème en découle. □

Nous nous proposons de démontrer le

Théorème 7.1.2. — *Soient p et k tels que $1 < p < n/k$, $k \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)\,, \quad \textit{pour } q = \frac{np}{n-pk}\,\cdot$$

Remarque. — Ce résultat est encore vrai quand $p = 1$, mais la démonstration ci-dessous ne convient pas dans ce cas-là. (Pour une démonstration, voir E. M. Stein, *Singular Integrals*, p. 128–129).

Nous commençons par établir une formule de représentation d'une fonction à l'aide de ses dérivées, et d'abord on note le lemme suivant :

Lemme 7.1.3. — *La fonction $f_j(x) = \frac{x_j}{|x|^n}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et définit une distribution dont la transformée de Fourier est la fonction localement intégrable :*

$$\widehat{f}_j(\xi) = \omega_j \frac{\xi_j}{|\xi|^2}\,, \quad \textit{avec } \omega_j = \frac{2}{i}\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\,.$$

Preuve. — On sait que la transformée de Fourier de la gaussienne $(\sigma/2\pi)^{n/2}e^{-\sigma|x|^2/2}$ est $e^{-|\xi|^2/2\sigma}$ et que la transformée de Fourier de sa dérivée par rapport à x_j est $i\xi_j e^{-|\xi|^2/2\sigma}$. On a donc pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{n/2}\int(-\sigma x_j)e^{-\sigma|x|^2/2}\widehat{\phi}(x)dx = \int i\xi_j e^{-|\xi|^2/2\sigma}\phi(\xi)d\xi\,. \tag{7.1.3}$$

On multiplie cette relation par σ^{-2} et on intègre en σ sur $[0,\infty]$, en remarquant que :

$$\int_0^\infty \sigma^{n/2}e^{-\sigma|x|^2/2}\frac{d\sigma}{\sigma} = \left(\frac{2}{|x|^2}\right)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\,,$$

et que

$$\int_0^\infty \sigma^{-1}e^{-|\xi|^2/2\sigma}\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{2}{|\xi|^2}\,,$$

où $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ est la fonction Γ standard. Avec le théorème de Fubini, on déduit donc de (7.1.3) que l'on a :

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2}\int\frac{x_j}{|x|^n}\widehat{\phi}(x)dx = \frac{2}{i}\int\frac{\xi_j}{|\xi|^2}\phi(\xi)d\xi\,,$$

ce qui exprime que la transformée de Fourier de

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2}\frac{x_j}{|x|^n} \quad \text{est} \quad \frac{2}{i}\frac{\xi_j}{|\xi|^2}\,.$$

□

Lemme 7.1.4. — *Posant*

$$T_j = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}\frac{x_j}{|x|^n}\,, \quad \textit{pour } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \textit{on a} : \phi = \sum_{j=1}^n T_j * \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)\,.$$

Preuve. — La transformée de Fourier de $\partial_{x_j}\phi$ est $i\xi_j\widehat{\phi}(\xi)$, celle de T_j est $\frac{1}{i}\frac{\xi_j}{|\xi|^2}$, donc celle de $T_j * \partial_{x_j}\phi$ est $\frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\widehat{\phi}(\xi)$. Par conséquent,

$$\mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^n T_j * \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\phi}(\xi)\,,$$

et le lemme est démontré. □

Lemme 7.1.5. — *Pour $1 < p < n$ et pour k entier ≥ 1, on a :*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{k-1,q}(\mathbb{R}^n)\,, \quad \textit{pour } q = \frac{np}{n-p}\,.$$

Preuve. — Les fonctions T_j sont homogènes de degré $-n+1$, et les opérateurs de convolution par T_j des intégrales faiblement singulières. En vertu du chapitre 2, pour $1 < p < n$ et $1/q = 1p - 1/n$, on a :

$$\|T_j * \phi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Appliquant cette inégalité à $\partial_{x_j}\partial_x^\alpha \phi$ avec $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, compte tenu du lemme 7.1.4, on obtient :

$$\|\partial_x^\alpha \phi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \partial_x^\alpha \phi \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} ,$$

et encore :

$$\|\phi\|_{W^{k-1,q}(\mathbb{R}^n)} \leq C' \|\phi\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} . \tag{7.1.4}$$

Par densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, cette inéglité se prolonge à $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ tout entier, et le lemme est démontré. □

Démonstration du théorème 7.1.2. — Il suffit d'appliquer k fois le lemme 7.1.5. □

7.2. Inégalités de Schauder

Nous nous intéressons maintenant à un opérateur différentiel à coefficients constants, c'est-à-dire un polynôme :

$$P(D_x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha . \tag{7.2.1}$$

On convient ici, comme dans toute la suite du cours, que pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, avec $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$. La raison de l'introduction de ce facteur $1/i$ est que pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier de $D_j u$ est exactement $\widehat{D_j u}(\xi) = \xi_j \widehat{u}(\xi)$, et par conséquent on a :

$$\widehat{P(D_x)u}(\xi) = p(\xi)\widehat{u}(\xi) , \tag{7.2.2}$$

où $p(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ est appelé le **symbole complet** de l'opérateur P.

La partie principale de l'opérateur P donné par (7.2.1), d'ordre m, est l'opérateur

$$P_m(D_x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha ,$$

et le symbole de P_m, $p_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$ est appelé le **symbole principal** de l'opérateur P. L'opérateur P sera dit homogène de degré m si $P = P_m$.

Définition 7.2.1. — *Un opérateur différentiel P d'ordre m est dit* elliptique *si son symbole principal $p_m(\xi)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Notons tout de suite que si P est elliptique, alors :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |p_m(\xi)| \geq c|\xi|^m , \quad \text{avec } c = \inf_{|\xi|=1} |p_m(\xi)| > 0 . \tag{7.2.3}$$

Théorème 7.2.2. — *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants, homogène de degré m, et elliptique. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice de longueur $|\alpha| = m$. Alors* *i) pour tout r, $1 < r < +\infty$, il existe C_r tel que pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|D^\alpha \phi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C_r \|P\phi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \ ;$$

ii) pour $\mu \in]0,1[$ et $R > 0$, il existe $C_{\mu,R} > 0$ tel que pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule $\{|x| \leq R\}$, on a :

$$\|D^\alpha \phi\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} \leq C_{\mu,R} \|P\phi\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} \ .$$

Preuve. — Considérons la fonction $g(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{p_m(\xi)}$ qui est homogène de degré 0, et C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ puisque p_m ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Les dérivées de g sont donc homogènes et vérifient :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,, \ \left|\partial_\xi^\beta g(\xi)\right| \leq C_\beta |\xi|^{-|\beta|}\,.$$

La distribution $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est donc la transformée de Fourier d'une distribution de type 0, T, infiniment régulière sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (et homogène de degré $-n$). En outre, pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\widehat{T * P\phi}(\xi) = \widehat{T}\widehat{P\phi}(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{p_m(\xi)} p_m(\xi)\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{D^\alpha\phi}(\xi)\,,$$

c'est-à-dire :

$$D^\alpha \phi = T * P\phi\,.$$

Le théorème 7.2.2 résulte alors aussitôt des résultats des chapitres 5 et 6. □

Théorème 7.2.3. — *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants, d'ordre m, et elliptique. Pour $1 < p < +\infty$ et $\mu \in]0,1[$, il existe des constantes C_p et C_μ telles que pour $\phi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$, on ait :*

$$\|\phi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \left(\|P\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)\,,$$

$$\|\psi\|_{C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)} \leq C_\mu \left(\|P\phi\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} + \|\phi\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)}\right)\,.$$

Preuve. — On remarque d'abord que le symbole **complet** de P vérifie avec une constante $c' > 0$ convenable :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n\,, \ |p(\xi)| + 1 \geq c'\left(|\xi|^m + 1\right)\,. \tag{7.2.4}$$

En effet, pour $|\xi|$ assez grand, disons $|\xi| \geq R$, on a :

$$\left|\sum_{|\alpha| \leq m-1} a_\alpha \xi^\alpha\right| \leq C|\xi|^{m-1} \leq \frac{c}{2}|\xi|^m\,,$$

et avec (7.2.3), on voit que (7.2.4) est vérifiée pour $|\xi| \geq R$ dès que $c' \leq c/2$. Pour $|\xi| \leq R$, (7.2.4) est vraie dès que $c' \leq 1/(R^m + 1)$.

Il en résulte que pour $|\alpha| \leq 2m$, les fonctions $g_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{|p(\xi)|^2 + 1}$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ tout entier et vérifient des estimations du type :

$$\left|\partial_\xi^\beta g_\alpha(\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\left(|\xi| + 1\right)^{-|\beta|}\,. \tag{7.2.5}$$

Les fonctions g_α sont donc les transformées de Fourier de distributions de type 0, T_α, indéfiniment régulières sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En outre, on a :

$$\widehat{x^\beta T_\alpha}(\xi) = i^\beta \partial_\xi^\beta g_\alpha(\xi)\,.$$

Pour $|\beta| = n+1$, $\partial_\xi^\beta g_\alpha \in L^1$ d'après (7.2.5), et $x^\beta T_\alpha \in L^\infty$. On obtient donc que les distributions T_α vérifient aussi : $|x|^{n+1}T \in L^\infty$, ce qui implique que

$$\int_{|x|\geq 1} |T_\alpha(x)|dx < +\infty \,. \tag{7.2.6}$$

(En fait les distributions T_α sont à décroissance rapide, et même exponentielle à l'infini).

Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, en posant $v = Pu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\overline{p(\xi)}}{|p(\xi)|^2+1}\widehat{v}(\xi) + \frac{1}{|p(\xi)|^2+1}\widehat{u}(\xi)\,,$$

et $\widehat{D^\alpha u}(\xi) = \widehat{S_\alpha}\widehat{v}(\xi) + \widehat{T_\alpha}\widehat{u}(\xi)$, avec $S_\alpha = \sum_{|\beta|\leq m} \overline{a_\beta}\, T_{\alpha+\beta}$.

Pour $|\alpha| \leq m$, les opérateurs $\phi \mapsto T_\alpha * \phi$ et $\phi \mapsto S_\alpha * \phi$ sont bornés de L^p dans L^p pour $1 < p < +\infty$, et aussi de C^μ dans C^μ pour $\mu \in]0,1[$, et le théorème 7.2.3 en résulte. □

Dans le même ordre d'idée on peut énoncer :

Théorème 7.2.4. — *Soit P un opérateur elliptique dont le* **symbole complet** *ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n$. Alors une distribution tempérée u est dans l'espace $W^{k+m,p}(\mathbb{R}^n)$ ($k \in \mathbb{N}$, $1 < p < +\infty$) (resp. $C^{k+m+\mu}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \mu < 1$, $m \in \mathbb{N}$) si et seulement si Pu est dans l'espace $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C^{k+\mu}(\mathbb{R}^n)$).*

Preuve. — On remarque d'abord que l'on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n\,,\ |p(\xi)| \geq c''\,(|\xi|^m + 1)\ ,$$

avec $c'' > 0$. Par conséquent, les fonctions $g_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{p(\xi)}$ pour $|\alpha| leq m$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et vérifient :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n\,,\ \left|\partial_\xi^\beta g_\alpha(\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|\beta|)^{-|\beta|}\ .$$

In en résulte que g_α est la transformée de Fourier d'une distribution de type 0, T_α, et que les opérateurs $\phi \mapsto T_\alpha * \phi$ sont bornés de $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, et de $C^{k+\mu}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même . (Les T_α vérifient aussi (7.2.6)). Autrement dit, l'opérateur $\phi \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{\phi}}{p(\xi)}\right) = A\phi$, qui est bien défini de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$, envoie $W^{k,p}$ dans $W^{k+m,p}$, et $C^{k+\mu}$ dans $C^{k+m+\mu}$.

Maintenant, si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on a $\widehat{Pu}(\xi) = p(\xi)\widehat{u}(\xi)$, et puisque $p(\xi) \neq 0$, $\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}\widehat{Pu}(\xi)$, c'est-à-dire $u = APu$. Si $Pu \in W^{k,p}$ (resp. $C^{k+\mu}$), $APu = u \in W^{k+m,p}$ (resp. $C^{k+m+\mu}$), et le théorème est démontré. □

Exemple. — L'exemple de base pour le théorème 7.2.2 est l'opérateur $-\Delta = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, de symbole $|\xi|^2$, et pour le théorème 7.2.4, l'opérateur $-\Delta + 1$, de symbole $|\xi|^2 + 1$.

7.3. Noyau de Poisson

Lemme 7.3.1. — *Pour $t > 0$, la transformée de Fourier inverse de la fonction intégrable $\xi \mapsto e^{-t|\xi|}$ est la fonction*

$$P_t(x) = P(t,x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}\,\frac{t}{(t^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}\,.$$

Preuve. — On sait que pour $\rho \geq 0$, on a :

$$e^{-\rho} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho\tau} \frac{d\tau}{1+\tau^2} \,.$$

(Intégrale absolument convergente). Écrivant que

$$\frac{1}{1+\tau^2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(1+\tau^2)\sigma/2} d\sigma \,,$$

on obtient alors que pour $\rho \geq 0$ on a :

$$e^{-\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho\tau} e^{-(1+\tau^2)\sigma/2} d\tau \,.$$

Par ailleurs on sait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho\tau} e^{-\tau^2\sigma/2} d\tau = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}} e^{-\rho^2/2\sigma} \,,$$

et l'on aboutit finalement à la formule :

$$e^{-\rho} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma/2} e^{-\rho^2/2\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}} \,. \tag{7.3.1}$$

Pour $t > 0$, la fonction $\xi \mapsto e^{-t|\xi|}$ est évidemment intégrable, et sa transformée de Fourier inverse est :

$$P_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} e^{-t|\xi|} d\xi \,.$$

Appliquant (7.3.1) avec $\rho = t|\xi|$, on obtient

$$P_t(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_0^{+\infty} e^{ix\cdot\xi} e^{-\sigma/2} e^{-t^2|\xi|^2/2\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}} \,.$$

L'intégrale double étant absolument convergente, on peut intégrer d'abord en ξ ; mais on sait que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_0^{+\infty} e^{ix\cdot\xi} e^{-t^2|\xi|^2/2\sigma} d\xi = \left(\frac{2\pi\sigma}{t^2}\right)^{n/2} e^{-|x|^2\sigma/2t^2} \,,$$

ce qui donne :

$$P_t(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sigma}{t^2}\right)^{n/2} e^{-\sigma/2} e^{-|x|^2\sigma/2t^2} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}} \,.$$

Effectuant le changement de variable $\sigma \mapsto \tau = \frac{1}{2}\sigma(1+|x|^2/t^2)$, on obtient finalement que

$$P_t(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{(n+1)/2}} \int_0^{+\infty} \tau^{\frac{n-1}{2}} e^{-\tau} d\tau \,.$$

La dernière intégrale vaut (par définition !) $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$, et le lemme est démontré. □

Oublions un instant la forme exacte de la fonction $P(t,x)$ et considérons de façon plus générale une fonction $q(t,x)$, C^∞ et homogène de degré $-n$ en (t,x) sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. On supposera aussi que cette fonction vérifie une estimation du type :

$$|q(t,x)| \leq \frac{C_0|t|}{(|t|+|x|)^{n+1}} \,. \tag{7.3.2}$$

Notant q_t la fonction sur $\mathbb{R}^n$ $q_t(x) = q(t,x)$, on voit alors que pour $t > 0$, $q_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et en fait le changement de variable $x \mapsto tx$ et l'homogénéité de q montrent que la norme de q_t est indépendante de t :

$$\|q_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|q_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = C_1 \,. \tag{7.3.3}$$

De même on a pour $t > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} q_t(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} q_1(x)dx =: \gamma \,. \tag{7.3.4}$$

Il résulte de l'inégalité de Young (chapitre 2) que la convolution $q_t * \phi$ est bien définie pour $\phi \in L^p$ ($1 \le p \le +\infty$, bornes incluses), et que :

$$\|q_t * \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|q_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C_1 \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \,. \tag{7.3.5}$$

Proposition 7.3.2. —

i) Pour $0 < \mu < 1$ et $\phi \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$, on a pour tout $t > 0$, $q_t * \phi \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|q_t * \phi\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \|\phi\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} \,.$$

ii) Pour $0 < \mu < 1$, il existe une constante C_2 telle que pour tout $\phi \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$, tous $t > 0$ et $s > 0$, on ait :

$$\|q_t * \phi - q_s * \phi\|_{L^\infty} \le C_2 \,|t-s|^\mu \,[\phi]_\mu \,,$$
$$\|q_t * \phi - \gamma\phi\|_{L^\infty} \le C_2 \, t^\mu \,[\phi]_\mu \,.$$

(le nombre γ est défini en (7.3.4)).

Démonstration. — Comme cas particulier de (7.3.5) on a :

$$\|q_t * \phi\|_{L^\infty} \le C_1 \|\phi\|_{L^\infty} \,. \tag{7.3.6}$$

Pour $\phi \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$(q_t * \phi)(x) - (q_t * \phi)(x') = \int q_t(y) \big(\phi(x-y) - \phi(x'-y)\big)\, dy \,,$$

et

$$\big|q_t * \phi(x) - q_t * \phi(x')\big| \le \|q_t\|_{L^1} |x - x'|^\mu \,[\phi]_\mu \,,$$

d'où l'on tire que

$$[q_t * \phi]_\mu \le C_1 [\phi]_\mu \,,$$

ce qui, joint à (7.3.6), montre que

$$\|q_t * \phi\|_{C^\mu} \le C_1 \|\phi\|_{C^\mu} \,.$$

À cause de (7.3.4), on a $\int (q_t(y) - q_s(y))dy = 0$ et

$$q_t * \phi(x) - q_s * \phi(x) = \int (q_t(y) - q_s(y))\,(\phi(x-y) - \phi(x))\, dy \,.$$

Notons $\delta = |t-s|$ et coupons cette dernière intégrale en deux parties suivant que $|y| \le \delta$ ou $|y| > \delta$. D'une part on a :

$$\left| \int_{|y| \le \delta} (q_t(y) - q_s(y))\,(\phi(x-y) - \phi(x))\, dy \right| \le \delta^\mu [\phi]_\mu \left(\|q_t\|_{L^1} + \|q_s\|_{L^1}\right) \,.$$

D'autre part, $\frac{\partial q}{\partial t}(t,y)$ est homogène en (t,y) de degré $-n-1$ et on a une inégalité du type :

$$|q_t(y) - q_s(y)| \leq C_3 \frac{|t-s|}{|y|^{n+1}}\,.$$

Par suite,

$$\left| \int_{|y|>\delta} (q_t(y) - q_s(y))\,(\phi(x-y) - \phi(x))\,dy \right| \leq C_3 \delta [\phi]_\mu \int_{|y|>\delta} \frac{|y|^\mu}{|y|^{n+1}} dy\,.$$

Puisque $\delta \int_{|y|>\delta} |y|^{\mu-n-1} dy = C_4 \delta^\mu$, on a alors,

$$\|q_t * \phi - q_s * \phi\|_{L^\infty} \leq (2C_1 + C_3C_4)\delta^\mu [\phi]_\mu\,.$$

Enfin, d'après la définition (7.3.4) de γ, on a :

$$q_t * \phi(x) - \gamma\phi(x) = \int q_t(y)\,(\phi(x-y) - \phi(x))\,dy\,,$$

et

$$\|q_t * \phi - \gamma\phi\|_{L^\infty} \leq [\phi]_\mu \int |q_t(y)|\,|y|^\mu dy\,.$$

Utilisant la majoration (7.3.2) et l'identié :

$$\int \frac{t|y|^\mu}{(t+|y|)^{n+1}} dy = C_5 t^\mu\,,$$

que l'on obtient aisément par le changement de variable $y \mapsto ty$, on aboutit à l'estimation

$$\|q_t * \phi - \gamma\phi\|_{L^\infty} \leq C_0 C_5 t^\mu [\phi]_\mu\,,$$

et la proposition est démontrée. $\square$

Avant d'aller plus loin, introduisons une notation : on désignera par $\mathbb{R}^{n+1}_+$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$) le demi-espace ouvert (resp. fermé) des points $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $t > 0$ (resp. $t \geq 0$). Pour $0 < \mu < 1$, $C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ sera l'espace des fonctions $u(t,x)$ continues et bornées sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$ et telles que :

$$[u]_\mu = \sup_{\substack{t,t'>0,\,x,x'\in\mathbb{R}^n \\ (t,x)\neq(t',x')}} \frac{|u(t,x) - u(t',x')|}{(|t-t'| + |x-x'|)^\mu} < +\infty\,.$$

Notant u_t la fonction $u_t(x) = u(t,x)$, on a alors :

$$\|u_t - u_{t'}\|_{L^\infty} \leq [u]_\mu |t-t'|^\mu\,,$$

et il est alors clair que la limite $\lim\limits_{t\to 0^+} u_t = u_0$ existe dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (et donc dans l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^n$). Finalement l'inégalité

$$|u(t,x) - u(t',x')| \leq [u]_\mu (|t-t'| + |x-x'|)^\mu\,, \tag{7.3.7}$$

vraie pour $t > 0$ et $t' > 0$, l'est encore par continuité pour $t \geq 0$ et $t' \geq 0$. En conclusion, u se prolonge de manière unique en une fonction continue bornée sur $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$, qui vérifie (7.3.7) pour (t,x) et (t',x') dans $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$.

$C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + [u]_\mu\,.$$

Comme au chapitre 6, pour $m \in \mathbb{N}$ et $0 < \mu < 1$, on note $C^{m+\mu}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ l'espace des fonctions de classe C^m sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$ dont toutes les dérivées $D^\alpha u$ d'ordre $|\alpha| \leq m$ sont dans $C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$.

On peut alors réécrire la proposition 7.3.2 sous la forme :

Proposition 7.3.3. — *Soit $q(t,x)$ comme dans la proposition 7.3.2. Pour $\phi \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$, on définit sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$ la fonction*

$$Q\phi(t,x) = (q_t * \phi)(x)\,.$$

Alors $Q\phi \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} Q\phi(t,x) = \gamma\phi(x)$.

Revenons maintenant au noyau de Poisson $P(t,x)$:

Théorème 7.3.4. — *Pour $\phi \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ $(0 < \mu < 1)$, on définit la fonction $P\phi$ sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$ par la formule*

$$(P\phi)(t,x) = (P_t * \phi)(x)\,.$$

Alors $P\phi$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$ et vérifie :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) P\phi = 0\,. \tag{7.3.8}$$

En outre, $P\phi \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} P\phi(t,x) = \phi(x)$. Enfin, pour $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $k + |\alpha| > 0$, on a :

$$t^{k+|\alpha|} D_t^k D_x^\alpha P\phi \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)\,, \quad et \ \lim_{t\to 0^+} t^{k+|\alpha|} D_t^k D_x^\alpha P\phi = 0\,.$$

Preuve. — La fonction

$$\frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}$$

est C^∞ sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, et homogène de degré $-n$ en (t,x). Par conséquent les dérivées de $P(t,x)$ vérifient pour $t > 0$ des estimations du type :

$$\left|\partial_t^k \partial_x^\alpha P(t,x)\right| \leq C_{k,\alpha}(|x| + t)^{-n-|\alpha|-k}\,. \tag{7.3.9}$$

Pour $t > 0$ on a :

$$P\phi(t,x) = \int P(t, x-y)\phi(y)dy\,.$$

Il résulte de (7.3.9) que toutes les dérivations sous le signe somme sont justifiées et on a :

$$\left(D_t^k D_x^\alpha P\phi\right)(t,x) = \int \left(D_t^k D_x^\alpha P\right)(t, x-y)\phi(y)dy\,, \tag{7.3.10}$$

l'intégrale convergeant absolument. On a donc bien $P\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. En outre un calcul direct montre que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)\left(\frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}\right) = 0\,,$$

et par conséquent $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) P\phi = 0.$

Il résulte de la définition de $P(t,x)$ et de (7.3.9) que pour $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la fonction $q(t,x) = t^{k+|\alpha|} D_t^k D_x^\alpha P(t,x)$ est homogène de degré $-n$ en (t,x) et vérifie (7.3.2). On peut donc appliquer la proposition 7.3.3 et avec (7.3.10) on conclut que

$$t^{k+|\alpha|} D_t^k D_x^\alpha P\phi \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})\,.$$

Pour calculer les limites quand $t \to 0^+$, il ne nous reste qu'à évaluer les intégrales

$$\int_{\mathbb{R}^n} q(t,x)dx = \widehat{q}_t(0)\,.$$

Pour $t > 0$ on a :

$$\int e^{-ix\cdot\xi} D_x^\alpha P(t,x)dx = \xi^\alpha \widehat{P}_t(\xi) = \xi^\alpha e^{-t|\xi|}\,,$$

l'intégrale étant absolument convergente. D'aprés (7.3.9) les dérivations sous le signe somme sont justifiées et on a donc :

$$\widehat{q}_t(\xi) = t^{k+|\alpha|}(i|\xi|)^k \xi^\alpha e^{-t|\xi|}\,.$$

Il est alors clair que pour $k + |\alpha| = 0$, $\widehat{q}_t(0) = 1$, et que pour $k + |\alpha| > 0$, $\widehat{q}_t(0) = 0$. □

Corollaire 7.3.5. — *Soit $\theta(t)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 pour $t \leq 1$ et 0 pour $t \geq 2$. Pour $\phi \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ $(0 < \mu < 1)$, la fonction $u(t,x) = \frac{1}{2}t^2\theta(t)(P\phi)(t,x)$ est dans $C^{\mu+2}(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ et $\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = 0$.*

La fonction $v = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) u$ est dans $C^\mu(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ et $\lim_{t\to 0^+} v(t,x) = \phi(x)$.

Preuve. — Si $\mathcal{S}(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ est nulle pour $t \geq 2$, et si $w \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, il est clair que $\mathcal{S}w \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$. Utilisant cette remarque et le théorème 7.3.4 avec $k + |\alpha| \leq 2$ on voit immédiatement que $u \in C^{2+\mu}(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$. En outre $\lim_{t\to 0} P\phi = \phi$ et donc $\lim_{t\to 0} t^2\theta(t)P\phi = 0$.

v qui est somme de dérivées d'ordre 2 de u est donc dans $C^\mu(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$. Utilisant (7.3.8) on a aussi :

$$v(t,x) = \partial_t\left(t^2\theta(t)\right)(\partial_t P\phi)(t,x) + \frac{1}{2}\partial_t^2\left(t^2\theta(t)\right)P\phi(t,x)\,,$$

et

$$\lim_{t\to 0^+} v(t,x) = \lim_{t\to 0^+} 2t(\partial_t P\phi)(t,x) + \lim_{t\to 0^+} P\phi(t,x) = \phi(t,x)\,.$$

□

Théorème 7.3.6. — *Pour $\phi \in C^{m+\mu}_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n)$ $(m \in \mathbb{N},\ 0 < \mu < 1)$, $P\phi \in C^{m+\mu}(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$.*

Démonstration. — Au cours de la démonstration du théorème 7.3.4, on a déjà noté la relation :

$$D_t^k D_x^\alpha P\phi = P\psi\,, \quad \text{avec} \quad \widehat{\phi} = (i|\xi|)^k \xi^\alpha \widehat{\phi}(\xi)\,.$$

(Cette relation est immédiate sur l'écriture de Fourier :$\widehat{P\phi}(t,\xi) = e^{-t|\xi|}\widehat{\phi}(\xi)$.)

Il nous suffit donc de montrer que si $\phi \in C^{k+|\alpha|+\mu}_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n)$, alors $\psi \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$. Or on peut écrire :

$$|\xi|^k = \frac{1}{|\xi|^k}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right)^k = \sum_{|\beta|=k} \frac{\xi^\beta}{|\xi|^k}\xi^\beta a_{\beta,k}\,,$$

les coefficients $a_{\beta,k}$ n'ayant pas besoin d'être explicités.

Si $\phi \in C^{k+|\alpha|+\mu}_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$, les fonctions $\phi_\beta = D^\beta_x D^\alpha_x \phi$ pour $|\beta| = k$ sont dans $C^\mu_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ et puisque $\widehat{\psi}(\xi) = \sum a_{\beta,k} \frac{\xi^\beta}{|\xi|^k} \widehat{\phi_\beta}(\xi)$, il suffit de voir que les convolutions par $T_\beta = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi^\beta}{|\xi|^k}\right)$ opèrent de $C^\mu_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\mu(\mathbb{R}^n)$. Cela résulte du fait que les T_β sont des distributions régulières de type 0. □

Notant Δ l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, nous sommes maintenant en mesure de démontrer une “inégalité de Schauder pour le problème de Dirichlet” :

Théorème 7.3.7. — *Pour* $0 < \mu < 1$ *et* $R > 0$, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que toute fonction* $u(t,x) \in C^{2+\mu}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ *à support dans la demi-boule* $\{t^2 + |x|^2 \leq R\ ;\ t \geq 0\}$ *vérifie :*

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)} \leq C\left(\|\Delta u\|_{C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)} + \|u(0,\cdot)\|_{C^{2+\mu}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)}\right).$$

Remarque. — On a vu que pour toute fonction $u \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$, la limite $u(0,x) = \lim_{t\to 0^+} u(t,x)$ existe et en fait que $u(0,\cdot) \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ (cf (7.3.7)). Si $u \in C^{1+\mu}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$, par définition on a $\partial_j u \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ et on laisse en exercice la vérification du fait que $u(0,\cdot)$ appartient à $C^{1+\mu}(\mathbb{R}^n)$ et que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u(0,x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\partial u}{\partial x_j}(t,x).$$

De même, si $u \in C^{m+\mu}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$, $u(0,\cdot) \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration du théorème 7.3.7. — On notera $f = \Delta u$, $\phi = u(0,\cdot)$ et $\psi = f(0,\cdot)$. Posons :

$$w = P\phi + \frac{1}{2} t^2 \theta(t) P\psi,$$

où $\theta(t)$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, qui vaut 1 pour $t \leq 1$ et 0 pour $t \geq 2$.

Il résulte du théorème 7.3.6 et du corollaire 7.3.5 que $w \in C^{2+\mu}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ et que :

$$\|w\|_{C^{2+\mu}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)} \leq C\left(\|u(0,\cdot)\|_{C^{2+\mu}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)}\right). \tag{7.3.11}$$

Posons $v = u - w$; v est un élément de $C^{2+\mu}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ et d'après le corollaire 7.3.5 on a $v(0,x) = 0$ et $(\Delta v)(0,x) = 0$. On a aussi

$$\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} v\right)(0,x) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) v(0,x) = 0,$$

et par suite $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 v(0,x) = 0$.

On définit la fonction $\widetilde{v}$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par les formules :

$$\widetilde{v}(t,x) = \begin{cases} v(t,x) & \text{si } t \geq 0, \\ -v(-t,x) & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{7.3.12}$$

Grâce aux conditions $v(0,x) = 0$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(0,x) = 0$, on voit que $\widetilde{v} \in C^{2+\mu}(\mathbb{R}^{n+1})$ et que

$$\Delta\widetilde{v} = \Delta\widetilde{v}(t,x) = \begin{cases} \Delta v(t,x) & \text{si } t \geq 0, \\ -\Delta v(-t,x) & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{7.3.13}$$

Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ de longueur $|\alpha| leq 2$, on a :

$$\|D^\alpha v\|_{C^\mu(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})} \leq \|D^\alpha \widetilde{v}\|_{C^\mu(\mathbb{R}^{n+1})} \ .$$

D'après le paragraphe précédent on a :

$$\|D^\alpha \widetilde{v}\|_{C^\mu(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C \left(\|\Delta \widetilde{v}\|_{C^\mu(\mathbb{R}^{n+1})} + \|\widetilde{v}\|_{C^\mu(\mathbb{R}^{n+1})} \right) \ .$$

Compte tenu des formules (7.3.12) et (7.3.13), on a aussi :

$$\|\Delta \widetilde{v}\|_{C^\mu(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C' \|\Delta v\|_{C^\mu(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})} \ ; \ \|\widetilde{v}\|_{C^\mu(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C' \|v\|_{C^\mu(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})} \ .$$

Avec les relations $u = v + w$, $\Delta v = \Delta u - \Delta w$, compte tenu de (7.3.11), on a alors :

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})} \leq C'' \left(\|\Delta u\|_{C^\mu(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})} + \|u(0,\cdot)\|_{C^{2+\mu}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C^\mu(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})} \right) \ ,$$

et le théorème est démontré. $\square$

CHAPITRE 8

PROBLÈMES AUX LIMITES D'ORDRE DEUX

Dans ce chapitre nous montrons comment interviennent les inégalités de Schauder dans l'étude de problèmes aux limites.

8.1. Espaces $C^\mu(\overline{\Omega})$, $C^\mu(\partial\Omega)$

Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on notera $C^\mu(\overline{\Omega})$ $(0 < \mu < 1)$ l'espace des fonctions u continues et bornées sur Ω et telles que :

$$[u]_\mu = \sup_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ x\neq y}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^\mu} < +\infty\,.$$

$C^\mu(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_\mu\,.$$

Comme au chapitre précédent, on montre qu'une fonction $u \in C^\mu(\overline{\Omega})$ s'étend en fonction bornée sur $\overline{\Omega}$ et que l'on a :

$$|u(x)-u(y)| \leq [u]_\mu |x-y|^\mu\,,$$

pour $(x,y) \in \overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$.

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $0 < \mu < 1$, $C^{m+\mu}(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions de classe C^m sur Ω dont toutes les dérivées d'ordre $\leq m$ sont dans $C^\mu(\overline{\Omega})$. $C^{m+\mu}(\overline{\Omega})$ est muni d'une des deux normes équivalentes suivantes :

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{C^\mu(\overline{\Omega})}\ ,$$
$$\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|\leq m} [D^\alpha u]_\mu\ .$$

Lemme 8.1.1. — *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soient $0 < \mu' < \mu < 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $u \in C^\mu(\overline{\Omega})$ on a :*

$$\|u\|_{C^{\mu'}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon\,\|u\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} + \left(1 + 2\varepsilon^{\frac{\mu'}{\mu'-\mu}}\right)\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\ . \tag{8.1.1}$$

Preuve. — Il suffit de montrer que :

$$[u]_{\mu'} \leq \varepsilon[u]_\mu + 2\varepsilon^{\frac{\mu'}{\mu'-\mu}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} . \tag{8.1.2}$$

Or pour $|x-y| \leq \varepsilon^{\frac{1}{\mu-\mu'}}$ on a :

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\mu'}} \leq [u]_\mu |x-y|^{\mu-\mu'} \leq \varepsilon[u]_\mu ,$$

et pour $|x-y| > \varepsilon^{\frac{1}{\mu-\mu'}}$ on a :

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\mu'}} \leq 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \varepsilon^{-\frac{\mu'}{\mu-\mu'}} ,$$

ce qui montre que l'inégalité (8.1.2) est satisfaite. □

Corollaire 8.1.2. — *Si u_k est une suite bornée de $C^\mu(\overline{\Omega})$ qui converge vers 0 dans $L^\infty(\Omega)$, alors u_k converge vers 0 dans $C^{\mu'}(\overline{\Omega})$ pour tout $\mu' < \mu$.*

Preuve. — Il suffit de montrer que $[u_k]_{\mu'} \to 0$. On sait qu'il existe C tel que pour tout k on ait :

$$[u_k]_\mu \leq C .$$

En outre pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $k \geq N$,

$$\|u_k\|_{L^\infty} \leq \varepsilon\, \varepsilon^{\frac{\mu'}{\mu-\mu'}} .$$

Avec l'inégalité (8.1.2) on voit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $k \geq N$,

$$[u_k]_{\mu'} \leq (C+2)\varepsilon .$$

□

Lemme 8.1.3. — *Soient Ω borné et $0 < \mu' < \mu < 1$. Si u_N est une suite bornée de $C^\mu(\overline{\Omega})$, il existe une sous–suite u_{N_k} et $u \in C^\mu(\overline{\Omega})$ tels que u_{N_k} converge vers u dans $C^{\mu'}(\overline{\Omega})$ pour tout $\mu' < \mu$.*

Preuve. — Si $\|u_N\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} \leq C$, il résulte immédiatement du théorème d'Ascoli qu'il existe une sous–suite u_{N_k} uniformément convergente vers un élément $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Passant à la limite dans

$$|u_{N_k}(x) - u_{N_k}(y)| \leq C|x-y|^\mu ,$$

on obtient

$$|u(x)-u(y)| \leq C|x-y|^\mu ,$$

et $u \in C^\mu(\overline{\Omega})$. Appliquant le corollaire précédent à la suite $v_k = u_{N_k} - u$, on obtient le résultat. □

Plus généralement, on a :

Lemme 8.1.4. — *Soient Ω borné, k et m entiers, $0 < \mu' < 1$ et $0 < \mu < 1$ tels que $k + \mu' < m + \mu$.*

Si u_N est une suite bornée dans $C^{m+\mu}(\overline{\Omega})$, il existe une sous–suite u_{N_k} et $u \in C^{m+\mu}(\overline{\Omega})$ telles que $u_{N_k} \to u$ dans $C^{k+\mu'}(\overline{\Omega})$.

Lemme 8.1.5. — *Notons B_r la boule de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in C^\mu(\overline{B_r})$, telle que $a(0) = 0$. Alors pour $u \in C^\mu(\overline{B_r})$ nulle sur la sphère $\{|x| = r\}$, on a :*

$$\|au\|_{C^\mu(\overline{B_r})} \leq 3r^\mu \|a\|_{C^\mu(\overline{B_{r_0}})} \|u\|_{C^\mu(\overline{B_r})} .$$

Preuve. — Puisque $a(0) = 0$, on a $\|a\|_{L^\infty(B_r)} \leq r^\mu [a]_\mu$ et

$$\|au\|_{L^\infty(B_r)} \leq r^\mu [a]_\mu \|u\|_{L^\infty(B_r)} . \tag{8.1.3}$$

Écrivant

$$au(x) - au(y) = a(x)\,(u(x) - u(y)) + (a(x) - a(y))\,u(y) ,$$

on obtient que :

$$[au]_{\mu,B_r} \leq r^\mu [a]_\mu [u]_{\mu,B_r} + [a]_\mu \|u\|_{L^\infty(B_r)} . \tag{8.1.4}$$

Mais puisque $u(y) = 0$ pour $|y| = r$, et puisque tout point de B_r est à une distance $\leq r$ de la sphère $\{|y| = r\}$, on a :

$$\|u\|_{L^\infty(B_r)} \leq r^\mu [u]_{\mu,B_r} .$$

Reportant dans (8.1.4), on obtient :

$$[au]_{\mu,B_r} \leq 2r^\mu [a]_\mu [u]_{\mu,B_r} ,$$

et avec (8.1.3), le lemme suit. □

On introduit maintenant la notion d'ouvert à bord de classe $C^{m+\mu}$ $(m \geq 1)$: l'ouvert borné Ω sera dit *ouvert à bord de classe* $C^{m+\mu}$ si pour tout point x_0 du bord topologique $\partial\Omega$ de Ω, il existe un voisinage U de $\underline{x}$, un voisinage U' de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et une bijection χ de U sur U', de classe $C^{m+\mu}$, dont la bijection inverse χ^{-1} est aussi de classe $C^{m+\mu}$ et telle que :

$$\chi(U \cap \Omega) = \{x \in U' \ / \ x_n > 0\} .$$

On dit que χ est une *carte locale* de Ω au voisinage de $\underline{x}$. Toute bijection θ de U' sur U'' de sorte que θ et θ^{-1} soient de classe $C^{m+\mu}$ et que

$$\theta\left(\{x \in U \ / \ x_n > 0\}\right) = \{x \in U'' \ / \ x_n > 0\}$$

fournit, par composition avec χ, un *changement de carte locale* au voisinage du point du bord considéré.

Par ailleurs, si χ est une carte locale, on voit que

$$\chi(U \cap \partial\Omega) = \{x \in U' \ / \ x_n = 0\} ,$$

et la restriction de χ à $(U \cap \partial\Omega)$ fournit une carte locale de $U \cap \partial\Omega$ sur $\{x \in U' \ / \ x_n = 0\}$, ce qui montre que $\partial\Omega$ est une variété de classe $C^{m+\mu}$ (au sens des variétés dans $\mathbb{R}^n$). Par conséquent la notion de fonction de classe $C^{k+\mu'}$ sur $\partial\Omega$ a bien un sens pour $k + \mu' \leq m + \mu$: on dira qu'une fonction continue ϕ sur $\partial\Omega$ est de classe $C^{k+\mu'}$ si pour tout $\underline{x} \in \partial\Omega$ et toute carte locale χ d'un voisinage de $\underline{x}$ sur U', la fonction :

$$x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \phi \circ \chi^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$$

est de classe $C^{k+\mu'}$ sur $\{x \in U' \ / \ x_n = 0\}$ (si $\chi_1 = \theta \circ \chi$ est une autre carte locale au voisinage de x_0, $\phi \circ \chi_1^{-1} = \phi \circ \chi^{-1} \circ \theta^{-1}$ est de classe $C^{k+\mu'}$ en même temps que $\phi \circ \chi^{-1}$ puisque θ et θ^{-1} sont de classe $C^{m+\mu}$).

Dans tout compact de U' on a :

$$\frac{1}{C}|x - y| \leq |\chi^{-1}(x) - \chi^{-1}(y)| \leq C|x - y| ,$$

et on voit que $\phi \in C^{\mu'}(\partial\Omega)$ si et seulement si :

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x-y|^{\mu'}$$

pour tout $(x,y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega$.

On munit $C^{k+\mu'}(\partial\Omega)$ d'une norme en procédant de la manière suivante : utilisant la compacité de $\partial\Omega$, on peut recouvrir $\partial\Omega$ par une famille finie de voisinages U_i $(i = 1, \dots, N)$ de sorte que pour tout i, il existe χ_i bijection de U_i sur U'_i, de classe $C^{m+\mu}$ ainsi que son inverse, et telle que :

$$\chi_i(U_i \cap \Omega) = \{x \in U'_i \ / \ x_n > 0\} .$$

Alors on peut trouver des fonctions θ_i $(i = 1, \dots, N)$ telles que :

$$\text{(8.1.5)} \qquad \begin{cases} \theta_i \in C_0^\infty(U_i) , \\ 0 \leq \theta_i \leq 1 , \\ \forall x \in \partial\Omega , \ \displaystyle\sum_{i=1}^N \theta_i(x) = 1 . \end{cases}$$

On voit alors que $\phi \in C^{k+\mu'}(\partial\Omega)$ si et seulement si $\theta_i\phi \in C^{k+\mu'}(\partial\Omega)$ pour tout $i = 1, \dots, N$, et encore si et seulement si $\phi_i = \theta_i\phi \circ \chi_i^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ est de classe $C^{k+\mu'}$ sur $V_i = \{x \in U'_i \ / \ x_n = 0\}$ (ϕ_i est à support compact dans V_i).

On définit alors une norme sur $C^{k+\mu'}(\partial\Omega)$ en posant :

$$\|\phi\|_{C^{k+\mu'}(\partial\Omega)} = \sum_{j=1}^N \|\phi_j\|_{C^{k+\mu'}(\overline{V_j})} .$$

Proposition 8.1.6. — *L'application $u \mapsto \gamma_0 u$, qui à une fonction continue u sur $\overline{\Omega}$ associe sa restriction à $\partial\Omega$, est continue et surjective de $C^{k+\mu'}(\overline{\Omega})$ dans $C^{k+\mu'}(\partial\Omega)$.*

Preuve. — Introduisons à nouveau un recouvrement de $\partial\Omega$ par des ouverts de cartes locales U_i, avec les cartes locales χ_i de U_i sur U'_i. Introduisons aussi la partition de l'unité θ_i (8.1.5). Pour $u \in C^{k+\mu'}(\overline{\Omega})$, la fonction $u_i = (\theta_i u) \circ \chi_i^{-1}$ est à support compact dans $\{x \in U'_i \ / \ x_n \geq 0\}$ et de classe $C^{k+\mu'}$; on définit $\widetilde{u}_i(x) = u_i(x)$ pour $x \in U'_i$, $x_n > 0$, et $\widetilde{u}_i(x) = 0$ pour $x \notin U'_i$, $x_n > 0$.

On voit alors que $\widetilde{u}_i \in C^{k+\mu'}(\overline{\mathbb{R}}^n)$ (avec la notation du chapitre 7, x_n jouant ici le rôle de la variable notée t dans ce chapitre).

Comme on l'a noté au chapitre 7.3, la fonction

$$v_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = \widetilde{u}_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

est dans $C^{k+\mu'}(\mathbb{R}^{n-1})$. Puisque l'on a : $\theta_i(\gamma_0 u) \circ \chi_i^{-1} = v_i$, on voit donc que $\gamma_0 u \in C^{k+\mu'}(\partial\Omega)$.

Si l'on se donne maintenant $\phi \in C^{k+\mu'}(\partial\Omega)$, la fonction

$$\phi_i = (\theta_i\phi) \circ \chi_i^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

est dans l'espace $C^{k+\mu'}_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^{n-1})$. Définissant $u_i(x_1, \dots, x_n) = \phi_i(x_1, \dots, x_{n-1})$, il est clair que $u_i \in C^{k+\mu'}(\mathbb{R}^n_+)$. Considérons maintenant $\theta'_i \in C_0^\infty(U_i)$ qui vaut 1 sur le support de θ_i. Alors la fonction $\theta'_i(u_i \circ \chi_i)$ est à support dans $\overline{\Omega} \cap U_i$, et si on la prolonge par 0 dans $\Omega \setminus U_i$, elle est dans $C^{k+\mu'}(\overline{\Omega})$.

Posant $u = \sum_{i=1}^N \theta_i'(u_i \circ \chi_i)$, on obtient une fonction de $C^{k+\mu'}(\overline{\Omega})$, et puisque pour $x \in \partial\Omega$, $u_i \circ \chi_i(x) = \phi_i \circ \chi_i(x) = \theta_i(x)\phi(x)$, et que $\theta_i'\theta_i = \theta_i$, on a :

$$\gamma_0 u = \sum_{i=1}^N \theta_i'\theta_i\phi = \phi\,,$$

ce qui montre la surjectivité de l'application $u \mapsto \gamma_0 u$ de $C^{k+\mu'}(\overline{\Omega})$ sur $C^{k+\mu'}(\partial\Omega)$. □

8.2. Inégalités de Schauder

Considérons un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, à bord de classe $C^{2+\mu}$ $(0 < \mu < 1)$. D'autre part, on se donne un opérateur différentiel :

$$P = \sum_{1 \leq j,k \leq n} a_{j,k}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x)\,,$$

les fonctions $a_{j,k}$, b_j et c étant à valeurs réelles, et de classe C^μ sur $\overline{\Omega}$. Puisque $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}$ on peut supposer la matrice $(a_{j,k})$ symétrique, et on la supposera définie positive, uniformément par rapport à $x \in \overline{\Omega}$, c'est-à-dire qu'il existe $c_0 > 0$ telle que :

(8.2.1) $$\forall x \in \overline{\Omega},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\quad \sum_{1 \leq j,k \leq n} a_{j,k}(x)\xi_j\xi_k \geq c_0|\xi|^2\,.$$

L'opérateur P définit une application linéaire de $C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ dans $C^\mu(\overline{\Omega})$, et c'est cette application que nous étudions maintenant.

Théorème 8.2.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une constante C telle que pour tout $u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$, on ait :*

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} \leq C\left(\|Pu\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} + \|\gamma_0 u\|_{C^{2+\mu}(\partial\Omega)} + \|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})}\right)\,.$$

Nous allons procéder par étapes. D'abord on montre que :

Lemme 8.2.2. — *Soit x_0 un point de Ω ; il existe un voisinage $\omega \Subset \Omega$ de x_0 et une constante C tels que pour toute fonction $u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ à support dans ω on ait :*

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} \leq C\left(\|Pu\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} + \|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})}\right)\,.$$

Preuve du lemme 8.2.2. — Notons P_0 l'opérateur :

$$P_0 = \sum_{1 \leq j,k \leq n} a_{j,k}(x_0)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\,.$$

D'après le chapitre précédent, puisque l'opérateur P_0 est elliptique (d'après (8.2.1)), il existe une constante C_0 telle que pour toute fonction $v \in C^{2+\mu}(\mathbb{R}^n)$, on ait :

(8.2.2) $$\|v\|_{C^{2+\mu}(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(\|P_0 v\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{C^{1+\mu}(\mathbb{R}^n)}\right)\,.$$

Il existe $r_0 > 0$ tel que la boule de centre x_0 et de rayon r_0 soit contenue dans Ω. Notons $C_1 = \max_{j,k} \|a_{j,k}\|_{C^\mu(\overline{\Omega})}$. On a aussi :

$$\|a_{j,k}(\cdot) - a_{j,k}(x_0)\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} \leq 2C_1\,,$$

et puisque la fonction $a_{j,k}(\cdot)-a_{j,k}(x_0)$ s'annule en $x = x_0$, d'après le lemme 8.1.5, si $w \in C^\mu(\overline{\Omega})$ est à support dans la boule de centre x_0 de rayon r ($r \le r_0$), on a :

$$\|(a_{j,k}(\cdot) - a_{j,k}(x_0))\, w(\cdot)\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} \le 6C_1 r^\mu \|w\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} \,.$$

Si $u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ est à support dans la boule de centre x_0 et de rayon r, on a donc :

$$\left\| \sum_{1\le j,k\le n} a_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - P_0 u \right\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} \le 6C_1 r^\mu \|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} \,.$$

Par ailleurs, on a évidemment, pour tout $u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$:

$$\left\| \sum_{1\le j\le n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu \right\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} \le C_2 \|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})} \,,$$

et avec (8.2.2), on en déduit que pour $u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ à support dans la boule de centre x_0 de rayon r on a :

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} \le C_0 \left(\|Pu\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} + 6C_1 r^\mu \|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} + (C_2+1) \|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})} \right).$$

Maintenant si r est assez petit pour que $6C_0C_1r^\mu \le 1/2$, on a :

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} \le 2C_0 \left(\|Pu\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} + (C_2+1) \|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})} \right) ,$$

et le lemme est démontré. □

Lemme 8.2.3. — *Soit x_0 un point de $\partial\Omega$. Il existe un voisinage ω de x_0 et une constante C tels que pour toute fonction $u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ à support dans $\overline{\Omega} \cap \omega$ on ait :*

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} \le C \left(\|Pu\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} + \|\gamma_0 u\|_{C^{2+\mu}(\partial\Omega)} + \|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})} \right) .$$

Preuve du lemme 8.2.3. — On peut évidemment supposer que ω est assez petit pour être contenu dans un ouvert de carte locale et quitte à transporter le problème par la carte locale χ on peut supposer que $x_0 = 0$ et qu'il existe un voisinage U de x_0 tel que :

$$\Omega \cap U = \{x \in U \ / \ x_n > 0\} \,.$$

Notons comme tout à l'heure

$$P_0 = \sum_{1\le j,k\le n} a_{j,k}(x_0) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \,.$$

Il suffit de montrer que pour $v \in C^{2+\mu}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$, à support dans $\overline{\mathbb{R}}^n_+ \cap U$, on a :

$$\|v\|_{C^{2+\mu}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)} \le C_0 \left(\|P_0 v\|_{C^\mu(\overline{\mathbb{R}}^n_+)} + \|\gamma_0 v\|_{C^{2+\mu}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|v\|_{C^{1+\mu}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)} \right) . \tag{8.2.3}$$

En effet la fin de la démonstration est tout à fait similaire à celle du lemme 8.2.2, en utilisant une version du lemme 8.1.5 ayant trait non à des boules mais à des demi-boules.

Dans (8.2.3), $\gamma_0 v$ désigne la fonction $\gamma_0 v(x_1, \ldots, x_{n-1}) = v(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, et si P_0 était le laplacien ($\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$), l'inégalité (8.2.3) serait exactement la conclusion du théorème 7.3.7.

On achève donc la démonstration de (8.2.3) et du lemme 8.2.3 en montrant qu'il existe une application linéaire A de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$(Ax)_n = \lambda_n x_n \ (\lambda_n > 0)\,, \tag{8.2.4}$$

et telle que si l'on pose $w(x) = v(Ax)$, on a :

$$\Delta w(x) = (P_0 v)(Ax)\,. \tag{8.2.5}$$

En effet, par (8.2.4) l'application $x \mapsto Ax$ préserve $\overline{\mathbb{R}}^n_+$, et la transformation $v \mapsto w$ est un isomorphisme sur chacun des espaces $C^{k+\mu}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$. En outre, d'après (8.2.4), on a :

$$w(x', 0) = w(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = v((Ax)', 0)\,,$$

et cette transformation est un isomorphisme de $C^{2+\mu}(\mathbb{R}^{n-1})$ sur lui-même.

Notant $\alpha_{j,k}$ les coefficients de la matrice A, on a :

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j} \frac{\partial v}{\partial x_k}(Ax)\,,$$

et

$$\Delta w = \sum_{k,l} \left(\sum_j \alpha_{k,j}\alpha_{l,j} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l}(Ax)\,,$$

et si l'on désigne par Q la matrice $(a_{j,k}(x_0))_{1\le j,k\le n}$, la relation (8.2.5) aura lieu si (et seulement si) :

$$A^t A = Q\,. \tag{8.2.6}$$

Finalement, il s'agit de faire une réduction en carrés de la forme quadratique Q, et pour que l'on ait (8.2.4), il suffit que l'un de ces carrés soit de la forme $\lambda_n^2 x_n^2$. La forme quadratique Q étant définie positive ((8.2.1)), une telle réduction est toujours possible. □

Démonstration du théorème 8.2.1. — Utilisant la compacité de $\partial\Omega$, on recouvre $\partial\Omega$ par un nombre fini d'ouverts ω_j $(j = 1, \dots, N)$ tels que sur chacun de ces ouverts, la conclusion du lemme 8.2.3 ait lieu avec une constante C_j.

Notons $U = \sum_{j=1}^N \omega_j$, et $K = \{x \in \Omega \ / \ x \notin U\}$. K est un compact inclus dans Ω, et on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts ω_j $(j = N+1, \dots, M)$ tels que sur chacun d'eux, la conclusion du lemme 8.2.2 ait lieu avec une constante C_j. On notera $C = \max_{1\le j\le M} C_j$.

Introduisons une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\sum_{j=1}^M \omega_j$ de $\overline{\Omega}$:

$$\begin{cases} \varphi_j \in C_0^\infty(\omega_j),\ 0 \le \varphi_j \le 1 \ \text{ pour } j = 1, \dots, M, \ \text{ et} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^M \varphi_j(x) = 1 \ \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega}\,. \end{cases}$$

Pour $u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$, on a $\varphi_j u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ et

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} \le \sum_{j=1}^M \|\varphi_j u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})}\,.$$

Appliquant l'inégalité du lemme 8.2.3 si $j \leq N$ ou du lemme 8.2.2 si $j > N$, on obtient :

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} \leq C \sum_{j=1}^{M} \Big(\|P\varphi_j u\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} + \|\gamma_0 \varphi_j u\|_{C^{2+\mu}(\partial\Omega)} + \|\varphi_j u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})} \Big) . \tag{8.2.7}$$

Mais on a :

$$P\varphi_i u = \varphi_i P u + \sum_j b'_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} + c'_i u \, ,$$

où $b'_{i,j}$ et c'_i sont de classe C^μ sur $\overline{\Omega}$ et ne dépendent que des $a_{j,k}$, b_j et des dérivées de φ_i. Par suite on a :

$$\|P\varphi_j u\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} \leq C' \Big(\|Pu\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} + \|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})} \Big) \, .$$

On a aussi

$$\|\gamma_0 \varphi_j u\|_{C^{2+\mu}(\partial\Omega)} \leq C'' \, \|\gamma_0 u\|_{C^{2+\mu}(\partial\Omega)} \, ,$$

$$\|\varphi_j u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})} \leq C''' \, \|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})} \, .$$

Reportant toutes ces inégalités dans (8.2.7), on obtient (avec une autre constante C)

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} \leq C \Big(\|Pu\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} + \|\gamma_0 u\|_{C^{2+\mu}(\partial\Omega)} + \|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})} \Big) \, ,$$

et le théorème est démontré. □

Remarque. — Une analyse de la démonstration ci-dessus montre que, une fois choisies les normes des espaces, la constante C ne dépend que de la norme $C^\mu(\Omega)$ des coefficients et de la constante d'ellipticité c_0 de (8.2.1). C'est-à-dire que si on a une famille d'opérateurs P_t dépendant d'un paramètre t,

$$P_t = \sum_{1 \leq j,k \leq n} a_{j,k}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x,t) \, ,$$

tels que les normes $\|a_{j,k}(\cdot,t)\|_{C^\mu(\Omega)}$, $\|b_j(\cdot,t)\|_{C^\mu(\Omega)}$ et $\|c(\cdot,t)\|_{C^\mu(\Omega)}$ sont majorées indépendamment de t et que l'on a :

$$\sum_{1 \leq j,k \leq n} a_{j,k}(x,t) \xi_j \xi_k \geq c_0 |\xi|^2 \, ,$$

avec c_0 indépendante de x, t, ξ, alors l'inégalité du théorème 8.2.1 a lieu pour chaque opérateur P_t, avec une constante C indépendante de t.

8.3. Principe du maximum

On considère un opérateur

$$P = \sum_{1 \leq j,k \leq n} a_{j,k}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x) \, , \tag{8.3.1}$$

à coefficients réels continus sur $\overline{\Omega}$ (Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$) et on suppose vérifiée la condition d'ellipticité (8.2.1).

Théorème 8.3.1. — *Supposons que $c(x) \leq 0$. Si u est réelle, continue sur $\overline{\Omega}$, de classe C^2 dans Ω et vérifie*

$$\begin{aligned} u(x) \leq 0 \text{ pour } \quad & x \in \partial\Omega\,, \\ Pu(x) \geq 0 \text{ pour } \quad & x \in \Omega\,, \end{aligned}$$

alors $u(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Démonstration. — Supposons qu'en un point $x \in \Omega$ on ait $u(x) > 0$. Alors le maximum de u est atteint en un point $x_0 \in \Omega$. Nous allons montrer qu'il existe tout un voisinage de x_0 sur lequel $u(x) \equiv u(x_0)$. Il en résulte que u est constante sur la composante connexe de x_0 dans Ω ; sur le bord de cette composante connexe, u prend donc la valeur $u(x_0) > 0$, ce qui est impossible.

Soit donc x_0 un point où u atteint son maximum supposé strictement positif. Soit $r > 0$ tel que la boule de centre x_0 et de rayon $2r$ soit incluse dans Ω, et tel que $u(x)$ soit positive ou nulle dans cette boule. Soit x_1 tel que $|x_1 - x_0| \leq r$. Nous montrons que $u(x_1) = u(x_0)$.

Si $u(x_1) < u(x_0)$, il existe $\rho \in]0, r]$ tel que $u(x) < u(x_0)$ pour $|x - x_1| < \rho$ et $\max_{|x-x_1|=\rho} u(x) = u(x_2) = u(x_0)$: il suffit de prendre la borne supérieure des ρ' tels que $u(x) < u(x_0)$ pour $|x - x_1| < \rho'$. On a alors

$$\mu := \max_{|x-x_1|=\rho/2} u(x) < u(x_0).$$

La fonction $g(x) = e^{-\alpha|x-x_1|^2} - e^{-\alpha\rho^2}$ est nulle pour $|x - x_1| = \rho$ et vérifie :

$$Pg = 4\alpha^2 \sum_{1\leq j,k\leq n} a_{j,k}(x)(x - x_1)_j(x - x_1)_k + O(\alpha)\,,$$

et l'ellipticité (8.2.1) montre qu'on peut choisir α assez grand pour que $Pg(x) > 0$ dans la couronne $\Gamma := \{\rho/2 < |x - x_1| < \rho\}$.

Puisque $\mu < u(x_0)$, on peut trouver ε assez petit pour que la fonction $v = u + \varepsilon g$ vérifie :

$$\begin{cases} v(x) < u(x_0) \text{ pour } & |x - x_1| < \rho/2\,, \\ v(x) = u(x) \leq u(x_0) \text{ pour } & |x - x_1| = \rho\,, \\ Pv = Pu + \varepsilon Pg > 0 \text{ pour } & \rho/2 < |x - x_1| < \rho\,. \end{cases}$$

Si en un point y de Γ on avait $v(y) > u(x_0)$, v atteindrait un maximum local > 0 en un point $\hat{x} \in \Gamma$. En ce point on aurait :

$$\frac{\partial v}{\partial x_j}(\hat{x}) = 0\,,\ c(\hat{x})v(\hat{x}) \leq 0 \ \text{ et } \sum_{1\leq j,k\leq n} a_{j,k}(\hat{x}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k}(\hat{x}) \leq 0\,.$$

La dernière relation résulte du fait qu'en un maximum local, la matrice symétrique $B = (\partial_{jk} v(\hat{x}))_{j,k}$ est ≤ 0, et que la matrice $A = (a_{j,k}(\hat{x}))_{j,k}$ est définie positive, ce qui implique, comme on le voit tout de suite en codiagonalisant A et B, que la trace de AB, qui vaut $\sum_{1\leq j,k\leq n} a_{j,k}(\hat{x})\partial_{jk}v(\hat{x})$, est ≤ 0.

On aurait donc $Pv(\hat{x}) \leq 0$, ce qui est impossible. Par conséquent, on a $v(y) \leq u(x_0)$ en tout point y de Γ. Notant que $v(x_2) = u(x_0)$, on a alors :

$$v\left(x_2 + t(x_2 - x_1)\right) \leq v(x_2) \text{ pour } t \in]-\rho/2, 0[\,,\ \text{ et } \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} v\left(x_2 + t(x_2 - x_1)\right) \geq 0\,.$$

Maintenant on remarque que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\left(x_2+t(x_2-x_1)\right) = -2\alpha e^{-\alpha\rho^2} < 0\,,$$

et donc on a

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} u\left(x_2+t(x_2-x_1)\right) > 0\,.$$

Mais x_2 est un maximum local de u et $\partial_j u(x_2)=0$, ce qui établit la contradiction souhaitée, et montre que sur la boule de centre x_0 et de rayon r, on a $u(x)\equiv u(x_0)$. □

Théorème 8.3.2. — *i) Si le coefficient $c(x)$ de P est <0, on a pour $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$:*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \max\left(\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\,,\left\|\frac{Pu}{c}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\right).$$

ii) Si $c(x)\le 0$, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, on a :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + C\,\|Pu\|_{L^\infty(\Omega)}\,.$$

Démonstration. — On peut supposer u réelle et $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}>0$.

i) Le maximum de $|u(x)|$ est atteint en un point $\hat{x}\in\overline{\Omega}$; si $\hat{x}\in\partial\Omega$, l'inégalité est triviale. Changeant u en $-u$ si nécessaire, on peut supposer que $u(\hat{x})=\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ est unmaximal local de u. On a alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(\hat{x})=0 \;\text{ et }\; \sum a_{j,k}(\hat{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}(\hat{x})\le 0\,.$$

On a donc $Pu(\hat{x})\le c(\hat{x})u(\hat{x})$ et puisque $c(\hat{x})<0$, $u(\hat{x})\le Pu(\hat{x})/c(\hat{x})$.

ii) On peut supposer que Ω est contenu dans la bande $0\le x_1\le d$. On pose (avec $\alpha\ge 0$ à choisir) :

$$g(x)=e^{\alpha d}-e^{\alpha x_1}\,.$$

On a

$$Pg=-(a_{11}\alpha^2+b_1\alpha)e^{\alpha x_1} \;\text{ et }\; Pg(x)\le -(a_{11}(x)\alpha^2+b_1\alpha)\,.$$

On peut donc choisir α de sorte que $Pg(x)\le -1$ pour tout $x\in\Omega$. Posons $v(x)=\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+g(x)\,\|Pu\|_{L^\infty(\Omega)}$. On a :

$$u(x)\le v(x)\;\text{ pour } x\in\partial\Omega \quad ; \quad Pu(x)\ge Pv(x)\,.$$

D'après le théorème 8.3.1, on a $u-v\le 0$, et

$$u(x)\le \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|g\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|Pu\|_{L^\infty(\Omega)}\,.$$

De même, on a $-u\le v$, et le théorème suit. □

Remarque. — La démonstration du point ii) montre clairement que la constante $C=\|g\|_{L^\infty}e^{\alpha d}$ ne dépend que de d ($\sim$ diamètre de Ω) et de α, le choix de α ne faisant intervenir que le maximum des b_j et la constante c_0 de (8.2.1).

8.4. Problèmes aux limites linéaires

On considère à nouveau un ouvert borné Ω de classe $C^{2+\mu}$ $(0<\mu<1)$, et un opératuer différentiel d'ordre deux, à coefficients dans $C^\mu(\overline{\Omega})$,

$$P=\sum_{1\le j,k\le n} a_{j,k}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{1\le j\le n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+c(x)\,. \tag{8.4.1}$$

On supposera P elliptique, i.e. vérifiant (8.2.1). On admettra (pour le moment) le résultat suivant, où l'on note

$$\Delta=\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\,.$$

Théorème 8.4.1. — *Pour tout $f\in C^\mu(\overline{\Omega})$, le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases}\Delta u=f & \textit{dans } \Omega\,,\\ \gamma_0 u=0 & \textit{sur } \partial\Omega\,,\end{cases}$$

possède une unique solution dans $C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$.

Remarque. — L'unicité résulte du principe du maximum. On établit aisément l'existence d'une solution “faible” ou “généralisée” dans l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, et le théorème 8.4.1 est en fait un résultat de régularité qui établit que la solution faible est une solution dans $C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$.

Théorème 8.4.2. — *Supposons que le coefficient $c(x)$ de l'opérateur P* (8.4.1) *est ≤ 0. Alors, pour tout $f\in C(\overline{\Omega})$, le problème (de Dirichlet)*

$$\begin{cases}Pu=f & \textit{dans } \Omega\,,\\ \gamma_0 u=0 & \textit{sur } \partial\Omega\,,\end{cases}$$

possède une unique solution dans $C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$.

Démonstration. — Considérons pour $t\in[0,1]$ l'opérateur

$$P_t=tP+(1-t)\Delta\,. \tag{8.4.2}$$

P_t a la forme (8.4.1) avec des coefficients $a_{j,k,t}=ta_{j,k}+(1-t)\delta_{j,k}$, $b_{j,t}=tb_j$, $c_t=tc$, dont les normes dans $C^\mu(\overline{\Omega})$ sont bornées uniformément en t. En outre, d'après (8.2.1) on a :

$$\sum_{1\le j,k\le n} a_{j,k,t}(x)\xi_j\xi_k\ge tc_0|\xi|^2+(1-t)|\xi|^2\ge c_1|\xi|^2\,,$$

avec $c_1=\min(1,c_0)$. Il résulte alors de l'inégalité de Schauder (théorème 8.2.1, voir aussi la remarque après la preuve de ce théorème) qu'il existe une constante C telle que pour tout $t\in[0,1]$ et tout $u\in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ vérifiant $\gamma_0u=0$, on ait :

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})}\le C\left(\|P_tu\|_{C^\mu(\overline{\Omega})}+\|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})}\right)\,. \tag{8.4.3}$$

Par ailleurs, d'après le théorème 8.3.2 (voir la remarque après la démonstration), il existe C' telle que pour tout $t\in[0,1]$ et toute fonction $u\in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ vérifiant $\gamma_0u=0$, on ait :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\le C'\,\|P_tu\|_{L^\infty(\Omega)}\,. \tag{8.4.4}$$

En outre (cf lemmes 8.1.1 et 8.1.4), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe C_ε tel que pour tout $u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ on ait :

$$\|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon \|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} + C_\varepsilon \|u\|_{L^\infty(\Omega)} .$$

Choisissant $\varepsilon = 1/(2C)$ et reportant dans (8.4.3), on obtient, compte tenu de (8.4.4) qu'il existe une constante C'' telle que pour $t \in [0,1]$ et $u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ vérifiant $\gamma_0 u = 0$, on ait :

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} \leq C'' \|P_t u\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} . \tag{8.4.5}$$

Notons F l'espace de Banach $C^\mu(\overline{\Omega})$ et E l'espace $\{u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega}) / \gamma_0 u = 0\}$, et L_t l'application linéaire continue de E dans F définie par $L_t u = P_t u$.

Désignons par I l'ensemble des $t \in [0,1]$ tels que l'opérateur L_t soit surjectf de E sur F. D'après le théorème 8.4.1, $0 \in I$. Pour $t_0 \in I$, l'opérateur L_{t_0} est injectif d'après (8.4.5), donc bijectif et d'après (8.4.5), son inverse $R_{t_0} = L_{t_0}^{-1}$ est de norme majorée par C''.

On a $(L_t - L_{t_0})u = (t - t_0)(Pu - \Delta u)$ et la norme de $L_t - L_{t_0}$, opérant de E dans F, est majorée par $|t - t_0|\tilde{C}$. Par conséquent, pour $|t - t_0| \leq \frac{1}{2}(C''\tilde{C})^{-1}$, la série

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} R_{t_0} \left((L_t - L_{t_0}) R_{t_0}\right)^k$$

est normalement convergente et définit un opérateur borné de F dans E. On vérifie immédiatement que $L_t R f = f$ pour $f \in F$ et que $R L_t u = u$ pour $u \in E$. Notant $\delta = \frac{1}{2}(C''\tilde{C})^{-1}$, ceci montre que si $t_0 \in I$, l'intervalle $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0,1]$ est tout entier dans I, et puisque $0 \in I$, on voit alors que $I = [0,1]$, et le théorème 8.4.2 est démontré. □

Sans faire d'hypothèse sur $c(x)$, on a :

Théorème 8.4.3. — *Il existe une suite au plus dénombrable de nombres complexes λ_k, $|\lambda_k| \to \infty$, tels que :*

1. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ n'est pas dans la suite $(\lambda_k)_k$, le problème*

$$\begin{cases} Pu - \lambda u = f , \\ \gamma_0 u = 0 , \end{cases} \tag{8.4.6}$$

possède pour tout $f \in C^\mu(\overline{\Omega})$ une unique solution dans $C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$.

2. *Si λ est un élément de la suite $(\lambda_k)_k$, l'espace des solutions dans $C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ de*

$$\begin{cases} Pu - \lambda u = 0 , \\ \gamma_0 u = 0 , \end{cases}$$

est de dimension finie, et le problème (8.4.6) *possède des solutions si et seulement si f est dans un espace de dimension finie.*

Démonstration. — Fixons $\rho = \|c\|_{L^\infty(\Omega)}$. On peut appliquer le théorème 8.4.2 à l'opérateur $P - \rho$, et il existe un opérateur R continu de $F = C^\mu(\overline{\Omega})$ dans $E = \{u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega}) / \gamma_0 u = 0\}$ tel que $(P - \rho)Rf = f$ pour $f \in F$ et $R(P - \rho)u = u$ pour $u \in E$.

Le problème de l'existence ou de l'unicité des solutions de (8.4.6) est alors équivalent , en posant $u = Rv$, au problème de l'existence ou de l'unicité des solutions de

$$v + (\rho - \lambda)Rv = f . \tag{8.4.7}$$

L'opérateur R est borné de F dans F (puisque $E \subset F$) et est *compact* puisque la boule unité de $C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ est compacte dans F. Par conséquent son spectre est constitué de 0 et d'une suite au plus dénombrable de nombres $\mu_k \neq 0$, $\mu_k \to 0$ si la suite est infinie. Alors si l'on note Λ la suite des $\lambda_k = \rho + 1/\mu_k$, pour $\lambda \notin \Lambda$, le problème (8.4.7) a une unique solution pour tout $f \in C^\mu(\overline{\Omega})$, et il en est de même du problème (8.4.6).

Pour $\lambda \in \Lambda$, l'espace des solutions de $v + (\rho - \lambda)Rv = 0$ est de dimension finie et l'image de $\mathrm{Id} + (\rho - \lambda)R$ est de codimension finie. Il en est alors de même pour le problème (8.4.6). □

8.5. Un exemple de problème non linéaire

À titre d'exemple, nous allons étudier dans ce paragraphe une équation de la forme :

$$Lu \equiv \sum_{1 \leq j,k \leq n} a_{j,k}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 . \tag{8.5.1}$$

Les $a_{j,k}$ sont supposées de classe $C(\overline{\Omega})$ sur un ouvert Ω borné, à bord de classe $C^{2+\mu}$. On supposera que la condition d'ellipticité (8.2.1) est satisfaite. La fonction $f(x, u, p)$ définie sur $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sera supposée vérifier les propriétés suivantes :

1. Pour tout $R > 0$, il existe C_R tel que pour tous $(x, x') \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, $(p, p') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(u, u') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $|u| \leq R$ et $|u'| \leq R$, on ait :

$$\left|f(x, u, p) - f(x', u', p')\right| \leq C_R \left(|x - x'|^\mu + |p - p'| + |u - u'|\right) . \tag{8.5.2}$$

2. Les dérivées partielles d'ordre deux en u et p de f existent, sont continues et vérifient des inégalités semblables à (8.5.2). En outre, $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u, p) \leq 0$.
3. Il existe M tel que pour tout $x \in \overline{\Omega}$, tout $u \in \mathbb{R}$, $|u| > M$, on ait $uf(x, u, 0) < 0$.

Exemple. — $L(u) = -u - u^3 + f(x) + \Delta u$.

Théorème 8.5.1. — *Sous les hypothèse précédentes, l'équation*

$$\begin{cases} L(u) = 0 & \textit{dans } \Omega \,, \\ \gamma_0 u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

possède au moins une solution $C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$.

On introduit un paramètre $t \in [0, 1]$ en considérant le problème :

$$\begin{cases} L_t(u) \equiv \displaystyle\sum_{1 \leq j,k \leq n} a_{j,k}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + t\, f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \,, \\ \gamma_0 u = 0 \,. \end{cases} \tag{8.5.3}$$

On note I l'ensemble des $t \in [0, 1]$ tels que (8.5.3) admette une solution dans $C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$. Alors $0 \in I$ ($u = 0$ est solution pour $t = 0$). On démontre alors le théorème 8.5.1 en prouvant que I est ouvert et fermé.

Lemme 8.5.2. — *Il existe une constante C telle que pour tout $t \in [0, 1]$, toute solution de* (8.5.3) *(si elle existe) vérifie :*

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} \leq C \,.$$

Corollaire 8.5.3. — *I est fermé.*

Preuve du lemme 8.5.2. — On établit d'abord que toute solution de (8.5.3) vérifie $\|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq M$, où M est donné à la condition 3.

En effet, si $\max u(x) > 0$, le maximum de u est atteint en un point $\hat{x} \in \Omega$. En ce point, $\partial_j u(\hat{x}) = 0$ et $\sum a_{j,k}\partial^2_{jk}u(\hat{x}) \leq 0$. On a donc :

$$t\, f\,(\hat{x}, u(\hat{x}), 0) \geq 0\,,$$

et puisque $u(\hat{x}) > 0$, $u(\hat{x}) f\,(\hat{x}, u(\hat{x}), 0) \geq 0$, ce qui ne peut être vrai que si $u(\hat{x}) \leq M$, d'après la condition 3. De même, si $\min u(x) < 0$, on montre que $\min u(x) \geq -M$. On a donc pour toute solution de (8.5.3),

$$\|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq M\,. \tag{8.5.4}$$

Maintenant, pour $|u| \leq M$, on a d'après (8.5.2) :

$$|f(x, u, p)| \leq |f(x_0, 0, 0)| + C_M\,(|x - x_0|^\mu + M + |p|)$$
$$\text{et}\ \ \|f\,(x, u(x), \nabla u(x))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq A + B\,\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

si $u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ vérifie (8.5.4). Utilisant (8.5.2), on voit aussi que :

$$\|f\,(x, u(x), \nabla u(x))\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} \leq A' + B'\,\|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})}$$

et, en raison des inégalités de Schauder, on voit que si u est solution de (8.5.3), on a (8.5.4) et

$$\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} \leq C_0\left(A' + B'\right)\|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})}\,. \tag{8.5.5}$$

Utilisant à nouveau les inégalités

$$\|u\|_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon\,\|u\|_{C^{2+\mu}(\overline{\Omega})} + C_\varepsilon \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\,,$$

et (8.5.4), le lemme résulte de (8.5.5). □

Preuve du corollaire 8.5.3. — Soit t_k une suite de points de I convergeant vers $\hat{t} \in [0,1]$. On montre que $\hat{t} \in I$. En effet, il existe $u_k \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ solution de (8.5.3) pour $t = t_k$. D'après le lemme, la suite u_k est bornée dans $C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$ et, avec le lemme 8.1.4, on déduit qu'il existe une sous-suite k_j telle que u_{k_j} converge dans $C^{2+\mu'}(\overline{\Omega})$ $(0 < \mu' < \mu)$ vers une fonction $\hat{u} \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$. Les convergences étant uniformes, il suffit de passer à la limite point par point dans (8.5.3) pour voir que $\hat{u}$ est solution de (8.5.3) pour $t = \hat{t}$. □

Notons $E = \{u \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})\,/\,\gamma_0 u = 0\}$ et $F = C^\mu(\overline{\Omega})$. L'application $(t, u) \mapsto L_t(u)$ est continue de $[0,1] \times E$ dans F et

Lemme 8.5.4. — *L'application $u \mapsto L_t(u)$ est différentiable en tout point $u_0 \in C^{2+\mu}(\Omega)$, et sa différentielle est un isomorphisme de E sur F.*

Démonstration. — On notera $p_0 = u$ de sorte que $p = (u, p_1, \ldots, p_n)$ sera la variable de $\mathbb{R}^{n+1}$. Considérons $w(x) = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ et $h(x) = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$ deux fonctions de classe $C^\mu(\overline{\Omega})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On a

$$f\,(x, w(x) + h(x)) - f\,(x, w(x)) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_j}\,(x, w(x))\,h_j(x) +$$
$$+ \sum_{j,k}\left(\int_0^1 (1-s)\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_k}\,(x, w(x) + s\,h(x))\,ds\right) h_j(x) h_k(x)\,.$$

Puisque les dérivées secondes de f vérifient (8.5.2) par hypothèse, les intégrales ci-dessus définissent des fonctions de $C^\mu(\overline{\Omega})$ dont la norme est bornée si celles de w et h le sont. On a donc :

$$\left\| f(x, w+h) - f(x,w) - \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_j}\,(x, w(x))\, h_j \right\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} \leq C\, \|h\|^2_{C^\mu(\overline{\Omega})} \, .$$

On en déduit immédiatement que pour $v \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$,

$$\|L_t(u_0 + v) - L_t(u_0) - P_t(u_0)\cdot v\|_{C^\mu(\overline{\Omega})} \leq C\, \|v\|^2_{C^{1+\mu}(\overline{\Omega})} \, ,$$

où $P_t(u_0)$ est l'opérateur différentiel

$$P_t(u_0)\cdot v = \sum_{1\leq j,k\leq n} a_{j,k} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_j}\,(x, u_0, \nabla u_0)\, \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial u}\,(x, u_0, \nabla u_0)\, v \, .$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial u} \leq 0$, il suffit d'appliquer le théorème 8.4.2, pour conclure que $P_t(u_0)$ est un isomorphisme de E sur E. □

Corollaire 8.5.5. — *I est ouvert.*

Démonstration. — Soit $t_0 \in I$; il existe $u_0 \in E$ tel que $L_{t_0}(u_0) = 0$. Le lemme 8.5.4 permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites, et celui-ci implique qu'il existe un voisinage de t_0 et une application de ce voisinage dans E, $t \mapsto u_t$, telle que $L_t(u_t) = 0$. Ce voisinage de t_0 est donc tout entier dans I, et le corollaire est démontré, ainsi que le théorème 8.5.1. □

8.6. Un théorème de régularité à l'intérieur

Dans ce paragraphe, considérons un opérateur elliptique

$$P = \sum_{1\leq j,k\leq n} a_{j,k}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{1\leq j\leq n} b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x) \, , \tag{8.6.1}$$

les $a_{j,k}$ étant de classe $C^{1+\mu}$ sur un ouvert Ω, les b_j et c étant de classe C^μ.

Notons que l'action de P sur un élément de $W^{1,p}(\Omega)$ est parfaitement définie ; pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\partial_j u \in L^p(\Omega)$, les produits $b_j \partial_j u$, cu sont définis dans $L^p(\Omega)$ et $a_{j,k}\partial^2_{jk} u$ est défini au sens des distributions :

$$\left\langle a_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\,(a_{j,k}\varphi) \, .$$

(Noter que $\partial_j(a_{j,k}\varphi)$ est une fonction continue pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ puisque $a_{j,k}$ est de classe C^1).

On pourra écrire aussi :

$$P = \sum_{1\leq j,k\leq n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{j,k}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{1\leq j\leq n} b'_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x) \, , \tag{8.6.2}$$

avec $b'_j = b_j - \sum_k \partial_k a_{j,k} \in C^\mu(\Omega)$.

Théorème 8.6.1. — *i) Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est tel que $Pu \in L^p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$, alors $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*
ii) Si $u \in C^{1+\mu'}(\Omega)$ est tel que $Pu \in C^{\mu'}(\Omega)$ $(0 < \mu' \leq \mu)$, alors $u \in C^{2+\mu'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Démonstration. — Le résultat étant purement local, on va montrer que pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage ω de x_0 et une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, valant 1 autour de x_0, tels que $\varphi u \in W^{2,p}$ (ou $C^{2+\mu'}$).

Par ailleurs on fera la démonstration pour les espaces $W^{k,p}$, la démonstration dans les espaces C^μ étant complètement analogue et laissée en exercice.

Le point x_0 étant fixé (on supposera $x_0 = 0$), on introduit les opérateurs :

$$P_r = \sum a_{j,k}(x_0) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{r^2} .$$

(r paramètre réel, $0 < r \leq 1$). Le symbole de P_r est :

$$p_r(\xi) = -\left(\sum a_{j,k}(x_0)\xi_j\xi_k + \frac{1}{r^2}\right) ,$$

et comme on l'a vu (voir la preuve du Théorème 7.2.4), l'ellipticité de P implique que les fonctions $\xi^\alpha / p_r(\xi)$ ($|\alpha| \leq 2$) vérifient :

$$\left|\partial_\xi^\beta \left(\frac{\xi^\alpha}{p_r(\xi)}\right)\right| \leq C_\beta r^{2-|\alpha|} \left(|\xi|^2 + 1\right)^{-|\beta|} .$$

Notant E_r la distribution de type 0, transformée de Fourier inverse de $1/p_r(\xi)$, on voit alors qu'il existe une constante C_0 telle que pour tout $r \in]0,1]$ et tout $u \in L^p$, on ait pour $|\alpha| \leq 2$:

$$r^{|\alpha|-2} \left\| \partial^\alpha E_r * u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \left\| u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \tag{8.6.3}$$

On notera que les opérateurs de convolution $u \mapsto E_r * u = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}(\xi)/p_r(\xi))$ sont définis de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Puisque $E * \partial_j u = \partial_j(E * u)$, on a aussi, pour $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $r \leq 1$ et $|\alpha| \leq 1$:

$$r^{|\alpha|-1} \left\| \partial^\alpha E_r * \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \left\| u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \tag{8.6.4}$$

On munit $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ des normes suivantes :

$$\left\| u \right\|_{W_r^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq k} r^{|\alpha|-k} \left\| D^\alpha u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} , \tag{8.6.5}$$

et alors, (8.6.3) et (8.6.4) se réécrivent :

$$\begin{aligned} &\left\| E_r * u \right\|_{W_r^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \left\| u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} , \\ &\left\| E_r * \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{W_r^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \left\| u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \end{aligned} \tag{8.6.6}$$

À partir de (8.6.4), on écrit :

$$\begin{aligned} & P - P_r = Q + R_r , \\ \text{avec} \quad & Q = \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{j,k}(x) - a_{j,k}(x_0)\right) \frac{\partial}{\partial x_j} , \\ \text{et} \quad & R_r = \sum_j b'_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c + \frac{1}{r^2} . \end{aligned}$$

Pour $u \in W^{1,p}_{\mathrm{comp}}(\Omega)$, on a (par Fourier) $u = E_r * P_r u$, d'où l'on tire que :

$$u + E_r * Qu = E_r * Pu - E_r * R_r u \,. \tag{8.6.7}$$

(Les convolutions sont bien définies puisque Pu, Qu et $R_r u$ sont des distributions à support compact).

Les coefficients $a_{j,k}(x) - a_{j,k}(x_0)$ étant de classe C^1 et nuls en x_0, on vérifie immédiatement que :

$$\|(a_{j,k}(\cdot) - a_{j,k}(x_0))\, v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 r \,\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \;, \tag{8.6.8}$$

si $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ est à support dans la boule ω_r de centre x_0 et de rayon r.

Introduisons maintenant une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule de centre 0 et de rayon 1, valant 1 sur la boule de rayon 1/2. Pour $r \leq 1$, on pose alors $\varphi_r(x) = \varphi\left(\frac{x-x_0}{r}\right)$. Tout l'intérêt de l'introduction des normes (8.6.5) est qu'il existe C_2 indépendante de r telle que pour $k = 0,\, 1,\, 2$:

$$\|\varphi_r u\|_{W^{k,p}_r(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \,\|u\|_{W^{k,p}_r(\mathbb{R}^n)} \;. \tag{8.6.9}$$

Avec (8.6.8) et (8.6.6), on obtient alors :

$$\|E_r * Q\varphi_r u\|_{W^{1,p}_r(\mathbb{R}^n)} \leq n^2 C_0 C_1 C_2 r \,\|u\|_{W^{1,p}_r(\mathbb{R}^n)} \;. \tag{8.6.10}$$

Écrivant $Q = \sum (a_{j,k}(x) - a_{j,k}(x_0)) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum \frac{\partial a_{j,k}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$, on a aussi : en notant $C_3 = \max_{j,k} \left\| \frac{\partial a_{j,k}}{\partial x_k} \right\|_{L^\infty(\omega_1)}$,

$$\|Q\varphi_r u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq n^2 C_1 C_2 r \,\|u\|_{W^{2,p}_r(\mathbb{R}^n)} + n^2 C_3 C_2 \,\|u\|_{W^{1,p}_r(\mathbb{R}^n)} \;.$$

Grâce à la définition (8.6.5), on a $\|u\|_{W^{1,p}_r} \leq r\,\|u\|_{W^{2,p}_r}$, et par conséquent on a les estimations suivantes :

$$\|E_r * Q\varphi_r u\|_{W^{2,p}_r(\mathbb{R}^n)} \leq n^2 C_0 C_2 (C_1 + C_3) r \,\|u\|_{W^{2,p}_r(\mathbb{R}^n)} \;. \tag{8.6.11}$$

Maintenant on **fixe** $r = \frac{1}{2}\left(n_2 C_0 C_2 (C_1 + C_3)\right)^{-1}$, et on note A l'opérateur $u \mapsto Au = E_r * Q\varphi_r u$. A est borné de $W^{k,p}_r(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{k,p}_r(\mathbb{R}^n)$ ($k = 1$ ou 2) et de norme $\leq 1/2$, d'après (8.6.10) et (8.6.11). Par conséquent l'opérateur $I + A$ est inversible, son inverse $B = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} (-A)^j$ est borné (de norme ≤ 2) de $W^{k,p}_r(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même ($k = 1$ ou 2).

Considérons maintenant une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ telle que $f = Pu \in L^p(\Omega)$. Pour $\psi \in C_0^\infty(\omega_{r/2})$, on a $\varphi_r \psi = \psi$; appliquant (8.6.7) à la fonction ψu, on obtient :

$$\psi u + A\psi u = E_r * P\psi u - E_r * R_r \psi u = g \,.$$

On a $P\psi u = \psi P u + [P, \psi] u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ puisque $Pu \in L^p(\mathbb{R}^n)$, que $[P, \psi]$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 et que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. De même la forme de R_r montre que $\mathbb{R}_r \psi u \in L^p$. Il en résulte, avec (8.6.6), que $g = E_r * (P\psi u - R_r \psi u) \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$.

Mais, puisque $\psi u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et que $(I + A)\psi u = g$, on a $u = Bg$, et puisque B est aussi borné de $W^{2,p}_r$ dans $W^{2,p}_r$, on a $\psi u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, et le théorème 8.6.1 est démontré. □

Lemme 8.6.2. — *i) Si* $p < n$, $W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ *pour* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.
ii) $W^{2,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $q < +\infty$.
iii) Si $p > n$, $W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{1+\mu}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *pour* $\mu < 1 - \frac{n}{p}$.

Démonstration. — Le premier point a été démontré dans le lemme 7.1.5, en écrivant que

$$u = \sum_{j=1}^{n} T_j * \frac{\partial u}{\partial x_j} \,,$$

où les T_j sont de la forme $c \cdot \frac{x_j}{|x|^n}$.

Pour montrer *ii*), il faut montrer que pour $u \in W^{2,n}$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a $\varphi u \in W^{1,q}$ pour tout $q < +\infty$. Or $\varphi u \in W^{2,n}_{\mathrm{comp}} \hookrightarrow \varphi u \in W^{2,p}_{\mathrm{comp}}$ pour tout $p < n$. Appliquant *i*), on obtient que $\varphi u \in W^{1,q}$ pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, pour tout $p < n$, c'est-à-dire pour tout $q < +\infty$.

Pour montrer *iii*), il suffit de montrer que pour $u \in L^p_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ $(p > n)$, on a $T_j * u \in C^\mu_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Puisque $T_j \in L^q_{\mathrm{loc}}$ pour $q < \frac{n}{n-1}$ et que p', l'exposant conjugué de p, vérifie $p' < \frac{n}{n-1}$ pour $p > n$, on voit que $T_j * u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}$. Ensuite on écrit que :

$$\left| \frac{x_j}{|x|^n} - \frac{x'_j}{|x'|^n} \right| \lesssim |x - x'|^\mu \left(\frac{1}{|x|^{n-1+\mu}} + \frac{1}{|x'|^{n-1+\mu}} \right) ,$$

d'où l'on déduit que :

$$\big|(T_j * u)(x) - (T_j * u)(x')\big| \lesssim |x - x'|^\mu \left(\int \frac{|u(y)|}{|x-y|^{n-1+\mu}} dy + \int \frac{|u(y)|}{|x'-y|^{n-1+\mu}} dy \right) .$$

Pour $\mu < 1 - \frac{n}{p}$, $\frac{1}{|x|^{n-1+\mu}} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}$ et ces dernières intégrales sont, pour $u \in L^p_{\mathrm{comp}}$, bornées uniformément en x et x', pourvu que x et x' restent dans un compact. □

Revenant à l'opérateur (8.6.1), P, on a le résultat suivant :

Théorème 8.6.3. — *Soit $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ tel que $Pu \in C^\mu_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Alors $u \in C^{2+\mu}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Démonstration. — Supposons d'abord que $p \leq n$. D'après le théorème 8.6.1, $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et d'après le lemme 8.6.2, $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ si $p < n$, et q fini quelconque si $p = n$. Par récurrence sur $k \leq n/p$, on voit alors que $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ si $k < n/p$, et pour q fini quelconque si $k = n/p$. Finalement il existe toujours $q > n$ tel que $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Mais alors $u \in W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et d'après le lemme 8.6.2, $u \in C^{1+\mu'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ avec $0 < \mu' < 1\frac{n}{q}$. Si $\mu' < \mu$, puisque $Pu \in C^\mu_{\mathrm{loc}} \subset C^{\mu'}_{\mathrm{loc}}$, $u \in C^{2+\mu'}_{\mathrm{loc}}$ d'après le théorème 8.6.1, et a fortiori $u \in C^{1+\mu}_{\mathrm{loc}}$. Si $\mu' \geq \mu$, on a aussi $u \in C^{1+\mu}_{\mathrm{loc}}$. Puisque $Pu \in C^\mu_{\mathrm{loc}}$, appliquant une dernière fois le théorème 8.6.1, on conclut que $u \in C^{2+\mu}_{\mathrm{loc}}$. □

CHAPITRE 9

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

9.1. Symboles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ ($m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \delta \leq 1$) l'espace des fonctions $p(x,\xi)$ C^∞ sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ telles que : pour tout compact $K \subset \Omega$, tous multiindices α et $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe C telle que pour $(x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n$, on ait :

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)\right| \leq C_{K,\alpha,\beta} \left(1 + |\xi|\right)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|} . \tag{9.1.1}$$

Un élément de $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ est appelé un symbole (sur Ω) de degré m et de type (ρ,δ). Dans la suite du cours, on n'utilisera guère que des symboles de types $(1,0)$ ou $(1,1)$.

Exemple. — On a déjà vu intervenir au chapitre 7 des symboles indépendants de x (de type $(1,0)$). Ils étaient de la forme $\frac{1}{|p(\xi)|^2+1}$, p étant un polynôme elliptique.

Exemple. — Si $p(\xi)$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, homogène de degré m, et si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 autour de 0, $(1-\varphi(\xi))p(\xi)$ est un symbole de degré m (type $(1,0)$).

Exemple. — Si p est la transformée de Fourier d'une distribution régulière, de type 0, alors p vérifie (cf Théorème 4.4.4) :

$$\left|\partial_\xi^\alpha p(\xi)\right| \leq C_\alpha |\xi|^{-\alpha} ,$$

et $q(\xi) = (1-\varphi(\xi))p(\xi)$ est un symbole de degré 0, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 autour de 0 comme dans l'exemple précédent.

9.2. Opérateurs

Soit $p \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$. On cherche à définir un opérateur par la formule :

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi . \tag{9.2.1}$$

Si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et l'intégrale (9.2.1) est absolument convergente. En outre, les dérivées $\partial_x^a \left(e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\right)$ sont toutes intégrables (grâce à (9.1.1) et à la décroissance rapide de $\widehat{u}$). On peut donc dériver sous le signe somme et on a :

Lemme 9.2.1. — *La formule* (9.2.1) *définit un opérateur linéaire continu de* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *dans* $C^\infty(\Omega)$.

Remarque. — Si $P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ est unopérateur différentiel à coefficients $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, alors le “symbole”

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

est un symbole de $S^m_{1,0}(\Omega)$ et on a bien :

$$P(x, D_x) u(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \left(D^\alpha u\right)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi$$

pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 9.2.2. — *Soit $p \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, avec $\delta < 1$. Alors il existe un (unique) opérateur P, continu de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tel que Pu soit donné par la formule* (9.2.1) *lorsque $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. — L'unicité résulte de la continuité de P, et de la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

On rappelle que si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ (l'ordre de u) tel que :

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C \left(1 + |\xi|\right)^N . \tag{9.2.2}$$

Prenons $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Nous allons transformer l'expression :

$$\langle Pu, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{ix\cdot\xi} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \varphi(x) dx d\xi \, . \tag{9.2.3}$$

(Noter que l'intégrale converge absolument.) On écrit que :

$$(1 - \Delta_x) \left(e^{ix\cdot\xi}\right) = \left(1 + |\xi|^2\right) e^{ix\cdot\xi} \, ,$$

et donc que :

$$e^{ix\cdot\xi} = (1 - \Delta_x) \left(\frac{e^{ix\cdot\xi}}{1 + |\xi|^2}\right) .$$

On reporte dans l'expression (9.2.3) et on intègre par parties, ce qui est justifié puisque toutes les intégrales convergent absolument. On trouve :

$$\langle Pu, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{ix\cdot\xi} \frac{\widehat{u}(\xi)}{1 + |\xi|^2} (1 - \Delta_x) \left(p(x, \xi) \varphi(x)\right) dx d\xi \, .$$

Itérant l'opération, on voit que si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, la fonction Pu définie par (9.2.1) vérifie, pour **tout entier** k :

$$\langle Pu, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{ix\cdot\xi} \frac{\widehat{u}(\xi)}{\left(1 + |\xi|^2\right)^k} (1 - \Delta_x)^k \left(p(x, \xi) \varphi(x)\right) dx d\xi \, . \tag{9.2.4}$$

Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ d'ordre N (vérifiant (9.2.2)). On choisit $k \geq (m+N+n+1)/2(1-\delta)$. D'après les inégalités (9.1.1), on a :

$$\left|(1 - \Delta_x)^k \left(p(x, \xi) \varphi(x)\right)\right| \leq C \left(1 + |\xi|\right)^{m+2k\delta} \|\varphi\|_{C^{2k}(\Omega)} \, , \tag{9.2.5}$$

la constante C ne dépendant que de k et du support de φ. On remarque alors que l'intégrale

$$\int \frac{\widehat{u}(\xi)}{\left(1 + |\xi|^2\right)^k} \left(1 + |\xi|\right)^{m+2k\delta} d\xi$$

converge (compte tenu de (9.2.2)) pour $k \geq (m+N+n+1)/2(1-\delta)$. On peut alors **définir** la distribution Pu par la formule (9.2.4), l'intégrale étant absolument convergente, et Pu est bien une distribution puisque d'après (9.2.5), on a :

$$|\langle Pu, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{C^{2k}(\Omega)}\,,$$

la constante ne dépendant que du support de φ. □

9.3. Noyaux distributions

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts. À toute distribution $A \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$, on fait correspondre un opérateur continu de $C_0^\infty(\Omega_2)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$: pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_2)$, $A\varphi$ est la distribution sur Ω_1 qui est définie par la formule :

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega_1), \quad \langle A\varphi, \psi\rangle = \langle A, \psi \otimes \varphi\rangle\ . \tag{9.3.1}$$

où $\psi \otimes \varphi$ désigne la fonction de $C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ définie par $(\psi \otimes \varphi)(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$.

Inversement, le théorème des noyaux de L. Schwartz affirme que tout opérateur de $C_0^\infty(\Omega_2)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ est associé à une (unique) distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, qu'on appelle le noyau de l'opérateur.

Très abusivement on notera parfois $A(x,y)$ un noyau sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ (une distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$) et très symboliquement on écrira :

$$A\varphi(x) = \int A(x,y)\varphi(y)dy \tag{9.3.2}$$

la distribution dont la définition correcte est (9.3.1). Bien entendu, quand le noyau A est dans $L^1_{loc}(\Omega_1, \Omega_2)$, les définitions (9.5.1) et (9.3.2) sont identiques.

Lemme 9.3.1. — *Soit $p \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, avec $m < -n$. Alors le noyau distribution de P est la fonction*

$$A(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi}p(x,\xi)d\xi\,. \tag{9.3.3}$$

En outre, si $m+k < -n$ ($k \in \mathbb{N}$), le noyau A est de classe C^k.

Remarque. — Puisque $m < -n$ et que $|p(x,\xi)| \lesssim (1+|\xi|)^m$, l'intégrale de (9.3.3) converge absolument et définit bien une fonction continue.

Démonstration. — Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi}\varphi(y)dy\,,$$

et reportant dans (9.2.1) on voit que :

$$P\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}p(x,\xi)\varphi(y)dyd\xi\,,$$

l'intégrale double étant absolument convergente puisque $m < -n$. Au sens des intégrales convergentes, on a bien :

$$P\varphi(x) = \int A(x,y)\varphi(y)dy\,,$$

et A est le noyau de P. Avec (9.1.1), on voit que l'on peut dériver k fois sous le signe somme, si $m+k < -n$ et alors A est une fonction de classe C^k. □

Lorsque $m \geq n$, on peut donner un sens symbolique à l'intgrale (9.3.3), essentiellement comme une transformée de Fourier : pour tout $x \in \Omega$, la fonction $\xi \mapsto p(x,\xi)$ est C^∞ et à croissance lente ; on peut donc définir sa transformée inverse de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On obtient donc une application (C^∞) $x \mapsto \mathcal{F}^{-1}p(x,\cdot)$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et $\mathcal{F}^{-1}p$ apparait aussi comme une distribution sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$:

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}p, \varphi \otimes \psi \right\rangle = \int \mathcal{F}^{-1}p(x,z)\varphi(x)\psi(z)dxdz = \int p(x,\xi)\varphi(x)\mathcal{F}^{-1}\psi(\xi)dxd\xi\,.$$

(La première intégrale a un sens symbolique, la seconde est bien convergente.)

On définit alors $A(x,y) = \mathcal{F}^{-1}p(x,x-y)$, c'est-à-dire :

$$\langle A, \varphi \otimes \psi \rangle = \left\langle \mathcal{F}^{-1}p(x,z), \varphi(x)\psi(x-z) \right\rangle\ ,$$

et puisque $\mathcal{F}_z^{-1}\psi(x-z) = (2\pi)^{-n}\int e^{i(x-z)\cdot\xi}\widehat{\psi}(\xi)d\xi$, on voit bien que

$$\langle A, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle P\psi, \varphi \rangle\ ,$$

c'est-à-dire que A est le noyau distribution de P.

Théorème 9.3.2. — *Si $\rho > 0$ et si $p \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, le noyau $A(x,y)$ de P est C^∞ pour $x \neq y$.*

Démonstration. — Il revient au même de dire que la distribution $B(x,z) = \mathcal{F}_\xi^{-1}p(x,z)$ est C^∞ pour $z \neq 0$. Nous allons montrer que la distribution $z^\alpha B(x,z)$ est de classe C^k si $|\alpha| \geq (m+k+n+1)/\rho$.

En fait, on a $z^\alpha B(x,z) = (-1)^{|\alpha|}\mathcal{F}^{-1}D_\xi^\alpha p$, et avec (9.1.1) on voit que

$$\left|\xi^\gamma \partial_x^\beta D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| \leq C\left(1+|\xi|\right)^{m-\rho|\alpha|+|\gamma|+|\beta|}\ ,$$

ce qui montre que $\xi^\gamma \partial_x^\beta D_\xi^\alpha p$ est intégrable si $|\alpha| \geq (m+|\beta|+|\gamma|+n+1)/\rho$, et donc que $D_z^\gamma D_x^\beta z^\alpha B(x,y)$ est alors une fonction continue. □

Corollaire 9.3.3. — *Si $\rho > 0$, $\delta < 1$ et si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est C^∞ sur un ouvert $\omega \subset \Omega$, alors Pu est aussi C^∞ sur ω.*

Démonstration. — Soit $x_0 \in \omega$; il suffit de montrer que Pu est C^∞ autour de x_0. Soit $\psi \in C_0^\infty(\omega)$ qui vaut 1 autour de x_0 (disons pour $|x-x_0| < r$). Alors :

$$Pu = P\varphi u + P(1-\varphi)u\,.$$

$\varphi u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $P\varphi u \in C^\infty(\Omega)$. Il nous reste à montrer que $P(1-\varphi)u$ est C^∞ pour $|x-x_0| < r/2$. Pour ψ à support dans la boule de centre x_0 et de rayon $r/2$, on a :

$$\langle P(1-\varphi)u, \psi \rangle = \langle A(x,y), \psi(x)(1-\varphi)u(y) \rangle\ . \tag{9.3.4}$$

Mais pour $|x-x_0| \leq r/2$ et y dans le support de $(1-\varphi)u$, on a $|x-y| \geq r/2$, et $A(x,y)$ est une fonction C^∞ de (x,y). Il en résulte que :

$$v(x) = \langle A(x,y), (1-\varphi)u(y) \rangle_{C^\infty(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)}$$

est bien définie et C^∞ pour $|x-x_0| \leq r/2$.

Mais (9.3.4) montre que $v = P(1-\varphi)u$ sur la boule $|x-x_0| \leq r/2$, et $P(1-\varphi)u$ y est donc C^∞. □

Notons aussi :

Proposition 9.3.4. — *Désignons par $\mathcal{E}'^N(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distribution à support compact, d'ordre N (vérifiant (9.2.2)). Soit $p \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ avec $m + k < -n$ ($k \in \mathbb{N}$). Alors P s'étend en opérateur continu de $\mathcal{E}'^k(\mathbb{R}^n)$ dans $C^0(\Omega)$, et envoie $\mathcal{E}'^N(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{k-N}(\Omega)$ pour $N \leq k$.*

Démonstration. — D'après le lemme 9.3.1, le noyau $A(x, y)$ est de classe C^k. On peut aussi revenir à la définition (9.2.1) et vérifier directement que si u vérifie (9.2.2), la formule (9.2.1) définit une fonction de classe C^{k-N} sur Ω, pour $N \leq k$ et $m_k < -n$. □

9.4. Composition

Soient $\Omega_1 \Subset \Omega$, $p \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, $q \in S^{m'}_{\rho',\delta'}(\Omega_1)$ et $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ valant 1 sur Ω_1. L'opérateur $R = Q(x, D_x)\varphi P(x, D_x)$ est bien défini de $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\infty(\Omega_1)$.

Notons $p_1(x, \eta) = \varphi(x)p(x, \eta)$ et $\widehat{p}_1(\xi, \eta)$ sa transformée de Fourier en x :

$$\widehat{p}_1(\xi, \eta) = \int e^{-ix\cdot\xi} p_1(x, \eta)dx\,.$$

$\widehat{p}_1(\xi, \eta)$ est C^∞ en (ξ, η), et d'après (9.1.1), on a :

$$\left|\xi^\alpha \partial^\beta_\eta \widehat{p}_1(\xi, \eta)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\,(1 + |\eta|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}\,. \tag{9.4.1}$$

Pour $u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, on déduit de (9.2.1) que l'on a :

$$\widehat{\varphi P u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \widehat{p}_1(\xi - \eta, \eta)\widehat{u}(\eta)d\eta\,.$$

(Intégrale absolument convergente.) On a donc

$$(Ru)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\iint e^{ix\cdot\xi} q(x, \xi)\widehat{p}_1(\xi - \eta, \eta)\widehat{u}(\eta)d\eta d\xi\,. \tag{9.4.2}$$

(Intégrale toujours absolument convergente.) On introduit donc la fonction :

$$r(x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\eta} q(x, \xi + \eta)\widehat{p}_1(\eta, \xi)d\eta\,, \tag{9.4.3}$$

de sorte que R est l'opérateur de symbole r :

$$Ru(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi} r(x, \xi)\widehat{u}(\xi)d\xi\,.$$

Théorème 9.4.1. — *Si $\rho' \geq \delta$, $\delta < 1$, le symbole (9.4.3) est dans la classe $S^{m+m'}_{\rho'',\delta''}(\Omega_1)$ avec $\rho'' = \min(\rho, \rho')$ et $\delta'' = \max(\delta, \delta')$.*

Nous ne démontrerons ce théorème que lorsque $\delta < \rho'$. On a alors :

Théorème 9.4.2. — *Si $\delta < \rho' \leq 1$, le symbole (9.4.3) est dans la classe $S^{m+m'}_{\rho'',\delta''}(\Omega_1)$ et pour tout entier N,*

$$r(x, \xi) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi q(x, \xi) D^\alpha_x p(x, \xi)$$

est un symbole dans la classe $S^{m+m'-N(\rho'-\delta)}_{\rho'',\delta''}(\Omega_1)$.

Lemme 9.4.3. — *Pour tous $\beta \in \mathbb{N}^n$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe C telle que pour tous $(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :*

$$\left|\partial_\xi^\beta \widehat{p}_1(\eta,\xi)\right| \leq C\,(1+|\eta|)^{-k}\,(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta k}\ . \tag{9.4.4}$$

Démonstration. — Il suffit d'écrire :

$$\left(1+|\eta|^2\right)^k \partial_\xi^\beta \widehat{p}_1(\eta,\xi) = \int e^{-ix\cdot\eta}\,(1-\Delta_x)^k\,\partial_\xi^\beta p_1(x,\xi)dx\,,$$

et de remarquer que p_1 vérifie des estimations (9.1.1). □

Lemme 9.4.4. — *Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 pour $|\xi| \leq 1$ et 0 pour $|\xi| \geq 2$. Alors les symboles*

$$r^{(1)}(x,\xi) = \varphi(\xi)r(x,\xi)\,,$$
$$r^{(2)}(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\eta}q(x,\xi+\eta)\widehat{p}_1(\eta,\xi)\,(1-\varphi(\xi))\left(1-\varphi\left(\frac{\eta}{4|\xi|}\right)\right)d\eta$$

sont dans $S^{-N}_{\rho'',\delta''}(\Omega_1)$ pour tout entier N.

Démonstration. — D'après le lemme 9.4.3 et les estimations (9.1.1) sur q, il est clair que $r^{(1)}$ est une fonction C^∞ sur $\Omega_1 \times \mathbb{R}^n$, à support dans la boule $|\xi| \leq 2$. Par suite, $r^{(1)} \in S^{-N}_{\rho'',\delta''}(\Omega_1)$ pour tout entier N.

Pour $r^{(2)}$, la preuve est un peu plus subtile : notons $p_2(\eta,\xi)$ la fonction

$$p_2(\eta,\xi) = (1-\varphi(\xi))\left(1-\varphi\left(\frac{\eta}{4|\xi|}\right)\right)\widehat{p}_1(\eta,\xi).$$

Elle est à support dans la région $|\eta| \geq 1$, $|\eta| \geq \frac{1}{4}|\xi|$. En outre, on a :

$$\left|\partial_\xi^\beta\left(1-\varphi\left(\frac{\eta}{4|\xi|}\right)\right)\right| \leq C|\xi|^{-\beta} \quad \text{pour } |\xi| \geq 1\,.$$

(Puisque sur le support de $\nabla\varphi$: $\frac{1}{4}|\xi| \leq |\eta| \leq \frac{1}{2}|\xi|$.)

On en déduit que p_2 satisfait les mêmes estimations (9.4.4) que $\widehat{p}_1$. On a alors :

(9.4.5)
$$\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta r^{(2)}(x,\xi) = \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha\\ \beta'\leq\beta}}\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'}(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\eta}(i\eta)^{\alpha-\alpha'}\partial_x^{\alpha'}\partial_\xi^{\beta'}q(x,\xi+\eta)\partial_\xi^{\beta-\beta'}p_2(\eta,\xi)d\xi\,.$$

Puisque $q \in S^{m'}_{\rho',\delta'}$, on a :

$$\left|\partial_x^{\alpha'}\partial_\xi^{\beta'}q(x,\xi+\eta)\right| \leq C\,(1+|\xi+\eta|)^{m'-\rho'|\beta'|+\delta'\alpha'}\ .$$

Avec les estimations (9.4.4), on a aussi :

$$\left|\eta^{\alpha-\alpha'}\partial_\xi^{\beta-\beta'}p_2(\eta,\xi)\right| \leq C\,(1+|\eta|)^{-k}\,(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta-\beta'|+\delta(|\alpha-\alpha'|+k)}\ .$$

Pour $k > n$, on a des inégalités du type :

$$\int_{|\eta|\geq\frac{1}{4}|\xi|}(1+|\xi+\eta|)^\lambda\,(1+|\eta|)^{-k}\,d\eta \leq C\,(1+|\xi|)^{\lambda_+-k+n}\ ,$$

avec $\lambda_+ = \max(\lambda, 0)$. On voit alors que le terme général de (9.4.5) se majore en

$$(1+|\xi|)^{\mu-(1-\delta)k}\ ,$$

avec $\mu = (m' - \rho'|\beta'| + \delta'|\alpha'|)_+ + m + n - \rho|\beta - \beta'| + \delta|\alpha - \alpha'|$. Finalement, puisque $1-\delta > 0$, on voit en prenant k assez grand que pour tout N, on a :

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r^{(2)}(x,\xi)\right| \lesssim (1+|\xi|)^{-N}\ .$$

Notons

$$p_3(\eta,\xi) = (1-\varphi(\xi))\varphi\left(\frac{\eta}{4|\xi|}\right)\widehat{p_1}(\eta,\xi).$$

Il nous reste à étudier le symbole :

$$s(x,\xi) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\eta} q(x,\xi+\eta)p_3(\eta,\xi)d\eta\,.$$

Donnons-nous un entier N (assez grand) et écrivons le développement de Taylor de q :

$$q(x,\xi+\eta) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha q(x,\xi)\eta^\alpha + b(x,\xi,\eta)\,,$$

avec

$$b(x,\xi,\eta) = \sum_{|\alpha|=N} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^{N-1}\partial_\xi^\alpha q(x,\xi+t\eta)dt\,.$$

Utilisant les estimations (9.1.1) pour q, on voit que pour $|\eta| \le \frac{1}{2}|\xi|$, on a :

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b(x,\xi,\eta)\right| \lesssim |\eta|^N (1+|\xi|)^{m'-\rho'(|\beta|+N)+\delta'|\alpha|}\ . \tag{9.4.6}$$

Reportant le développement de Taylor dans l'expression de s, on obtient

$$s(x,\xi) = \sum_{|\alpha|<N} s_\alpha(x,\xi) + a(x,\xi)\,,\quad \text{avec} \begin{cases} s_\alpha(x,\xi) = \dfrac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha q(x,\xi)(2\pi)^{-n}\displaystyle\int e^{ix\cdot\eta}\eta^\alpha p_3(\eta,\xi)d\eta\,, \\ a(x,\xi) = (2\pi)^{-n}\displaystyle\int e^{ix\cdot\eta} b(x,\xi,\eta)p_3(\eta,\xi)d\eta\,. \end{cases}$$

Lemme 9.4.5. — *Le symbole a est dans la classe* $S^{m+m'-(\rho'-\delta)N+\delta(n+1)}_{\rho'',\delta''}(\Omega_1)$.

Preuve du lemme 9.4.5. — La fonction p_3 vérifie les estimations (9.4.4), et est à support dans la région $|\xi| \ge 1$, $|\eta| \le \frac{1}{2}|\xi|$. On a :

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) = \sum_{\substack{\alpha'\le\alpha \\ \beta'\le\beta}} \binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'}(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\eta}(i\eta)^{\alpha-\alpha'}\partial_x^{\alpha'}\partial_\xi^{\beta'} b(x,\xi,\eta)\partial_\xi^{\beta-\beta'}p_2(\eta,\xi)d\xi\,.$$

Compte tenu de (9.4.4) et (9.4.6) (et du fait que $p_3 = 0$ pour $|\eta| > \frac{1}{2}|\xi|$), on majore les intégrales du membre de droite par :

$$(1+|\xi|)^\mu \int (1+|\eta|)^{-(n+1)}\, d\eta\,,$$

avec $\mu = m' - \rho'(|\beta'|+N) + \delta'|\alpha'| + m - \rho|\beta-\beta'| + \delta(N+n+1+|\alpha-a'|)$, et le lemme en résulte en remarquant que $\mu \le m + m' - (\rho'-\delta)N + \delta(n+1) - \rho''|\beta| + \delta''|\alpha|$. $\square$

Lemme 9.4.6. — *Posons*

$$h_\alpha(x,\xi) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\eta}\eta^\alpha p_2(\eta,\xi)d\eta \quad ; \quad k_\alpha(x,\xi) = \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha q(x,\xi)h_\alpha(x,\xi)\,.$$

Alors les fonctions h_α et k_α sont dans $S^{-k}_{\rho'',\delta''}(\Omega_1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Preuve du lemme 9.4.6. — Il résulte immédiatement de (9.4.4) que

$$\left|\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta h_\alpha(x,\xi)\right| \lesssim (1+|\xi|)^{\lambda+\delta k}\int_{|\eta|\geq\frac14|\xi|}(1+|\eta|)^{-k}\,d\eta\,,$$

avec $\lambda = m - \rho|\beta| + \delta(|\gamma|+|\alpha|)$. On obtient l'assertion du lemme pour h_α en majorant l'intégrale par $C(1+|\xi|)^{-k+n}$, et en choisissant k aussi grand que nécessaire. L'assertion pour les k_α en résulte aussi grâce à (9.1.1) par la formule de Leibniz. □

Lemme 9.4.7. — *Notons*

$$r_\alpha(x,\xi) = \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha q(x,\xi)D_x^\alpha p_1(x,\xi)\,.$$

Alors $r_\alpha \in S^{m+m'-(\rho'-\delta)N}_{\rho'',\delta''}(\Omega_1)$.

Preuve du lemme 9.4.7. — On écrit que :

$$\left|\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta\left(\partial_\xi^\alpha q(x,\xi)\right)\right| \lesssim (1+|\xi|)^{m'-\rho''|\beta|+\delta''|\gamma|-\rho'|\alpha|}\,,$$

et que

$$\left|\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta\left(D_x^\alpha p_1(x,\xi)\right)\right| \lesssim (1+|\xi|)^{m-\rho''|\beta|+\delta''|\gamma|+\delta|\alpha|}\,.$$

Le lemme en résulte par la formule de Leibniz. □

On remarque maintenant que

$$(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\eta}\eta^\alpha\widehat{p}_1(\eta,\xi)d\eta = D_x^\alpha p_1(x,\xi)\,.$$

On a donc montré que :

$$r(x,\xi) = r^{(1)} + r^{(2)} + \sum_{|\alpha|<N}\left((1-\varphi(\xi))\,r_\alpha - k_\alpha\right) + a\,.$$

Puisque $\varphi(\xi)r_\alpha$ est à support compact en ξ, on a donc montré que :

$$r(x,\xi) = \sum_{|\alpha|<N} r_\alpha(x,\xi) + \widetilde{a}_N(x,\xi)\,, \tag{9.4.7}$$

avec $\widetilde{a}_N \in S^{m+m'-(\rho'-\delta)N+\delta(n+1)}_{\rho'',\delta''}(\Omega_1)$.

Le théorème 9.4.2 en résulte aussitôt : étant donné N, on choisit $N' > N$ de sorte que $N'(\rho'-\delta) \geq N(\rho'-\delta)+\delta(n+1)$. On applique alors (9.4.7) à l'ordre N', et avec le lemme 9.4.7, on conclut que :

$$r - \sum_{|\alpha|<N} r_\alpha = \sum_{N\leq|\alpha|<N'} r_\alpha + \widetilde{a}_{N'} \in S^{m+m'-(\rho'-\delta)N}_{\rho'',\delta''}(\Omega_1)\,.$$

□

9.5. Théorème de Calderón–Vaillancourt

Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 9.5.1. — *Soit $p \in S^0_{\rho,\rho}(\Omega)$, avec $0 \leq \rho < 1$. Alors l'opérateur P se prolonge en opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Remarque. — Le résultat est faux pour $\rho = 1$. Nous commençons la preuve par le cas où $\rho = 0$.

Pour $s \in \mathbb{R}$, on note $H^s(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Sobolev : $\Big\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ / \ \big(1 + |\xi|^2\big)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \Big\}$.

Lemme 9.5.2. — *Soit s un réel $> n/2$. Il existe une constante C telle que pour toute famille $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}^n}$ de fonctions de $H^s(\mathbb{R}^n)$, on a :*

$$\Big\| \sum_\nu f_\nu(x) e^{i\nu\cdot x} \Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_\nu \|f_\nu\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \,.$$

Preuve du lemme 9.5.2. — Dans l'espace $\ell^2(\mathbb{Z}^n, H^s)$ des suites de $H^s(\mathbb{R}^n)$ indexées par $\mathbb{Z}^n$ et dont le carré des normes est sommable, notons ℓ_0 l'espace des suites à support fini.

Pour $\{f_\nu\} \in \ell_0$, notons $f = \sum f_\nu e^{i\nu\cdot x}$. Alors :

$$\|f\|^2_{L^2} = (2\pi)^{-n} \int \Big|\widehat{f}(\xi)\Big|^2 d\xi = (2\pi)^{-n} \int \Big| \sum_\nu \widehat{f}_\nu(\xi - \nu) \Big|^2 d\xi \,.$$

Par ailleurs :

$$\Big| \sum_\nu \widehat{f}_\nu(\xi - \nu) \Big|^2 \leq \sum_\nu |f_\nu(\xi - \nu)|^2 \big(1 + |\xi - \nu|^2\big)^s \times \sum_\nu \big(1 + |\xi - \nu|^2\big)^{-s} \,.$$

Puisque $s > n/2$, la série $\theta(\xi) = \displaystyle\sum_\nu \big(1 + |\xi - \nu|^2\big)^{-s}$ converge et sa somme est majorée uniformément par une constante C. On a donc :

$$\|f\|^2_{L^2} \leq C(2\pi)^{-n} \sum_\nu \int |f_\nu(\xi - \nu)|^2 \big(1 + |\xi - \nu|^2\big)^s d\xi \leq C(2\pi)^{-n} \sum_\nu \|f_\nu\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \,.$$

Ceci montre que l'application $\{f_\nu\} \mapsto \sum f_\nu e^{i\nu x}$ est continue de l'espace de ℓ_0, muni de la norme $\ell^2(\mathbb{Z}^n, H^s)$, dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Il en résulte de pour $\{f_\nu\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n, H^s)$, la série $\sum f_\nu e^{i\nu\cdot x}$ est convergente dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et par passage à la limite, l'inégalité du lemme subsiste. $\square$

Lemme 9.5.3. — *Il existe une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on ait :*

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \varphi^2(\xi - \nu) = 1 \,.$$

Preuve du lemme 9.5.3. — Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 sur le cube $|\xi_j| \leq 1/2$, $j = 1, \ldots, n$. Alors la fonction

$$h(\xi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \psi^2(\xi - \nu)$$

est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et bornée puisque sur tout compact, il n'y a qu'un nombre fini, uniformément borné, d'indices ν tels que $\psi(\xi - \nu) \neq 0$. En outre, $h(xi) \geq 1$ puisque pour tout ξ, il existe un $\nu \in \mathbb{Z}^n$ tel que $|\xi_j - \nu_j| \leq 1/2$ pour $j = 1, \ldots, n$, et alors $\psi(\xi - \nu) = 1$. Enfin par construction, on a $h(\xi+\mu) = h(\xi)$, $\forall \mu \in \mathbb{Z}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$. La fonction $h(\xi)^{-1/2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, est il suffit alors de poser $\varphi(\xi) = \dfrac{\psi(\xi)}{\sqrt{h(\xi)}}$. $\square$

Lemme 9.5.4. — *Soit $q(x,\xi)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, à support dans le domaine $|\xi| \leq R$, et vérifiant :*

$$\left|\partial_\xi^\beta q(x,\xi)\right| \leq M$$

pour tous x, ξ et β, $|\beta| \leq [\frac{n}{2}]+1$. Alors l'opérateur Q de symbole q se prolonge en opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, dont la norme n'excède pas CM, la constante C ne dépendant que de la dimension n et de R.

Preuve du lemme 9.5.4. — L'opérateur Q est clairement associé au noyau

$$Q(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} q(x,\xi) d\xi\,,$$

l'intégrale convergeant absolument puisque le symbole q est à support compact. En outre on a :

$$(x-y)^\alpha Q(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} \left(-D\xi^\alpha\right) q(x,\xi) d\xi\,,$$

d'où il résulte que pour $|\alpha| \leq [n/2]+1$,

$$\int \left|z^{2\alpha}\right| |Q(x,x-z)|^2 \, dz \leq CM^2\,,$$

et enfin que, en posant $s = [n/2]+1$,

$$\int \left(1+|z|^2\right)^s |Q(x,x-z)|^2 \, dz \leq CM^2\,.$$

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $Qf(x) = \displaystyle\int Q(x,y) f(y) dy$, et

$$|Qf(x)|^2 \leq \int \left(1+|x-y|^2\right)^s |Q(x,y)|^2 \, dy \int \frac{|f(y)|^2}{(1+|x-y|^2)^s} dy \leq CM^2 \int \frac{|f(y)|^2}{(1+|x-y|^2)^s} dy\,.$$

Mais puisque $s > n/2$, $\displaystyle\int \left(1+|x-y|^2\right)^{-s} dx < +\infty$, et en intégrant on obtient :

$$\|Qf\|_{L^2}^2 \leq C' M^2 \|f\|_{L^2}^2\,.$$

$\square$

Proposition 9.5.5. — *Soit $p(x,\xi)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui vérifie :*

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)\right| \leq M$$

pour tous x, ξ, α et β tels que $|\alpha| \leq [n/2]+1$, $|\beta| \leq [n/2]+1$. Alors l'opérateur P de symbole p s'étend en opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, et sa norme n'excède pas CM, où C est une constant qui ne déoend que de n.

Preuve de la proposition 9.5.5. — On introduit la fonction φ du lemme 9.5.3, et on pose $p_\nu(x,\xi) = p(x,\xi+\nu)\varphi(\xi)$. Notons $\mathcal{S}_0$ l'espace des fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ dont la transformée de Fourier est à support compact. Pour $u \in \mathcal{S}_0$, on a :

$$p(x,\xi)\widehat{u}(\xi) = \sum_\nu p(x,\xi)\varphi^2(\xi-\nu)\widehat{u}(\xi) = \sum_\nu p_\nu(x,\xi-\nu)\widehat{u}_\nu(\xi-\nu)\,,$$

avec $\widehat{u}_\nu(\xi) = \varphi(\xi)\widehat{u}(\xi+\nu)$.

Notons P_ν l'opérateur de symbole p_ν. Il suffit d'appliquer le lemme 9.5.4 pour voir que P_ν est borné de L^2 dans L^2, de norme majorée par CM. Mais aussi, pour $|\alpha| \le s = [n/2]+1$, $\partial_x^\alpha P_\nu$, qui est de symbole $(\partial_x+\xi)^\alpha\, p_\nu(x,\xi)$, est borné de L^2 dans L^2, toujours grâce au lemme 9.5.4. On voit donc qu'il existe une constante C, qui ne dépend que de la dimension n et du choix de φ, telle que P_ν soit borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$, de norme $\le CM$.

Maintenant, on écrit pour $u \in \mathcal{S}_0$ que

$$Pu(x) = \sum_\nu \int e^{ix\cdot\xi} p_\nu(x,\xi-\nu)\widehat{u}_\nu(\xi-\nu)d\xi = \sum_\nu e^{i\nu\cdot x}\left(P_\nu u_\nu\right)(x)\,.$$

D'après le lemme 9.5.2, on a :

$$\|Pu\|_{L^2}^2 \le \sum_\nu \|P_\nu u_\nu\|_{H^s}^2 \le C^2M^2 \sum_\nu \|u_\nu\|_{L^2}^2\ .$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que :

$$\sum_\nu \|u_\nu\|_{L^2}^2 = \sum_\nu (2\pi)^{-n} \int |\widehat{u}_\nu(\xi)|^2\, d\xi = (2\pi)^{-n} \int \sum_\nu |\widehat{u}(\xi)|^2\, \varphi^2(\xi-\nu)d\xi = \|u\|_{L^2}^2\ .$$

□

Pour étudier le cas $\rho > 0$, nous aurons besoin d'une variante de la proposition 9.5.5 :

Proposition 9.5.6. — *Soit $p(x,\xi)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui vérifie :*

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)\right| \le M\,,$$

pour tous $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|\alpha| \le [\frac{n}{2}]+1$, $|\beta| \le [n/2]+1$. On suppose en outre que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier de $x \mapsto p(x,\xi)$, $\widehat{p}(\eta,\xi) = \int e^{-ix\cdot\eta} p(x,\xi)dx$, est à support dans la région $|\eta| \ge \lambda$. Alors pour tout s tel que $n/2 < s < [\frac{n}{2}]+1$, il existe $C(n,s)$ ne dépendant que de s et n, telle que l'opérateur P soit de norme d'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, inférieure ou égale à $C(n,s)M\lambda^{s-[\frac{n}{2}]-1}$.

Preuve de la proposition 9.5.6. — On reprend la démonstration précédente, en supposant $\lambda \ge 1$. Notons P_ν l'opérateur de symbole $p_\nu(x,\xi) = p(x,\xi+\nu)\varphi(\xi)$. On a vu que les P_ν sont bornés de L^2 dans $H^N(\mathbb{R}^n)$ avec $N = [\frac{n}{2}]+1$, et que

$$\|P_\nu f\|_{H^N(\mathbb{R}^n)} \le C(n)M\, \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ .$$

Mais on a :

$$\widehat{P_\nu f}(\eta) = \int \widehat{p}(\eta-\xi,\xi+\nu)\varphi(\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi\,,$$

et puisque $p(\eta-\xi,\xi+\nu)$ est à support dans $|\eta-\xi|\geq\lambda$ et que φ est à support dans $|\xi|\leq\lambda_0$, on voit que $\widehat{P_\nu f}$ est à support dans $|\eta|\geq\lambda-\lambda_0$. Il est alors clair que l'on a :

$$\begin{aligned}\|P_\nu f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} &= \int_{|\eta|\geq\lambda-\lambda_0}\left(1+|\eta|^2\right)^s\left|\widehat{P_\nu f}(\eta)\right|^2 d\eta\\ &\leq C(n,s)\lambda^{2(s-N)}\int\left(1+|\eta|^2\right)^N\left|\widehat{P_\nu f}(\eta)\right|^2 d\eta\,.\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\|P_\nu f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\leq C(n,s)\lambda^{s-N}M\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

La fin de la démonstration est alors identique à celle de la proposition 9.5.5 : d'après le lemme 9.5.2, puisque $s>n/2$, on a, pour $u\in\mathcal{S}_0$:

$$\|Pu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq C\sum_\nu\|P_\nu u_\nu\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}\leq C'\lambda^{2(s-N)}M^2\sum_\nu\|u_\nu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq C'\lambda^{2(s-N)}M^2\,\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

□

Le lemme suivant sera d'un usage constant par la suite :

Lemme 9.5.7. — *Il existe deux fonctions χ_0 et χ, C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, à support respectivement dans la boule $\{|\xi|\leq 1\}$ et dans la couronne $\{1/3\leq|\xi|\leq 3\}$ et telles que :*

$$\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\quad \chi_0(\xi)+\sum_{j=0}^{\infty}\chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)=1\,.$$

Preuve du lemme 9.5.7. — Ce lemme est essentiellement similaire au lemme 9.5.3. On choisit $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $[0,1]$, supportée dans la couronne $\{1/3\leq|\xi|\leq 3\}$, et valant 1 pour $1/2\leq|\xi|\leq 2$. La fonction $h(\xi)=\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, est ≥ 1 et vérifie $h(\xi/2^j)=h(\xi)$ pour tout ξ et tout j. On pose $\chi=\psi/h$, et alors la fonction $\chi_0(\xi)=1-\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ est C^∞ et à support dans la boule $\{|\xi|\leq 1\}$. □

Lemme 9.5.8. — *Soit $p(x,\xi)$ un symbole et $q(x,\xi)=p(\frac{x}{\lambda},\lambda\xi)$. Alors si l'un des opérateurs P et Q, de symbole p et q, est borné de L^2 dans L^2, l'autre l'est aussi, et ils ont alors même norme.*

Preuve. — L'opérateur $u\mapsto Hu(x)=\lambda^{n/2}u(\lambda x)$ est une isométrie de L^2 sur lui-même, et envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. On a :

$$\widehat{Hu}(\xi)=\lambda^{-n/2}\widehat{u}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\quad\text{et}\quad(PHu)(x)=(HQu)(x)\,.$$

Le lemme en résulte immédiatement. □

Proposition 9.5.9. — *Soit p une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ qui vérifie :*

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta p(x,\xi)\right|\leq M\left(1+|\xi|\right)^{\rho(|\alpha|-|\beta|)}$$

pour tous (x,ξ), $|\alpha|\leq[\frac{n}{2}]+1$, $|\beta|\leq[\frac{n}{2}]+1$.

Alors si $\rho\in[0,1[$, il existe une constante $C(n,\rho)$ telle que l'opérateur P de symbole p se prolonge en opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, de norme $\leq C(n,\rho)M$.

Preuve. — Suivant la décomposition du lemme 9.5.7, on écrit :

$$r(x,\xi) = p(x,\xi)\chi_0(\xi)\,, \quad p_j(x,\xi) = p(x,\xi)\chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\,.$$

L'opérateur R de symbole r relève immédiatemement du lemme 9.5.4 et est borné de L^2 dans L^2. Il suffit donc d'étudier l'opérateur de symbole :

$$\widetilde{p}(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)\,. \tag{9.5.1}$$

On introduit encore une fonction $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule $|\xi| \leq 1/12$, valant 1 pour $|\xi| \geq 1/20$. Pour $j \geq 0$, on pose $h_j(\xi) = h\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ et on note φ_j la transformée de Fourier inverse de h_j. Si $\widehat{\varphi} = h$, on a alors $\varphi_j(x) = 2^{nj}\varphi(2^j x)$. On pose enfin :

$$q_j(x,\xi) = \int \varphi_j(x-y)p_j(y,\xi)dy \quad \text{et} \quad s_j(x,\xi) = p_j(x,\xi) - q_j(x,\xi)\,. \tag{9.5.2}$$

Lemme 9.5.10. — *Il existe $C(n)$ telle que l'on ait :*

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q_j(x,\xi)\right| \leq C(n)M2^{\rho j(|\alpha|-|\beta|)}\,, \quad \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s_j(x,\xi)\right| \leq C(n)M2^{\rho j(|\alpha|-|\beta|)}\,, \tag{9.5.3}$$

pour tous (x,ξ), $j \geq 0$, $|\alpha| \leq [\frac{n}{2}]+1$ et $|\beta| \leq [\frac{n}{2}]+1$.

En outre, les transformées de Fourier en x, $\widehat{q}_j(\eta,\xi)$ et $\widehat{s}_j(\eta,\xi)$, sont à support, respectivement dans $\{|\eta| \leq 2^j/12\}$ et $\{|\eta| \geq 2^j/20\}$.

Preuve du lemme 9.5.10. — Notant $\chi_j(\xi) = \chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$, on a

$$\left|\partial_\xi^\beta \xi_j(\xi)\right| \leq C2^{-|\beta|j} \leq C2^{-\rho|\beta|j}\,.$$

Utilisant le fait que $\frac{1}{3}2^j \leq |\xi| \leq 3\cdot 2^j$ sur le support de χ_j, on en déduit que :

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_j(x,\xi)\right| \leq C_1 M\, 2^{\rho j(|\alpha|-|\beta|)}\,.$$

Maintenant on remarque que $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que $\|\varphi_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. En outre, si $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie :

$$|\partial_x^\alpha p(x)| \leq M' \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leq \left[\frac{n}{2}\right]+1\,,$$

on voit que $\varphi_j * p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que

$$|\partial_x^\alpha(\varphi_j * p)(x)| = |\varphi_j * \partial_x^\alpha p(x)| \leq \|\varphi_j\|_{L^1}\|\partial_x^\alpha p\|_{L^\infty} \leq \|\varphi_j\|_{L^1}\cdot M\,.$$

Les estimations (9.5.3) en résultent aussitôt.

Enfin on a : $\widehat{q}_j(\eta,\xi) = h_j(\eta)\widehat{p}_j(\eta,\xi)$ et $\widehat{s}_j(\eta,\xi) = (1-h_j(\eta))\,\widehat{p}_j(\eta,\xi)$; les affirmations concernant les supports des $\widehat{q}_j$ et $\widehat{s}_j$ résultent alors du choix de la fonction h. □

Lemme 9.5.11. — *Il existe $\varepsilon > 0$ et C, tels que les opérateurs Q_j et S_j de symbole q_j et s_j soient bornés de L^2 dans L^2, et de norme majorée respectivement par CM et $CM2^{-\varepsilon j}$.*

Preuve du lemme 9.5.11. — Notons $\widetilde{q}_j(x,\xi) = q_j\left(\frac{x}{2^{\rho j}}, 2^{\rho j}\xi\right)$ et $\widetilde{s}_j(x,\xi) = s_j\left(\frac{x}{2^{\rho j}}, 2^{\rho j}\xi\right)$. Il résulte immédiatement de (9.5.3) que l'on a :

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \widetilde{q}_j(x,\xi)\right| \leq CM\,, \quad \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \widetilde{s}_j(x,\xi)\right| \leq CM\,,$$

pour tout j, tous (x,ξ), tous $|\alpha| \leq [\frac{n}{2}]+1$, $|\beta| \leq [\frac{n}{2}]+1$.

La proposition 9.5.5 montre que $\widetilde{Q}_j$ est borné dans L^2, de norme $\leq CM$, et d'après le lemme 9.5.8, il en est de même de Q_j.

La transformée de Fourier en x de $\widetilde{s}_j$ est $\widehat{\widetilde{s}}_j(\eta,\xi) = 2^{n\rho j}\widehat{s}_j(2^{\rho j}\eta, 2^{\rho j}\xi)$, et est donc à support dans $\left\{|\eta| \geq \frac{1}{20}2^{(1-\rho)j}\right\}$. Choisissant $s \in]\frac{n}{2}, [\frac{n}{2}]+1[$, on déduit de la proposition 9.5.6 que $\widetilde{S}_j$ est borné de L^2 dans L^2 de norme $\leq CM2^{(1-\rho)j\left(s-[\frac{n}{2}]-1\right)}$. D'après le lemme 9.5.8, il en est de même pour S_j et le lemme suit avec $\varepsilon = (1-\rho)\left(s-[\frac{n}{2}]-1\right) > 0$. □

Nous terminons maintenant la preuve de la proposition 9.5.9.

D'après (9.5.1) et (9.5.2), on a $\widetilde{p}(x,\xi) = q(x,\xi) + s(x,\xi)$ avec $q = \sum q_j$ et $s = \sum s_j$. Il résulte immédiatement du lemme 9.5.11 que pour $u \in \mathcal{S}_0$, on a :

$$\|Su\|_{L^2} \leq \sum_j \|S_j u\|_{L^2} \leq CM \sum_j 2^{-\varepsilon j} \|u\|_{L^2} ,$$

et donc S s'étend en opérateur borné de L^2 dans L^2.

En outre, pour $u \in \mathcal{S}_0$, on peut écrire $Qu = \sum_j Q_j u$, la somme étant finie. Puisque $q_j(x,\xi)$ est à support dans la couronne $\Gamma_j = \{\frac{1}{3}2^j < |\xi| < 3\cdot 2^j\}$, on a $Q_j u = Q_j u_j$ si l'on note $u_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ la fonction dont la transformée de Fourier est la restriction à Γ_j de $\widehat{u}$.

Chaque point ξ étant dans au plus quatre couronnes Γ_j, on a :

$$\sum |u_j(\xi)|^2 \leq 4\, |u(\xi)|^2 ,$$

et par conséquent

$$\sum \|u_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 4\, \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} . \tag{9.5.4}$$

Par ailleurs on a :

$$\widehat{Q_j u}(\eta) = \int \widehat{q}_j(\eta-\xi,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi .$$

Puisque $\widehat{q}_j(\eta-\xi,\xi)$ est à support dans $\{|\eta-\xi| \leq \frac{1}{12}2^j\} \cap \{\frac{1}{3}2^j \leq |\xi| \leq 3\cdot 2^j\}$, on voit alors que $\widehat{Q_j u}$ est à support dans la couronne $\Gamma'_j = \{\frac{1}{4}2^j \leq |\eta| \leq 4\cdot 2^j\}$.

Chaque point η étant dans au plus quatre couronnes Γ'_j, on a pour $u \in \mathcal{S}_0$:

$$\left|\sum \widehat{Q_j u}(\eta)\right|^2 \leq 4\sum \left|\widehat{Q_j u}(\eta)\right|^2 ,$$

et donc

$$\|Qu\|^2_{L^2} \leq 4\sum \|Q_j u\|^2_{L^2} = 4\sum \|Q_j u_j\|^2_{L^2} .$$

Utilisant le lemme 9.5.11 et (9.5.4), on conclut alors que

$$\|Qu\|_{L^2} \leq C'M\, \|u\|_{L^2} ,$$

et il en résulte que Q se prolonge en opérateur borné dans L^2.

L'opérateur P s'écrit $R+Q+S$, et nous venons de montrer que chaque terme est borné dans L^2, ce qui termine la démonstration de la proposition 9.5.9. □

CHAPITRE 10

OPÉRATEURS DE TYPE $(1,1)$

10.1. Décompostion en couronnes dyadiques

Commençons par quelques résultats préliminaires, utiles pour la suite.

Lemme 10.1.1. — *Soit $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dont la transformée de Fourier est à support dans la boule $\{|\xi| \leq \lambda\}$. Alors a est C^∞, et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $C(n,\alpha)$ (ne dépendant que de n et α) telle que :*

$$\|\partial_x^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\alpha)\lambda^{|\alpha|} \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \,.$$

Démonstration. — Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule $\{|\xi| \leq 2\}$, valant 1 pour $|\xi| \leq 1$, et soit $\varphi_\lambda(\xi) = \varphi\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$. Notons ψ_λ la transformée inverse de Fourier de φ_λ ; on a $\psi_\lambda(x) = \lambda^n\psi(\lambda x)$, ψ étant la transformée inverse de φ. Puisque $\varphi_\lambda\widehat{a} = \widehat{a}$, on a :

$$a = \psi_\lambda * a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,,$$

et $\partial_x^\alpha a = (\partial_x^\alpha \psi_\lambda) * a$. Mais $\partial_x^\alpha \psi_\lambda = \lambda^{|\alpha|}\lambda^n(\partial_x^\alpha\psi)(\lambda x)$ et

$$\|\partial_x^\alpha \psi_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{|\alpha|} \|\partial_x^\alpha \psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

On a alors $\|\partial_x^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\partial_x^\alpha \psi_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{|\alpha|} \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. $\square$

Lemme 10.1.2. — *Soient $0 \leq m < N$ deux entiers, soit $\mu \in]0,1[$. Il existe C telle que pour tout $f \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$, on a :*

$$f = g + \sum_{k=0}^{\infty} f_k\,,$$

avec

i) $\|g\|_{C^N(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|f\|_{C^{m+\mu}}$.

ii) $\|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\,2^{-k(m+\mu)}\,\|f\|_{C^{m+\mu}}$.

En outre, $\widehat{g}$ est à support dans la boule $\{|\xi| \leq 1\}$, et $\widehat{f_k}$ à support dans la couronne $\{\frac{1}{3}2^k \leq |\xi| \leq 3\cdot 2^k\}$.

Remarque. — Avec le lemme 10.1.1, on a aussi :

$$\|\partial_x^\alpha f_k\|_{L^\infty} \leq C_\alpha C\,2^{k(|\alpha|-m-\mu)}\,\|f\|_{C^{m+\mu}} \,.$$

Démonstration. — On reprend la décomposition du lemme 9.5.7 :

$$\psi(\xi)+\sum_{j=0}^{\infty}\chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)=1\,, \tag{10.1.1}$$

ψ étant à support dans $\{|\xi|\leq 1\}$, et χ dans $\{\frac{1}{3}\leq|\xi|\leq 3\}$. En outre, ψ et χ sont C^∞. On pose alors :

$$\widehat{g}=\psi\widehat{f} \quad ; \quad \widehat{f_k}=\chi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)\widehat{f}\,.$$

Notons φ_{-1} la transformée de Fourier inverse de ψ et φ_k celle de $\chi(\cdot/2^k)$. On a alors

$$g=\varphi_{-1}*f \quad ; \quad f_k=\varphi_k*f\,.$$

Puisque $\varphi_{-1}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a $\|g\|_{L^\infty}\leq C\,\|f\|_{L^\infty}$, et avec le lemme 10.1.1, l'estimation sur les dérivées de g suit.

Maintenant on utilise le fait que pour $f\in C^{m+\mu}$, on a

$$\left|f(x)-\sum_{|\alpha|\leq m}\frac{1}{\alpha!}\left(\partial_x^\alpha f\right)(y)(x-y)^\alpha\right|\leq C|x-y|^{m+\mu}\,\|f\|_{C^{m+\mu}}\ , \tag{10.1.2}$$

comme on le voit tout de suite en utilisant la formule de Taylor avec reste inégral. On a :

$$\varphi_k(x)=2^{nk}\varphi_0\left(2^kx\right)\ (k\geq 0) \quad \text{et} \quad \int x^\alpha\varphi_k(x)dx=(-D_\xi)^\alpha\,\chi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)\Big|_{\xi=0}=0\,.$$

Par conséquent,

$$f_k(x)=\int\varphi_k(x-y)\left(f(y)-\sum_{|\alpha|\leq m}\frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha\partial_x^\alpha f(x)\right)dy\,, \quad \text{et}$$

$$|f_k(x)|\leq C\,\|f\|_{C^{m+\mu}}\int|\varphi_k(x-y)|\ |x-y|^{m+\mu}dy\,.$$

Mais on a :

$$\int|\varphi_k(x-y)|\ |x-y|^{m+\mu}dy=2^{-k(m+\mu)}\int|\varphi_0(x)|\,|x|^{m+\mu}dx\,,$$

la dernière intégrale étant finie puisque $\varphi_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a donc bien :

$$\|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\leq C\,2^{-k(m+\mu)}\,\|f\|_{C^{m+\mu}}\ ,$$

et lemme est démontré. □

Inversement, on a :

Lemme 10.1.3. — *Soit f_k une suite de fonctions de $C^N(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient*

$$\|\partial_x^\alpha f_k\|_{L^\infty}\leq M2^{k(|\alpha|-m-\mu)} \quad \textit{pour } |\alpha|\leq N\,,$$

m étant un entier $<N$, et $\mu\in]0,1[$.

Alors $f=\sum_{k=0}^{\infty}f_k\in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ et il existe C ne dépendant que de n,m,N et μ telle que :

$$\|f\|_{C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)}\leq CM\,.$$

Démonstration. — Par sommation, on obtient directement que $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ et que :

$$\|\partial_x^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq CM \quad \text{pour } |\alpha| \leq m\,.$$

Maintenant, pour $|\alpha| = m$, on écrit que

$$|\partial_x^\alpha f_k(x) - \partial_x^\alpha f_k(y)| \leq M\, 2^{k(1-\mu)}|x-y|$$

pour tous k, x et y. On a :

$$\partial_x^\alpha f(x) - \partial_x^\alpha f(y) = \sum_{k\leq k_0} (\partial_x^\alpha f_k(x) - \partial_x^\alpha f_k(y)) + \sum_{k>k_0} \partial_x^\alpha f_k(x) - \sum_{k>k_0} \partial_x^\alpha f_k(y)\,,$$

où k_0 est l'entier tel que $2^{k_0} \leq \frac{1}{|x-y|} < 2^{k_0+1}$ (on suppose que $0 < |x-y| \leq 1$). On a :

$$\sum_{k\leq k_0} |\partial_x^\alpha f_k(x) - \partial_x^\alpha f_k(y)| \leq M|x-y| \sum_{k\leq k_0} 2^{k(1-\mu)} \leq 2M|x-y|2^{k_0(1-\mu)} \leq 2M|x-y|^\mu\,.$$

D'autre part :

$$\sum_{k>k_0} |\partial_x^\alpha f_k(x)| \leq M \sum_{k>k_0} 2^{-k\mu} \leq 2M2^{-k_0\mu} \leq 4M|x-y|^\mu\,.$$

On voit donc que pour $|\alpha| = m$ et $|x-y| \leq 1$, on a

$$|\partial_x^\alpha f(x) - \partial_x^\alpha f(y)| \leq CM|x-y|^\mu\,,$$

et il en résulte que $f \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$, avec l'estimation annoncée. □

Pour les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, la situation est encore plus facile :

Lemme 10.1.4. — *Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$. Notons f_k la fonction dont la transformée de Fourier $\widehat{f_k}(\xi)$ vaut $\widehat{f}(\xi)$ pour $2^k \leq |\xi| < 2^{k+1}$, et 0 pour ξ à l'extérieur de cette couronne.*

Notons g la fonction dont la transformée de Fourier $\widehat{g}(\xi)$ vaut $\widehat{f}(\xi)$ pour $|\xi| < 1$, et 0 pour $|\xi| \geq 1$.

Alors $f = g + \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2sk}\, \|f_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}$.

Démonstration. — Par définition on a :

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int \left(|\widehat{g}(\xi)|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f_k}(\xi)|^2\right) \left(1+|\xi|^2\right)^s d\xi\,,$$

puisque les supports de $\widehat{g}$ et $\widehat{f_k}$ sont disjoints. Sur le support de $\widehat{f_k}$, on a $\left(1+|\xi|^2\right)^s \geq 2^{2ks}$ et le lemme suit. □

Lemme 10.1.5. — *Soit $(f_k)_{k\geq 0}$ une suite de fonctions de $H^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour un $0 < s < s_0$,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2sk}\, \|f_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq M \quad ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2(s-s_0)k}\, \|f_k\|^2_{H^{s_0}(\mathbb{R}^n)} \leq M\,.$$

Alors $f = \sum f_k \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot M\,,$$

où C ne dépend que de n, s et s_0.

Démonstration. — Puisque $s>0$, la série $\sum f_k$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{f}=\sum \widehat{f}_k$. On a :

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \le \theta(\xi)\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2sk}\left(1+2^{-2s_0k}\left(1+|\xi|^2\right)^{s_0}\right)\left|\widehat{f}_k(\xi)\right|^2 ,$$

avec

$$\theta(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2sk}\left(1+2^{-2s_0k}\left(1+|\xi|^2\right)^{s_0}\right)^{-1} .$$

Notant k_0 l'entier tel que $2^{k_0}\le\left(1+|\xi|^2\right)^{1/2}<2^{k_0+1}$, on majore :

$$\begin{aligned}\theta(\xi) &\le \sum_{k\le k_0} 2^{2(s_0-s)k}\left(1+|\xi|^2\right)^{-s_0}+\sum_{k>k_0}2^{-2sk}\\ &\le C\left(1+|\xi|^2\right)^{-s_0}2^{2(k_0+1)s_0-k_0s}+C\cdot 2^{-2sk_0}\le C\left(1+|\xi|^2\right)^{-s} ,\end{aligned}$$

et on obtient :

$$\left(1+|\xi|^2\right)^s\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2\le C\sum_{k=0}^{\infty}2^{2sk}\left(1+2^{-2s_0k}\left(1+|\xi|^2\right)^{s_0}\right)\left|\widehat{f}_k(\xi)\right|^2 .$$

Intégrant en ξ, on voit alors que $\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}\le 2C\cdot M$. □

10.2. Opérateurs de type $(1,1)$

Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant, dû à E. Stein :

Théorème 10.2.1. — *Soit $p(x,\xi)$ un symbole de degré 0 et de type $(1,1)$ sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ telle que pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha\beta}$ telle que :*

$$\forall(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n ,\quad \left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta p(x,\xi)\right|\le C_{\alpha\beta}\left(1+|\xi|\right)^{|\alpha|-|\beta|} .$$

Alors l'opérateur P de symbole p est borné de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s>0$, et de $C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ pour tous $m\in\mathbb{N}$, $\mu\in]0,1[$.

Démonstration. — Nous commençons par les espaces de Hölder :

Lemme 10.2.2. — *Soit $q(x,\xi)$ une fonction C^0 en x, et C^N, $N=[\frac{n}{2}]+1$ en ξ, à support dans la boule $\{|\xi|\le 3\}$ et telle que :*

$$\forall\beta,\ |\beta|\le N,\ \forall(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n ,\quad \left|\partial_\xi^\beta q(x,\xi)\right|\le M .$$

Alors l'opérateur Q de symbole q est borné de L^∞ dans L^∞, de norme majorée par $C(n)M$.

Preuve du lemme 10.2.2. — Comme pour le lemme 9.5.4, on remarque que Q est associé au noyau $Q(x,y)=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi}q(x,\xi)d\xi$, qui vérifie

$$\int\left(1+|x-y|^{2N}\right)|Q(x,y)|^2dy\le CM^2 .$$

Par Cauchy–Schwarz, puisque $\int\left(1+|x-y|^{2N}\right)^{-1}dy<+\infty$, on voit que :

$$\int|Q(x,y)|dy\le C'M .$$

Il est alors clair que Q est borné de L^∞ dans L^∞ et que sa norme n'excède pas $C'M$. □

Théorème 10.2.3. — *Soit $p(x,\xi)$ une fonction sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui vérifie :*

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)\right| \leq M_{\alpha\beta}\,(1+|\xi|)^{m+|\alpha|-|\beta|}$$

(m étant un nombre réel) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $|\beta| \leq [\frac{n}{2}]+1$.

Alors pour tout $r > 0$ **non entier**, *tel que $r - m$ soit > 0* **non entier**, *l'opérateur P de symbole p est borné de $C^r(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{r-m}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve du théorème 10.2.3. — Suivant le lemme 10.1.2, on écrit :

$$f = f_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} f_k\,, \quad \text{avec}$$

$$\|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|f\|_{C^r}\, 2^{-kr}\,, \tag{10.2.1}$$

$$\operatorname{supp}\widehat{f}_{-1} \subset \{|\xi| \leq 1\}\,, \quad \operatorname{supp}\widehat{f}_k \subset \left\{\frac{1}{3}2^k < |\xi| < 3\cdot 2^k\right\} \quad \text{pour } k \geq 0\,.$$

Comme au lemme 9.5.7, on introduit une partition de l'unité :

$$1 = \psi(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} \chi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)$$

qui permet de décomposer :

$$p(x,\xi) = p_{-1}(x,\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x,\xi)\,,$$

avec

$$p_{-1}(x,\xi) = p(x,\xi)\psi(\xi) \quad ; \quad p_k(x,\xi) = p(x,\xi)\chi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)\,.$$

Le théorème 10.2.3 résulte alors du lemme 10.1.3 et du résultat suivant, où l'on note P_k l'opérateur de symbole p_k :

Lemme 10.2.4. — *Pour tout $k \geq -1$, P_k envoie $C^r(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. En outre, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe C_α telle que pour tout k et tout $f \in C^r(\mathbb{R}^n)$, on ait :*

$$\|\partial_x^\alpha P_k f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_\alpha\,\|f\|_{C^r(\mathbb{R}^n)}\, 2^{k(m-r+|\alpha|)}\,.$$

Preuve du lemme 10.2.4. — L'opérateur $\partial_x^\alpha P_k$ est associé au symbole $q_k(x,\xi) = (i\xi + \partial_x)^\alpha p_k(x,\xi)$. On a donc :

$$\left|\partial_\xi^\beta q_{-1}(x,\xi)\right| \leq M'_\alpha \tag{10.2.2}$$

pour $|\beta| \leq [\frac{n}{2}]+1$ puisque q_{-1} est à support dans $\{|\xi| \leq 1\}$, et pour $k \geq 0$, on a :

$$\left|\partial_\xi^\beta q_k(x,\xi)\right| \leq M'_\alpha 2^{k(m+|\alpha|-|\beta|)}\,, \tag{10.2.3}$$

puisque le support de q_k est dans la couronne $\left\{\frac{1}{3}2^k < |\xi| < 3\cdot 2^k\right\}$.

L'affirmation du lemme 10.2.4 concernant P_{-1} résulte donc immédiatement de (10.2.2) et du lemme 10.2.2.

Le symbole $\widetilde{q}_k(x,\xi) = q\left(\dfrac{x}{2^k}, 2^k\xi\right)$ est à support dans $\{|\xi| \leq 3\}$ et vérifie :

$$\left|\partial_\xi^\varepsilon \widetilde{q}_k(x,\xi)\right| \leq M'_\alpha 2^{k(m+|\alpha|)}\,.$$

Par conséquent, $\widetilde{Q}_k$ est borné de L^∞ dans L^∞ et de norme majorée par $M''2^{k(m+|\alpha|)}$. Maintenant Q_k se déduit de $\widetilde{Q}_k$ par le changement de variable $x \to 2^{-k}x$ (voir lemme 9.5.8), et Q_k est donc borné de L^∞ dans L^∞, de même norme que $\widetilde{Q}_k$. On a donc montré que :

$$\|\partial_x^\alpha P_k f\|_{L^\infty} \le M''_\alpha 2^{k(m+|\alpha|)} \|f\|_{L^\infty} . \tag{10.2.4}$$

On remarque alors que $\widetilde{f}_j = 0$ sur le support de p_k si $|j-k| \geq 4$. Par conséquent on a :

$$P_k f = \sum_{|j-k|\le 3} P_k f_j .$$

Utilisant (10.2.4) et (10.2.1), on obtient que :

$$\|\partial_x^\alpha P_k f\|_{L^\infty} \le C_\alpha 2^{k(m+|\alpha|-r)} \|f\|_{C^r(\mathbb{R}^n)} ,$$

et le lemme est démontré. □

On en déduit le théorème 10.2.3, qui implique la partie Hölder du théorème 10.2.1. □

Proposition 10.2.5. — *Soit $p(x,\xi)$ une fonction sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui vérifie :*

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)\right| \le M_\alpha \left(1+|\xi|\right)^{|\alpha|-|\beta|+m}$$

pour tout α, tout $|\beta| \le [\frac{n}{2}]+1$, tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Alors pour $s>0$, $s>m$, l'opérateur P de symbole p est borné de H^s dans H^{s-m}.

Preuve de la proposition 10.2.5. — Elle est exactement similaire à celle de la proposition précédente, en remplaçant les lemmes 10.1.2 et 10.1.3 par les lemmes 10.1.4 et 10.1.5, et le lemme 10.2.2 par le lemme 9.5.4. □

Ceci achève la preuve du théorème 10.2.1. □

10.3. Opérateurs paradifférentiels

Les opérateurs de type $(1,1)$ n'opèrent pas de L^2 dans L^2 (bien qu'opérant de H^s dans H^s pour $s>0$). Nous allons introduire une sous-classe de ces opérateurs qui sont bornés de L^2 dans L^2. On peut résumer ce résultat sous la forme :

Théorème 10.3.1. — *Soit $p(x,\xi)$ une fonction sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui vérifie :*

$$\left|\partial_\xi^\beta p(x,\xi)\right| \le M \left(1+|\xi|\right)^{-|\beta|}$$

pour tout $|\beta| \le N = [\frac{n}{2}]+1$ et tous (x,ξ). On suppose en outre que pour tout ξ, le support de la transformée de Fourier en x, $\widehat{p}(\eta,\xi)$, est inclus dans la boule $\{|\eta| \le \varepsilon|\xi|\}$, ε étant un réel <1.

Alors l'opérateur P de symbole p est borné de L^2 dans L^2.

Remarque 10.3.2. — Par le lemme 10.1.1, on voit que p est C^∞ en x et que

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)\right| \le C_\alpha M \left(\varepsilon|\xi|\right)^{|\alpha|} \left(1+|\xi|\right)^{-|\beta|} ,$$

et donc p est bien un symbole de type $(1,1)$ (et de degré 0).

Démonstration. — Elle est essentiellement la même que celle de la proposition 9.5.9. On écrit, avec la partition de l'unité (10.1.1),

$$p(x,\xi) = p(x,\xi)\psi(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} p(x,\xi)\chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right).$$

L'opérateur de symbole $p(x,\xi)\psi(\xi)$ relève immédiatement du lemme 9.5.4, et est borné de L^2 dans L^2. Comme pour le lemme 9.5.10, on voit que le symbole $p_j(x,\xi) = p(x,\xi)\chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ vérifie

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_j(x,\xi)\right| \le CM2^{j(|\alpha|-|\beta|)},$$

pour $|\alpha| \le N$, $|\beta| \le N$.

Le symbole $q_j(x,\xi) = p_j\left(\frac{x}{2^j}, 2^j\xi\right)$ vérifie donc

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q_j(x,\xi)\right| \le CM\,,$$

pour $|\alpha| \le N$, $|\beta| \le N$, et la proposition 9.5.5 montre que Q_j est borné de L^2 dans L^2, de norme $C'M$. Par le lemme 9.5.8, il en est de même de P_j. On a donc :

$$\|P_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C'M\,\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{10.3.1}$$

Maintenant on écrit que :

$$\widehat{P_j u}(\eta) = \int \widehat{p}(\eta-\xi,\xi)\chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\widehat{u}(\xi)d\xi\,.$$

Notant u_j la fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{u}_j(\xi) = \widehat{u}(\xi)$ si ξ est dans la couronne $\Gamma_j = \{\xi \,/\, \frac{2^j}{3} \le |\xi| \le 3\cdot 2^j\}$, et $\widehat{u}_j(\xi) = 0$ si $\xi \notin \Gamma_j$, on voit que $P_j u = P_j u_j$, et que le support de $\widehat{P_j u}$ est dans la couronne élargie :

$$\Gamma'_j = \left\{\eta \,/\, \frac{(1-\varepsilon)}{3}2^j \le |\eta| \le 3(1+\varepsilon)2^j\right\}.$$

En effet, si $|\eta| \le \frac{1-\varepsilon}{3}2^j$ et $\widehat{p}(\eta-\xi,\xi) \ne 0$, on a $|\eta-\xi| \le \varepsilon|\xi|$, et $|xi| \le \frac{1}{1-\varepsilon}|\eta| \le \frac{1}{3}2^j$; de même, si $|\eta| > 3(1+\varepsilon)2^j$ et $\widehat{p}(\eta-\xi,\xi) \ne 0$, on a $|\xi| \ge \frac{|\eta|}{1+\varepsilon} > 3\cdot 2^j$.

On remarque alors que chaque point η est dans un nombre fini ($\le 2\ln\left(\frac{3}{1-\varepsilon}\right)/\ln 2$) couronnes Γ'_j. On a donc

$$\Big|\sum_j \widehat{P_j u}(\eta)\Big|^2 \le C(\varepsilon)\sum_j \left|\widehat{P_j u}(\eta)\right|^2, \quad \text{et} \quad \Big\|\sum_j \widehat{P_j u}\Big\|_{L^2}^2 \le C(\varepsilon)\sum_j \left\|\widehat{P_j u}\right\|_{L^2}^2.$$

Puisque $P - ju = P_j u_j$, ondéduit de (10.3.1) et de la relation

$$\sum_j \|u_j\|_{L^2}^2 \le 4\,\|u\|_{L^2}^2$$

(cf (9.5.4)), que l'on a :

$$\|Pu\|_{L^2}^2 \le C(\varepsilon)(C')^2 M^2 4\,\|u\|_{L^2}^2\,,$$

et le théorème 10.3.1 suit. □

CHAPITRE 11

OPÉRATEUR PARADIFFÉRENTIELS

11.1. Introduction

Rappelons que pour m réel, $S^m_{1,1}$ désigne l'espace des fonctions σ, C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et telles que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha,\beta}$ pour laquelle :

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,, \quad \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|\xi|)^{m+|\alpha|-|\beta|}\ . \tag{11.1.1}$$

L'opérateur $\sigma(x, D_x)$ est défini par la formule :

$$\sigma(x,D_x)y(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi\,, \tag{11.1.2}$$

qui a bien un sens si $\sigma(x,\cdot)\widehat{u}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

En particulier, si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, les dérivations sous le signe somme et les intégrations par parties en ξ sont justifiées et on voit que $\sigma(x, D_x)u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. L'opérateur $\sigma(x, D_x)$ opère donc de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.

Maintenant, si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est tel que $\widehat{u}$ soit à support compact, on peut encore définir $\sigma(x, D_x)u$ par la formule (11.1.2), à condition de donner à l'intégrale la signification d'une dualité $C_0^\infty(\mathbb{R}^n_\xi) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_\xi)$.

Au chapitre précédent nous avons montré :

Théorème 11.1.1. — *Si r est un réel > 0 non entier, tel que $r - m$ soit aussi > 0 non entier, l'opérateur $\sigma(x, D_x)$, associé au symbole $\sigma \in S^m_{1,1}$, se prolonge en opérateur borné de $C^r(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{r-m}(\mathbb{R}^n)$.*

Si $u \in C^r(\mathbb{R}^n)$, l'écriture (11.1.2) prend alors une signification tout à fait conventionnelle, qui coïncide avec la signification indiquée précédemment si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ou si $\widehat{u}$ est à support compact.

Nous introduisons maintenant des sous-classes de $S^m_{1,1}$:

Définition 11.1.2. — *Σ^m_0 désignera l'espace des fonctions $\sigma(x, \xi)$ telles qu'il existe $\varepsilon < 1$ de sorte que la transformée de Fourier en x de σ, $\widehat{\sigma}(\eta, \xi)$, soit à support dans le cône $\{|\eta| \leq \varepsilon|\xi|\}$, et telles que, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe C_β pour laquelle :*

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,, \quad \left|\partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C_\beta\,(1+|\xi|)^{m-|\beta|}\ . \tag{11.1.3}$$

On a déjà vu que (voir lemme 10.1.1 et remarque 10.3.2) que la condition de support et (11.1.3) impliquent (11.1.1), si bien que $\Sigma_0^m \subset S_{1,1}^m$.

Maintenant, pour $r > 0$ (non entier) on introduit Σ_r^m l'espace des fonctions $\sigma(x,\xi)$ dont la transformée de Fourier $\widehat{\sigma}(\eta,\xi)$ est à support dans un cône $\{|\eta| \le \varepsilon|\xi|\}$, pour un certain $\varepsilon < 1$, et telles que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe C_β pour laquelle :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n\,, \quad \left\|\partial_\xi^\beta \sigma(\cdot,\xi)\right\|_{C^r(\mathbb{R}^n)} \le C_\beta \,(1+|\xi|)^{m-|\beta|}\ .$$

Lemme 11.1.3. — *Pour $r \ge 0$, $m \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, on a les inclusions $\Sigma_r^m \subset \Sigma_0^m \subset S_{1,1}^m$ et $\Sigma_r^m \subset \Sigma_{r+\rho}^{m+\rho}$.*

Démonstration. — L'inclusion $\Sigma_r^m \subset \Sigma_0^m$ résulte de la définition et l'inclusion $\Sigma_0^m \subset S_{1,1}^m$ a déjà été signalée.

L'inclusion $\Sigma_r^m \subset \Sigma_{r+\rho}^{m+\rho}$ résulte de l'inégalité suivante (lemme 10.1.1) :

$$\|u\|_{C^{r+\rho}} \le C\lambda^\rho \,\|u\|_{C^r}\ ,$$

si $\widehat{u}$ est à support dans la boule $\{|\eta| \le \lambda\}$. □

11.2. Un exemple : le paraproduit

Lemme 11.2.1. — *Soient $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$ et $R > 0$. Il existe des fonctions $\psi(\eta,\xi)$, C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, nulles pour $|\eta| \ge \varepsilon_2|\xi|$, valant 1 pour $|\eta| \le \varepsilon_1|\xi|$ et $|\xi| \ge R$, et telles que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha,\beta}$ pour laquelle :*

$$\forall (\eta,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,, \quad \left|\partial_\eta^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\eta,\xi)\right| \le C_{\alpha,\beta}\,(1+|\xi|)^{-|\alpha|-|\beta|}\ . \tag{11.2.1}$$

Démonstration. — Il existe $\chi(\eta,\xi)$ homogène de degré 0 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ et C^∞ pour $(\eta,\xi) \ne (0,0)$, telle que χ vaille 1 pour $|\eta| \le \varepsilon_1|\xi|$ et 0 pour $|\eta| \ge \varepsilon_2|\xi|$.

Pour éliminer la singularité à l'origine, on introduit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 pour $|\xi| \ge R$ et 0 pour $|\xi| \le \frac{R}{2}$, et on pose $\psi(\eta,\xi) = \chi(\eta,\xi)\varphi(\xi)$. La fonction $\partial_\eta^\alpha \partial_\xi^\beta \chi$ est homogène de degré $-|\alpha| - |\beta|$ et continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$. Par conséquent χ (et donc ψ) vérifie (11.2.1) pour $|\xi| \ge 1$. Pour $|\xi| \le 1$, ψ est C^∞, et (11.2.1) suit. □

Lemme 11.2.2. — *Soit $\psi(\eta,\xi)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, à support dans $\{|\eta| \le C|\xi|\}$, et vérifiant* (11.2.1). *Alors la transformée inverse de Fourier :*

$$G(y,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\cdot\eta}\psi(\eta,\xi)d\eta$$

vérifie : pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe C_β tel que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n\,, \quad \left\|\partial_\xi^\beta G(\cdot,\xi)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C_\beta\,(1+|\xi|)^{-|\beta|}\ .$$

Démonstration. — Il suffit d'écrire :

$$\left|y^\alpha \partial_\xi^\beta G(y,\xi)\right| = \left|\int e^{iy\cdot\eta}\partial_\eta^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\eta,\xi)\frac{d\eta}{(2\pi)^n}\right| \le C_{\alpha,\beta}\,(1+|\xi|)^{n-|\alpha|-|\beta|}$$

et, en sommant pour tous les $|\alpha| \le n+1$:

$$\left|\partial_\xi^\beta G(y,\xi)\right| \le C_\beta \frac{|\xi|^n}{(1+|\xi|\,|y|)^{n+1}}\,(1+|\xi|)^{-|\beta|}\ ,$$

ce qui implique le lemme. $\square$

Proposition 11.2.3. — *Soit ψ comme au lemme 11.2.1 et soit $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C^r(\mathbb{R}^n)$, $r > 0$ non entier). Alors le symbole :*

$$\sigma_a(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\eta\cdot x} \psi(\eta,\xi)\widehat{a}(\eta)d\eta \tag{11.2.2}$$

appartient à Σ_0^0 (resp. Σ_r^0).

Démonstration. — On a $\widehat{\sigma}_a(\eta,\xi) = \psi(\eta,\xi)\widehat{a}(\eta)$, si bien que la condition sur le support de $\widehat{\sigma}_a$ est satisfaite puisque ψ est à support dans $\{|\eta| \leq \varepsilon_2|\xi|\}$.

Dans (11.2.2), l'intégrale a une signification symbolique, puisque $\widehat{a}$ n'est pas forcément une fonction. (C'est une dualité $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$, puisque $\eta \mapsto e^{i\eta\cdot x}\psi(\eta,\xi) \in \mathcal{S}$ et que $\widehat{a} \in \mathcal{S}'$.) En fait, revenant par Fourier, on peut aussi écrire :

$$\sigma_a(x,\xi) = \int G(y,\xi)a(x-y)dy\,, \tag{11.2.3}$$

et compte tenu du lemme 11.2.2, l'intégrale a maintenant un sens. On a aussi :

$$\partial_\xi^\beta \sigma_a(x,\xi) = \int \partial_\xi^\beta G(y,\xi)a(x-y)dy\,,$$

et on conlcut en utilisant le lemme 11.2.2 et le fait que la convolution par une fonction de L^1 est un opérateur borné de L^∞ dans L^∞ et de C^r dans C^r. $\square$

Proposition 11.2.4. — *Soit $\chi(\eta,\xi)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, vérifiant des estimations* (11.2.1)*, et à support dans la réunion d'une boule $\{|\xi|^2 + |\eta|^2 \leq R^2\}$ et d'un cône $\{\varepsilon_1|\xi| \leq |\eta| \leq \varepsilon_2|\xi|\}$ ($R > 0$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ étant donnés). Alors, si $a \in C^r(\mathbb{R}^n)$, le symbole*

$$\tau(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\eta} \chi(\eta,\xi)\widehat{a}(\eta)d\eta$$

est dans la classe $S_{1,1}^{-r}$.

Remarque 11.2.5. — Cett proposition montre que si l'on change de fonction ψ (satisfaisant les conclusions du lemme 11.2.1) pour définir le symbole (11.2.2), on modifie ce symbole σ_a par un terme de $S_{1,1}^{-r}$ (en fait de Σ_0^{-r}), pourvu que $a \in C^r(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. — On utilise une décomposition dyadique de a, $a = a_{-1} + \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, avec

$$\|a_j\|_{L^\infty} \leq C \cdot 2^{-rj}\,, \tag{11.2.4}$$

$$\operatorname{supp} \widehat{a}_{-1} \subset \{|\xi| \leq 1\}\,, \quad \operatorname{supp} \widehat{a}_j \subset \left\{\frac{1}{3}2^j < |\xi| < 3 \cdot 2^j\right\}.$$

On voit alors que

$$\partial_\xi^\beta \tau(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\eta} \partial_\xi^\beta \chi(\eta,\xi) \sum_{j\in J} \widehat{a}_j(\eta)d\eta\,,$$

où J est l'ensemble des indices j tels que $\frac{1}{3}\varepsilon_1|\xi| \leq 2^j \leq 3\varepsilon_2|\xi|$ si $|\xi| \geq \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + R\right)$, et l'ensemble $\{-1,0,\ldots,j_0\}$ avec $2^{j_0+1} > 3\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ si $|\xi| \leq \frac{1}{\varepsilon_1} + R$.

Introduisant la fonction

$$H(y,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\cdot\eta}\chi(\eta,\xi)d\eta\,,$$

on a :

$$\partial_\xi^\beta \tau(x,\xi) = \sum_{j\in J} \int \partial_\xi^\beta H(y,\xi) a_j(x-y)dy\,,$$

et avec le lemme 11.2.2 on obtient que :

$$\left|\partial_\xi^\beta \tau(x,\xi)\right| \le C_\beta \,(1+|\xi|)^{-|\beta|} \sum_{j\in J} \|a_j\|_{L^\infty}\ . \tag{11.2.5}$$

Pour $|\xi| \ge \frac{1}{\varepsilon_1} + R$, on a d'après (11.2.4) :

$$\sum_{j\in J} \|a_j\|_{L^\infty} \le C \sum_{\frac{\varepsilon_1}{3}|\xi| \le 2^j \le 3\varepsilon_2|\xi|} 2^{-rj} \le C'|\xi|^{-r}\,,$$

et on en déduit donc que

$$\left|\partial_\xi^\beta \tau(x,\xi)\right| \le C'_\beta \,(1+|\xi|)^{-|\beta|-r} \tag{11.2.6}$$

pour $|\xi| \ge \frac{1}{\varepsilon_1} + R$. Pour $|\xi| \le \frac{1}{\varepsilon_1} + R$, on tire tout simplement de (11.2.5) que :

$$\left|\partial_\xi^\beta \tau(x,\xi)\right| \le C''_\beta\,,$$

et (11.2.6) est donc vraie (peut-être avec d'autres constantes C'_β) pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Par ailleurs, $\widehat{\tau}(\eta,\xi) = \chi(\eta,\xi)\widehat{a}(\eta)$ est à support dans la boule $\{|\eta| \le R\}$ si $|\xi| \le R$, et dans la boule $\{|\eta| \le \varepsilon_2|\xi|\}$ si $|\xi| \ge R$. Utilisant le lemme 10.1.1, on voit alors que :

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tau(x,\xi)\right| \le C_\alpha \,(1+|\xi|)^{|\alpha|} \left\|\partial_\xi^\beta \tau(\cdot,\xi)\right\|_{L^\infty} \le C_{\alpha,\beta} \,(1+|\xi|)^{|\alpha|-|\beta|-r}\ ,$$

et la proposition est démontrée. □

Définition 11.2.6. — *Pour $a \in L^\infty$ et $u \in C^\mu$ ($\mu > 0$ non entier), on note $\pi(a,u)$ le paraproduit de a et u, défini par : $\pi(a,u) = \sigma_a(x,D)u$.*

Remarquons que puisque $\sigma_a \in S^0_{1,1}$, l'opérateur $\sigma_a(x,D)$ opère de C^μ dans C^μ, et le paraproduit est donc bien défini. En outre, on peut écrire :

$$\|\pi(a,u)\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} \le C \,\|a\|_{L^\infty} \,\|u\|_{C^\mu}\ . \tag{11.2.7}$$

Il faut cependant remarquer que ce paraproduit dépend du choix de la fonction ψ utilisée pour définir (11.2.2). Pour le monent, on va indiquer cette dépendance en notant π_ψ le paraproduit défini à l'aide de la fonction ψ.

Lemme 11.2.7. — *Si ψ et ψ_1 sont deux fonctions comme au lemme 11.2.1, si $a \in C^r(\mathbb{R}^n)$, $u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ et si $r+\mu$ n'est pas un entier, alors*

$$\pi_\psi(a,u) - \pi_{\psi_1}(a,u) \in C^{r+\mu}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Preuve. — En effet, si ψ (resp. ψ_1) satisfait aux conclusions du lemme 11.2.1 avec les paramètres ε_1', ε_2', R' (resp. ε_1'', ε_2'', R''), alors $\chi = \psi - \psi_1$ satisfait aux hypothèses de la proposition 11.2.4 avec $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon_1', \varepsilon_1'')$, $\varepsilon_2 = \max(\varepsilon_2', \varepsilon_2'')$ et $R = \max(R', R'')$.

Par conséquent, le symbole τ associé à χ et et à a comme à la proposition 11.2.4 est dans $S^{-r}_{1,1}$; d'après le théorème 11.1.1, l'opérateur $\tau(x, D)$ est borné de C^μ dans $C^{r+\mu}$ et le lemme en découle puisque :

$$\pi_\psi(a, u) - \pi_{\psi_1}(a, u) = \tau(x, D)\,.$$

□

Nous allons donner maintenant une autre définition du paraproduit : introduisons une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 pour $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et 0 pour $|\xi| \geq 1$. On notera S_k l'opérateur de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$ défini par :

$$\widehat{S_k u}(\xi) = \varphi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)\widehat{u}(\xi)\,, \tag{11.2.8}$$

et Δ_k l'opérateur $S_{k+1} - S_k$:

$$\widehat{\Delta_k u}(\xi) = \left(\varphi\left(\frac{\xi}{2^{k+1}}\right) - \varphi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)\right)\widehat{u}(\xi)\,. \tag{11.2.9}$$

On notera $\varphi_k(\xi) = \varphi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)$, et $\theta_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$; de même on notera $\check{\varphi}_k$ et $\check{\theta}_k$ les transformées inverses de Fourier de φ_k et θ_k. Comme d'habitude, on a :

$$\check{\varphi}_k(x) = 2^{nk}\check{\varphi}(2^k x) \quad ; \quad \|\check{\varphi}_k\|_{L^1} = \|\check{\varphi}\|_{L^1}\ ,$$

de sorte que :

$$\|S_k u\|_{L^\infty} \leq \|\check{\varphi}\|_{L^1}\,\|u\|_{L^\infty}\ . \tag{11.2.10}$$

Le lemme suivant est une variante des lemmes 10.1.2 et 10.1.3 :

Lemme 11.2.8. — *Une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ appartient à l'espace $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ ($\mu > 0$ non entier) si et seulement si il existe $C > 0$ telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \quad \|\Delta_k u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-\mu k}\,.$$

Ce lemme et (11.2.10) permettent de définir le “paraproduit” :

$$\pi'(a, u) = \sum_{k=2}^{\infty} S_{k-2}(a)\Delta_k(u)\,, \tag{11.2.11}$$

pour $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ ($\mu > 0$ non entier), la série convergeant géométriquement.

Lemme 11.2.9. — *Avec les notations ci-dessus, définissons la fonction :*

$$\psi(\eta, \xi) = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_{k-2}(\eta)\theta_k(\xi)\,. \tag{11.2.12}$$

Alors cette fonction satisfait aux conclusions du lemme 11.2.1 avec

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{16} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad R = 4\,.$$

Démonstration. — Pour chaque (η, ξ), la série (11.2.12) ne comporte au plus que trois termes non nuls, correspondant à des indices k tels que

$$|\eta| \leq 2^{k-2} \quad ; \quad 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1} \,. \tag{11.2.13}$$

Pour $|\eta| \geq \frac{1}{2}|\xi|$, tous les termes sont nuls, et $\psi(\eta, \xi) = 0$. Pour $|\eta| \leq \frac{1}{16}|\xi|$, on a $\varphi_{k-2}(\eta) = 1$ si $\theta_k(\xi) \neq 0$, et alors :

$$\psi(\eta, \xi) = \sum_{k=2}^{\infty} \theta_k(\xi) = 1 - \varphi_2(\xi) \,,$$

si bien que $\psi(\eta, \xi) = 1$ si $|\eta| \leq \frac{1}{16}|\xi|$ et $|\xi| \geq 4$.

En outre, dériver en η ou en ξ fait apparaitre un facteur 2^{-k}, c'est-à-dire, compte tenu de (11.2.13), un facteur $(1 + |\xi|)^{-1}$. On en déduit que la fonction ψ satisfait bien les estimations (11.2.1). □

Proposition 11.2.10. — *Si ψ est la fonction* (11.2.12)*, le paraproduit $\pi'(a, u)$, défini par* (11.2.11)*, coïncide avec le paraproduit $\pi(a, u)$.*

Démonstration. — Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ et continuité des paraproduits, il suffit de prouver l'égalité $\pi'(a, u) = \pi_\psi(a, u)$ pour $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a alors :

$$S_k a(x) = \int \check{\varphi}_k(x - y) a(y) dy \quad ; \quad \Delta_k u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \theta_k(\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \,,$$

si bien que

$$S_{k-2} a \Delta_k u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \sigma_k(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \,,$$

avec

$$\sigma_k(x, \xi) = \int \check{\varphi}_{k-2}(x - y) \theta_k(\xi) a(y) dy \,.$$

Pour tout ξ, la série $\psi(\eta, \xi) = \sum \varphi_{k-2}(\eta) \theta_k(\xi)$ ne comporte au plus que trois termes non nuls ; il en est de même de la série :

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{k=2}^{\infty} \sigma_k(x, \xi) = \int G(x - y, \xi) a(y) dy \,, \tag{11.2.14}$$

avec

$$G(y, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\cdot\eta} \psi(\eta, \xi) d\eta = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_{k-2}(y) \theta_k(\xi) \,.$$

En outre,

$$|\sigma_k(x, \xi)| \leq 2 \left\| \check{\varphi} \right\|_{L^1} \left\| \varphi \right\|_{L^\infty} \left\| a \right\|_{L^\infty} \,,$$

et par le thèorème de la convergence dominée, on voit que :

$$\pi'(a, u) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \sigma(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \,.$$

La proposition suit, puisque d'après les formules (11.2.3) et (11.2.14), $\sigma = \sigma_a$. □

Plutôt que la formule (11.2.11), on aurait pu poser :

$$\pi''(a, u) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(a) \Delta_k(u) \,. \tag{11.2.15}$$

Lemme 11.2.11. — *Pour $a \in C^r(\mathbb{R}^n)$, $u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ (r, μ et $r+\mu$ non entiers), on a :*

$$\pi'(a,u) - \pi''(a,u) \in C^{r+\mu}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Démonstration. — La fonction $\psi_1(\eta,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\eta)\theta_k(\xi)$ est C^∞, vérifie (11.2.1), est à support dans $\{|\eta| \leq 2|\xi|\}$, et vaut 1 pour $|\eta| \leq \frac{1}{4}|\xi|$. On peut donc appliquer la proposition 11.2.4 à la fonction $\psi - \psi_1$, et le lemme suit, puisque $\pi'(a,u) - \pi''(a,u) = \tau(x,D)u$ (τ associé à $\psi - \psi_1$ par la proposition 11.2.4). □

Remarque. — La fonction ψ_1 ci-dessus n'est pas à support dans un cône $\{|\eta| \leq \varepsilon_2|\xi|\}$ avec $\varepsilon_2 < 1$. Le symbole $\sigma_1(x,\xi) = \int e^{iy\cdot\eta}\psi_1(\eta,\xi)\widehat{a}(\eta)d\eta$ n'appartient donc pas à Σ_r^0, bien qu'il soit toujours dans $S_{1,1}^0$. En fait la condition $\varepsilon_2 < 1$ imposée à ψ au lemme 11.2.1 n'apparait d'aucune utilité dans ce paragraphe ; elle ne sera utilisée qu'à partir du paragraphe 11.4.

11.3. Paralinéarisation

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 11.3.1. — *Soit F une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ ($\mu > 0$, non demi-entier). Alors :*

$$F(u) - \pi\left(F'(u), u\right) \in C^{2\mu}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{11.3.1}$$

Avant de passer à la démonstration, faisons quelques remarques : d'abord, puisque $u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$, $F(u) \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$, et de même $F'(u) \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, compte tenu des résultats du paragraphe précédent, on peut utiliser n'importe quel paraproduit pour établir (11.3.1) ; grâce au lemme 11.2.11, on utilisera en fait π'' défini en (11.2.15).

Pour simplifier les notations, on posera $u_k = S_k u$, $v_k = \Delta_k u = u_{k+1} - u_k$. D'après le lemme 11.2.8 et le lemme 10.1.1, on a :

$$\|\partial_x^\alpha v_k\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\mu)k}\,. \tag{11.3.2}$$

Écrivant que $u = u_k + \sum_{\ell=k}^{\infty} v_\ell$, on voit alors que pour $|\alpha| < \mu$,

$$\|\partial_x^\alpha (u - u_k)\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\mu)k}\,. \tag{11.3.3}$$

De même, les u_k sont C^∞ et

$$\|\partial_x^\alpha u_k\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\mu)_+ k}\,, \tag{11.3.4}$$

en notant comme d'habitude $(|\alpha| - \mu)_+ = \max(0, |\alpha| - \mu)$.

Puisque $u_k \to u$ dans L^∞, on a $F(u_k) \to F(u)$ dans L^∞ et :

$$F(u) = F(u_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(F(u_{k+1}) - F(u_k)\right)\,, \tag{11.3.5}$$

série convergente dans L^∞. La formule de Taylor :

$$F(u) - F(u') = (u-u')F'(u') + (u-u')^2 \int_0^1 F''\left(u' + t(u-u')\right)(1-t)dt$$

permet d'écrire :

$$F(u_{k+1}) - F(u_k) = F'(u_k)v_k + m_k v_k^2\,, \tag{11.3.6}$$

avec

$$m_k(x) = \int_0^1 F''\left(u_k(x) + tv_k(x)\right)(1-t)dt\,.$$

Lemme 11.3.2. — i) *Les fonctions m_k sont C^∞ et vérifient :*

$$\|\partial_x^\alpha m_k\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{k|\alpha|}\,.$$

ii) *Les fonctions $m_k v_k^2$ sont C^∞ et vérifient :*

$$\left\|\partial_x^\alpha\left(m_k v_k^2\right)\right\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{k(|\alpha|-2\mu)}\,.$$

iii) *La série $\sum_{k=0}^{\infty} m_k v_k^2$ converge eet définit une fonction de $C^{2\mu}(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. — Les fonctions $w_k = u_k + tv_k$ vérifient

$$\|\partial_x^\alpha w_k\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{k|\alpha|}\,.$$

En particulier, $\|w_k\|_{L^\infty} \leq C_0$. Utilisant le fait que F'' est C^∞ sur $[-C_0, C_0]$ et des majorants pour les normes L^∞ de ses dérivées, on voit que $F''(w_k)$ est C^∞ et vérifie :

$$\left\|\partial_x^\alpha F''(w_k)\right\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{k|\alpha|}\,,$$

uniformément pour $t \in [0,1]$. Intégrant en t, on obtient i).

Pour obtenir ii), il suffit d'écrire $\partial_x^\alpha(m_k v_k^2)$ comme une somme de termes de la forme $\partial_x^{\alpha'} m_k \partial_x^{\alpha''} v_k \partial_x^{\alpha'''} v_k$ avec $|\alpha| = |\alpha'| + |\alpha''| + |\alpha'''|$, et d'utiliser les estimations i) et (11.3.2).

Enfin, iii) est une conséquence immédiate de ii) (lemme 10.1.3) puisque 2μ est supposé non entier. □

Lemme 11.3.3. — *Si G est une application C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si $u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ ($\mu > 0$ non entier), alors $G(u)$ est dans $C^\mu(\mathbb{R}^n)$. En outre, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe C_α telle que*

$$\forall k\,, \quad \|\partial_x^\alpha\left(S_k G(u) - G(S_k u)\right)\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{k(|\alpha|-\mu)}\,.$$

Démonstration. — u étant de classe $C^{[\mu]}$ à dérivées dans $\leq [\mu]$ bornées sur $\mathbb{R}^n$, il est clair qu'il en est de même de $G(u)$. On écrit alors $\partial_x^\alpha G(u)$ comme une somme de termes de la forme :

$$G^{(p)}(u)\partial^{\alpha_1}u\,\partial^{\alpha_2}u \ldots \partial^{\alpha_p}u\,, \tag{11.3.7}$$

avec $p \geq 1$, $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_p| = |\alpha|$. On écrit que

$$\left|G^{(p)}\left(u(x)\right) - G^{(p)}\left(u(y)\right)\right| \lesssim |u(x) - u(y)|\,,$$

et il est alors clair que chaque terme de $\partial_x^\alpha G(u)$ est de classe $C^{\mu-[\mu]}$, si bien que $G(u) \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$.

Les $S_k u$ étant uniformément bornés, on a :

$$\left|G\left(S_k u(x)\right) - G\left(u(x)\right)\right| \lesssim \left|S_k u(x) - u(x)\right|\,,$$

et avec (11.3.3) on voit que

$$\|G(S_k u) - G(u)\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\mu k}\,.$$

Plus généralement, pour $0 \leq |\alpha| < \mu$, on écrit $\partial_x^\alpha G(S_k u) - \partial_x^\alpha G(u)$ comme une somme de termes de la forme :

$$G^{(p)}\left(S_k u\right) \partial^{\alpha_1} S_k u \ldots \partial^{\alpha_p} S_k u - G^{(p)}\left(u\right) \partial^{\alpha_1} u \ldots \partial^{\alpha_p} u\,.$$

Utilisant (11.3.3) et (11.3.4) et les majorations

$$\left\| G^{(p)}(S_k u) - G^{(p)}(u) \right\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\mu k}\,,$$

on obtient finalement que pour $|\alpha| < \mu$ on a :

$$\left\| \partial_x^\alpha G(S_k u) - \partial_x^\alpha G(u) \right\|_{L^\infty} \lesssim 2^{k(|\alpha| - \mu)}\,. \tag{11.3.8}$$

Appliquant (11.3.3) à la fonction $G(u)$, on a aussi, pour $|a| < \mu$:

$$\left\| \partial_x^\alpha S_k G(u) - \partial_x^\alpha G(u) \right\|_{L^\infty} \lesssim 2^{k(|\alpha| - \mu)}\,. \tag{11.3.9}$$

Ajoutant (11.3.8) et (11.3.9), on obtient l'estimation souhaitée pour les $|\alpha| < \mu$.

Maintenant, si $|\alpha| > \mu$, appliquant (11.3.4) à la fonction $G(u)$, on voit que

$$\left\| \partial_x^\alpha S_k G(u) \right\|_{L^\infty} \lesssim 2^{k(|\alpha| - \mu)}\,. \tag{11.3.10}$$

Alors que la formule (11.3.7), appliquée à $S_k u$, fournit grâce aux estimations (11.3.4) :

$$\left\| \partial_x^\alpha G(S_k u) \right\|_{L^\infty} \lesssim 2^{k(|\alpha| - \mu)}\,. \tag{11.3.11}$$

(On utilise l'inégalité : $\sum \left(|\alpha_j| - \mu\right)_+ \leq \left(\left(\sum |\alpha_j|\right) - \mu\right)_+$.)

Ajoutant (11.3.10) et (11.3.11), on obtient alors l'inégalité annoncée dans le lemme, pour les $|\alpha| > \mu$. □

Démonstration du théorème 11.3.1. — Notons $r_k = F'(u_k) - S_k F'(u)$. D'après les formules (11.3.5) et (11.3.6), et avec la définition (11.2.15), on a :

$$F(u) = F(u_0) + \pi''\left(F'(u), u\right) + \sum_{k=0}^{\infty} r_k v_k + \sum_{k=0}^{\infty} r_k v_k^2\,.$$

u_0 est C^∞ à dérivées bornées et il en est de même de $F(u_0$. D'après le lemme 11.3.2, il nous suffit de montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r_k v_k \in C^{2\mu}(\mathbb{R}^n)$.

D'après le lemme 11.3.3, on a :

$$\left\| \partial_x^\alpha r_k \right\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{k(|\alpha| - \mu)}\,,$$

et avec (11.3.3) et la formule de Leibniz, on voit que :

$$\left\| \partial_x^\alpha \left(r_k v_k\right) \right\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{k(|\alpha| - 2\mu)}\,.$$

Le lemme 10.1.3 implique alors que *dis* $\sum_{k=0}^{\infty} r_k v_k \in C^{2\mu}(\mathbb{R}^n)$, et le théorème est démontré. □

Théorème 11.3.4. — *Soit $F(x,y)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$, bornée ainsi que toutes ses dérivées sur tout ensemble $\mathbb{R}^n \times K$, K compact de $\mathbb{R}^N$. Soient $u_1, \ldots, u_N$ des fonctions de $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ ($\mu > 0$ non $\frac{1}{2}$ entier). Alors :*

$$F\left(x, u_1(x), \ldots, u_N(x)\right) - \sum_{j=1}^{N} \pi\left(\frac{\partial F}{\partial y_j}\left(x, u_1(x), \ldots, u_N(x)\right), u_j(x)\right) \in C^{2\mu}(\mathbb{R}^n)\,.$$

La démonstration, complètement similaire à celle du théorème 11.3.1, sera omise. Notons toutefois que l'extension aux fonctions $F(x, y)$, C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, est pratiquement immédiate. Ensuite, rien n'empêche de considérer u comme une fonction à valeurs vectorielles (R^N), à condition de modifier en conśequence l'écriture de la formule de Taylor avec reste intégral.

Nous allons donner maintenant une application directe du théorème 11.3.4 à la "paralinéarisation" d'équations aux dérivées partielles : on se donne un entier $m > 0$, et on notera A l'ensemble des multiindices $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de longueur $|\alpha| \le m$. Notons N le cardinal de A, et considérons l'espace $\mathbb{R}^N$ dont la variable générique y aura des composantes y_α indexées par A. On considère alors l'équation :

$$F\left(x, \partial^A u(x)\right) = 0\,, \tag{11.3.12}$$

$\partial^A u$ désignant la fonction à valeurs dans R^N dont les composantes sont $\partial^\alpha u$, $\alpha \in A$.

Dans (11.3.12), $F(x, y)$ est supposée être une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$, bornée ainsi que toutes ses dérivées sur tout ensemble $\mathbb{R}^n \times K$, K compact de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 11.3.5. — *Soit $u \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ ($\mu > 0$ non $\frac{1}{2}$ entier) une solution de* (11.3.12). *Pour tout $\alpha \in A$, désignons par $c_\alpha(x)$ la fonction $\frac{\partial F}{\partial y_\alpha}\left(x, \partial^A u(x)\right)$. Alors il existe un opérateur paradifférentiel de symbole $\sigma \in \Sigma_\mu^m$ tel que*

$$\sigma(x, D_x)u = \sum_{\alpha \in A} \pi\left(c_\alpha, \partial^\alpha u\right) \in C^{2\mu}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Démonstration. — Il résulte immédiatement du théorème 11.3.4 que

$$\sum_{\alpha \in A} \pi\left(c_\alpha, \partial^\alpha u\right) = v \in C^{2\mu}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Revenant à la définition 11.2.6 (ou utilisant la proposition 11.2.10), et utilisant la proposition 11.2.3, on voit que l'opérateur :

$$f \mapsto \sum_{\alpha \in A} \pi\left(c_\alpha, \partial^\alpha f\right)$$

est un opérateur paradifférentiel de symbole :

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(x, \xi)(i\xi)^\alpha\,, \quad \text{avec } \sigma_\alpha(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\cdot\eta} \psi(\eta, \xi) \widehat{c}_\alpha(\eta) d\eta\,. \tag{11.3.13}$$

Puisque $c_\alpha \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$, σ_α est dans l'espace Σ_μ^0 d'après la proposition 11.2.3, et il est alors clair que le symbole (11.3.13) est dans l'espace Σ_μ^m. □

11.4. Composition des opérateurs paradifférentiels

Les opérateurs de type $(1, 1)$ se composent mal ; cependant, on peut les composer avec des paradifférentiels.

Théorème 11.4.1. — *Soit $\tau \in S_{1,1}^{m'}$ et soit $\sigma \in \Sigma_r^m$ ($r > 0$ non entier). Alors le symbole*

$$(\tau \sharp \sigma)(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < r} \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \tau(x, \xi) \partial_x^\alpha \sigma(x, \xi)$$

appartient à $S^{m+m'}_{1,1}$. *En outre, il existe* $\rho \in S^{m+m'-r}_{1,1}$ *tel que*

$$\tau(x,D)\circ\sigma(x,D) = (\tau\sharp\sigma)(x,D) + \rho(x,D)\,. \tag{11.4.1}$$

Les opérateurs à symboles dans $S^m_{1,1}$ opèrent de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même. La formule (11.4.1) est à prendre au sens de la composition d'opérateurs de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. On l'étendra ensuite par densité-continuité dans tous les espaces où la composition aura un sens.

Démonstration. — On a :

$$\left|\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta\partial_\xi^\alpha\tau(x,\xi)\right| \le C_{\alpha,\beta,\gamma}\,(1+|\xi|)^{|\gamma|-|\beta|-|\alpha|+m'}\ ,$$
$$\left|\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha\sigma(x,\xi)\right| \le C_{\alpha,\beta,\gamma}\,(1+|\xi|)^{|\gamma|-|\beta|+|\alpha|+m}\ .$$

Par la formule de Leibniz, il est alors clair que $\tau\sharp\sigma \in S^{m+m'}_{1,1}$.

Notons $N-1$ la partie entière de r ($0\le N-1<r<N$) et $\varepsilon\in]0,1[$ un réel tel que $\widehat{\sigma}$ soit à support dans le cône $\{|\eta|\le\varepsilon|\xi|\}$. Utilisant le lemme 11.2.1, on peut construire une fonction $\psi(\eta,\xi)$, à support dans la réunion du cône $\{|\eta|\le\varepsilon'|\xi|\}$ et de la boule $\{|\eta|^2+|\xi|^2\le 1\}$, qui vaut 1 sur la réunion du cône $\{|\eta|\le\varepsilon''|\xi|\}$ et de la boule $\{|\eta|^2+|\xi|^2\le\frac14\}$, et qui vérifie des estimations (11.2.1) (on choisit ε' et ε'' tels que $\varepsilon<\varepsilon''<\varepsilon'<1$).

On écrira le développement de Taylor :

$$\tau(x,\xi+\eta) = \sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\tau(x,\xi)\eta^\alpha + \sum_{|\alpha|=N}\rho_\alpha(x,\xi,\eta)\eta^\alpha\,, \tag{11.4.2}$$

avec

$$\rho_\alpha(x,\xi,\eta) = \frac{N}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{N-1}\partial_\xi^\alpha\tau(x,\xi+t\eta)dt\,. \tag{11.4.3}$$

Sur le support de ψ on a (pour $t\in[0,1]$) :

$$\frac{1}{C}\,(1+|\xi|)\le 1+|\xi+t\eta|\le C\,(1+|\xi|)\ ,$$

et alors on en déduit les estimations :

$$\left|\eta^{\gamma''}\partial_\eta^{\gamma'}\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta\partial_\xi^\alpha\tau(x,\xi+t\eta)\right| \le C_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma',\gamma''}\,(1+|\xi|)^{m'+|\gamma|+|\gamma''|-|\alpha|-|\beta|-|\gamma'|}\ .$$

Reportant dans (11.4.3), utilisant (11.2.1) et la formule de Leibniz, on obtient que :

$$\left|\eta^{\gamma''}\partial_\eta^{\gamma'}\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta(\rho_\alpha\psi)\right| \lesssim (1+|\xi|)^{m'+|\gamma|+|\gamma''|-|\alpha|-|\beta|-|\gamma'|}\ .$$

On introduit enfin les fonctions

$$G_\alpha(x,y,\xi) = (2\pi)^{-n}\int e^{iy\cdot\eta}\rho_\alpha(x,\xi,\eta)\psi(\eta,\xi)d\eta\,. \tag{11.4.4}$$

Les estimations sur $\rho_\alpha\psi$ impliquent alors que :

$$\left|y^{\gamma'}\partial_y^{\gamma''}\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta G_\alpha(x,y,\xi)\right| \lesssim (1+|\xi|)^{m'+n+|\gamma|+|\gamma''|-|\alpha|-|\beta|-|\gamma'|}\ .$$

Utilisant ces estimations pour $|\gamma'|\le n+1$, on en tire, comme au lemme 11.2.2 :

$$\left|\partial_y^{\gamma''}\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta G_\alpha(x,y,\xi)\right| \lesssim (1+|\xi|)^{m'+|\gamma|+|\gamma''|-|\alpha|-|\beta|}\,\frac{(1+|\xi|)^n}{(1+(1+|\xi|)|y|)^{n+1}}\,,$$

et finalement que :

$$\left\|\partial_x^\gamma \partial_y^{\gamma'} \partial_\xi^\beta G_\alpha(x,\cdot,\xi)\right\|_{L^1} \lesssim (1+|\xi|)^{m'+|\gamma|+|\gamma'|-|\alpha|-|\beta|}\,. \tag{11.4.5}$$

La fin du théorème 11.4.1 résultera alors des deux lemmes suivants :

Lemme 11.4.2. — *L'opérateur $\tau(x,D)\circ\sigma(x,D)$ est associé au symbole*

$$p(x,\xi) = \tau\sharp\sigma(x,\xi) + \sum_{|\alpha|=N} \int G_\alpha(x,x-y,\xi) D_x^\alpha \sigma(y,\xi)dy\,.$$

Lemme 11.4.3. — *Pour $|\alpha|>r$ et $\sigma\in\Sigma_r^m$, on a :*

$$\left\|\partial_\xi^\beta D_x^\alpha \sigma(\cdot,\xi)\right\|_{L^\infty} \le C_\alpha (1+|\xi|)^{m+|\alpha|-r-|\beta|}\,.$$

En effet, il résulte immédiatement des estimations (11.4.5) et du lemme 11.4.3 que $\int G_\alpha(x,x-y,\xi)D_x^\alpha\sigma(y,\xi)dy$ définit un symbole de degré $m+m'-r$ et de type $(1,1)$. Le lemme 11.4.2 nous dit qu'alors $p-\tau\sharp\sigma\in S_{1,1}^{m+m'-r}$.

Démonstration du lemme 11.4.2. — C'est la formule de composition "usuelle" (cf Chapitre 9), mais nous la justifions avec soin en précisant bien la signification des intégrales.

Introduisons une fonction $\chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dont la transformée de Fourier $\widehat{\chi}$ est à support dans la boule $\{|\eta|\le 1\}$, et telle que $\chi(0)=1$.

Pour $\delta\in]0,1]$, notons $\chi_\delta(x)=\chi(\delta x)$, de sorte que $\widehat{\chi}_\delta(\eta)=\delta^{-n}\widehat{\chi}\left(\frac{eta}{\delta}\right)$ est à support dans la boule $\{|\eta|\le\delta\}$.

Posons $\sigma_\delta(x,\xi)=\chi_\delta(x)\sigma(x,\xi)$. Alors $\widehat{\sigma}_\delta(\eta,\xi)=\widehat{\chi}_\delta*\widehat{\sigma}(\cdot,\xi)$ est à support dans la région $\{|\eta|\le\varepsilon|\xi|+\delta\}$. En outre, $\widehat{\sigma}_\delta$ est C^∞ en (η,ξ) sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, et puisque $\|\chi_\delta\|_{L^1}\le C\delta^{-n}$, on a :

$$\|\sigma_\delta(\cdot,\xi)\|_{L^1}\le C\delta^{-n}(1+|\xi|)^m\,,\quad\text{et}\quad |\widehat{\sigma}_\delta(\eta,\xi)|\le C\delta^{-n}(1+|\xi|)^m\,. \tag{11.4.6}$$

Pour $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\widehat{\sigma_\delta(x,D)}u(\eta) = (2\pi)^{-n}\int \widehat{\sigma}_\delta(\eta-\xi,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi\,,\quad\text{et}$$

$$\tau(x,D)\circ\sigma_\delta(x,D)u(x) = (2\pi)^{-2n}\int e^{ix\cdot\eta}\tau(x,\eta)\widehat{\sigma}_\delta(\eta-\xi,\xi)\widehat{u}(\xi)d\eta\,,$$

les intégrales étant absolument convergentes, grâce aux estimations sur τ et $\widehat{\sigma}_\delta$, au fait que $\widehat{\sigma}_\delta$ soit à support dans $\{|\eta|\le|\xi|+1\}$, et grâce à la décroissance rapide de $\widehat{u}(\xi)$.

Par le théorème de Fubini, on peut alors écrire :

$$\tau(x,D)\circ\sigma_\delta(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}p_\delta(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi\,, \tag{11.4.7}$$

avec

$$p_\delta(x,\xi) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\eta}\tau(x,\xi+\eta)\widehat{\sigma}_\delta(\eta,\xi)d\eta\,, \tag{11.4.8}$$

les intégrales étant toujours absolument convergentes.

C'est maintenant qu'on utilise la formule de Taylor (11.4.2) : puisque $\eta^\alpha\widehat{\sigma}_\delta=\widehat{D_x^\alpha\sigma_\delta}$, on obtient que $p_\delta=\tau\sharp\sigma_\delta+q_\delta$, avec

$$q_\delta(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=N}(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\eta}\rho_\alpha(x,\xi,\eta)\eta^\alpha\widehat{\sigma}_\delta(\eta,\xi)d\eta\,.$$

Pour δ assez petit, $\psi(\eta, \xi)$ vaut 1 sur le support de $\widehat{\sigma}_\delta$. Introduisant cette fonction ψ dans l'intégrale, et transformant de Fourier, on obtient (les intégrales étant toutes absolument convergentes) :

$$q_\delta(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=N} \int G_\alpha(x, x-y, \xi) D_x^\alpha \sigma_\delta(y, \xi) dy \,.$$

C'est-à-dire que le lemme 11.4.2 est démontré pour les symboles σ_δ ($\delta > 0$). Lorsque $\delta \to 0$, les fonctions $D_x^\alpha \sigma_\delta(\cdot, \xi)$ sont uniformément bornées par $C \cdot (1 + |\xi|)^{m+|\alpha|}$ et convergent (uniformément sur tout compact) vers $D_x^\alpha \sigma(\cdot, \xi)$. On voit donc que les $\tau \sharp \sigma_\delta$ sont uniformément bornés et convergent vers $\tau \sharp \sigma$. De même, par le théorème de la convergence dominée, les q_δ sont uniformément bornés et convergent vers $q(x, \xi) = \displaystyle\sum_{|\alpha|=N} \int G_\alpha(x, x-y, \xi) D_x^\alpha \sigma(y, \xi) dy$.

On voit donc que les p_δ sont uniformément bornés en $C \cdot (1 + |\xi|)^{m+m'}$, et convergent pour tout (x, ξ) vers $p = \tau \sharp \sigma + q$.

Le théorème de Lebesgue affirme alors que pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(p_\delta(x, D)u)(x) \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} (p(x, D)u)(x) \,.$$

Par ailleurs $\sigma(x, D)u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $\sigma_\delta(x, D)u = \chi_\delta \sigma(x, D)u \to \sigma(x, D)u$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a donc

$$\tau(x, D) \circ \sigma_\delta(x, D)u \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} \tau(x, D) \circ \sigma(x, D)u \,,$$

et passant à la limite dans (11.4.7), on obtient que

$$\tau(x, D) \circ \sigma(x, D)u = p(x, D)u \,,$$

et le lemme est démontré. $\square$

Démonstration du lemme 11.4.3. — Si u est une fonction de classe C^r dont la transformée de Fourier est à support dans la boule $\{|\eta| \leq \lambda\}$, la décomposition dyadique de u s'écrit :

$$u = \sum_{2^{k-1} \leq \lambda} \delta_k u \,.$$

Puisque $\|\partial_x^\alpha \Delta_k u\|_{L^\infty} \leq C_\alpha \|u\|_{C^r} 2^{k(|\alpha|-r)}$, on obtient que pour $|\alpha| > r$,

$$\|\partial_x^\alpha u\|_{L^\infty} \leq C'_\alpha \|u\|_{C^r} \lambda^{|\alpha|-r} \,. \tag{11.4.9}$$

Le lemme 11.4.3 s'obtient en appliquant la formule (11.4.9) aux fonctions $\partial_\xi^\beta \sigma(\cdot, \beta)$. $\square$

Ceci conclut la preuve du théorème 11.4.1. $\square$

11.5. Calcul symbolique

Nous introduisons pour m réel et $r > 0$ non entier, l'espace Γ_r^m des fonctions $p(x, \xi)$, C^∞ en ξ, de classe C^r en x, telles que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe C_β pour lequel

$$\left\| \partial_\xi^\beta p(\cdot, \xi) \right\|_{C^r} \leq C_\beta (1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \,. \tag{11.5.1}$$

Ce sont des symboles d'opérateurs pseudodifférentiels irréguliers en x (plutôt réguliers d'ordre r, mais pas C^∞).

ψ étant une fonction comme au lemme 11.2.1 (par exemple celle donnée au lemme 11.2.9), on associe à $p \in \Gamma_r^m$ le symbole

$$\sigma_p(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\eta}\psi(\eta,\xi)\widehat{p}(\eta,\xi)d\eta\,. \tag{11.5.2}$$

On a aussi $\widehat{\sigma}_p(\eta,\xi) = \psi(\eta,\xi)\widehat{p}(\eta,\xi)$, ou encore :

$$\sigma_p(x,\xi) = \int G(y,\xi)p(x-y,\xi)dy\,, \tag{11.5.2bis}$$

la fonction G étant associée à ψ comme indiqué au lemme 11.2.2. Comme pour la proposition 11.2.3, on a :

Lemme 11.5.1. — *Si $p \in \Gamma_r^m$, alors $\sigma_p \in \Sigma_r^m$. En outre, si l'on change la fonction ψ dans la définition* (11.5.2)*, on modifie σ_p par un symbole de $S_{1,1}^{m-r}$.*

Un ingrédient essentiel est le lemme suivant :

Lemme 11.5.2. — *Soient $p \in \Gamma_r^m$ et $q \in \Gamma_r^{m'}$. Alors $pq \in \Gamma_r^{m+m'}$ et*

$$\sigma_{pq} - \sigma_p\sigma_q \in S_{1,1}^{m+m'-r}\,. \tag{11.5.3}$$

Démonstration. — L'appartenance de pq à $\Gamma_r^{m+m'}$ résulte immédiatement du fait que le produit de deux fonctions de $C^r(\mathbb{R}^n)$ est dans $C^r(\mathbb{R}^n)$, et de la formule de Leibniz.

En outre si on modifie la fonction ψ, on perturbe σ_{pq}, σ_p et σ_q par des termes situés respectivement dans $S_{1,1}^{m+m'-r}$, $S_{1,1}^{m-r}$ et $S_{1,1}^{m'-r}$, et la formule (11.5.3) est indépendante du choix de ψ (on pourrait même faire des choix différents pour σ_{pq}, σ_p et σ_q). Nous utiliserons la fonction ψ du lemme 11.2.9, et les notations correspondantes.

En particulier, on notera $\theta_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ pour $k \geq 0$, et $\theta_{-1} = \varphi_0$; on a alors

$$\psi(\eta,\xi) = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_{k-2}(\eta)\theta_k(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{j-1}(\eta)\left(1 - \varphi_{j+2}(\xi)\right)\,.$$

Posant $\widehat{p}_j(\eta,\xi) = \theta_{j-1}(\eta)\widehat{p}(\eta,\xi)$, on a :

$$p(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi) \quad ; \quad \sigma_p(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)\left(1 - \varphi_{j+2}(\xi)\right)\,.$$

On déduit de (11.5.1) (et du lemme 11.2.8) que

$$\left\|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_j(\cdot,\xi)\right\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|\xi|)^{m-|\beta|}\,2^{(|\alpha|-r)j}\,. \tag{11.5.4}$$

Notant $\tau_j(x,\xi) = p_j(x,\xi)\left(1 - \varphi_{j+2}(\xi)\right)$, on voit alors que

$$\left\|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tau_j(\cdot,\xi)\right\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|\xi|)^{m-|\beta|}\,2^{(|\alpha|-r)j}\,. \tag{11.5.5}$$

(On remarquera que $\partial_\xi^\gamma \varphi_{j+2}(\xi) = 2^{-|\gamma|(j+2)}(\partial_\xi^\gamma)\left(\frac{\xi}{2^{j+2}}\right)$, et que sur le support des dérivées de φ_j, $|\xi| \approx 2^j$.)

Remarquons enfin que $\tau_j = p_j$ si $|\xi| \geq 2^{j+2}$ et que $\tau_j = 0$ si $|\xi| \leq 2^{j+1}$. De même on écrit $q = \sum q_k$, $\sigma_q = \sum \tau'_k$ avec $\widehat{q}_k(\eta,\xi) = \theta_{k-1}(\eta)\widehat{q}(\eta,\xi)$ et $\tau'_k = q_k\left(1 - \varphi_{k+2}(\xi)\right)$.

On a donc $pq = \sum p_j q_k$ et $\sigma_p \sigma_q = \sum \tau_j \tau'_k$, les séries convergeant géométriquement. En fait, on tire de (11.5.4) que :

$$\left|\partial_\xi^\beta (p_j q_k)(x,\xi)\right| \leq C_\beta \left(1+|\xi|\right)^{m+m'-|\beta|} 2^{-r(j+k)}\,, \tag{11.5.6}$$

et de (11.5.5) que :

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\tau_j \tau'_k)(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta} \left(1+|\xi|\right)^{m+m'-|\beta|} 2^{|\alpha| \max(j,k) - r(j+k)}\,.$$

En fait comme $|\xi| \geq 2^{\max(j,k)+1}$ sur le support de $\tau_j \tau'_k$, on a aussi :

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\tau_j \tau'_k)(x,\xi)\right| \leq C'_{\alpha,\beta} \left(1+|\xi|\right)^{m+m'-|\beta|+|\alpha|} 2^{-r(j+k)}\,. \tag{11.5.7}$$

Comme au paragraphe 11.2, notons S_ℓ l'opérateur de convolution (en x) par $\mathcal{F}_{-1}\varphi_\ell$. Comme on l'a déjà noté, $\partial_x^\alpha S_\ell$ est un opérateur borné de L^∞ dans L^∞, de norme majorée par $C_\alpha 2^\ell$. Notant

$$\alpha_{j,k}(x,\xi) = \sum_{\ell=0}^\infty S_\ell(p_j q_k)(x,\xi)\theta_{\ell+2}(\xi)$$

et remarquant que $|\xi| \approx 2^\ell$ sur le support de $\theta_{\ell+2}$, on tire de (11.5.6) que l'on a des estimations de la forme :

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \alpha_{j,k}(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta} \left(1+|\xi|\right)^{m+m'-|\beta|+|\alpha|} 2^{-r(j+k)}\,. \tag{11.5.8}$$

Le support de $\widehat{p}_j$ est inclus dans la boule $\{|\eta| \leq 2^j\}$ et celui de $\widehat{q}_k$ dans la boule $\{|\eta| \leq 2^k\}$. Par suite celui de $\widehat{p_j q_k}$ est situé dans $\{|\eta| \leq 2^j + 2^k\}$. Dès que $2^\ell \geq 2^{j+1} + 2^{k+1}$, φ_ℓ vaut 1 sur le support de $\widehat{p_j q_k}$ et $S_\ell(p_j q_k) = p_j q_k$. Pour $|\xi| \geq 2^{j+4} + 2^{k+4}$, et ℓ tel que $\theta_{\ell+2}(\xi) \neq 0$, on a $|\xi| \leq 2^{\ell+3}$ et $2^\ell \geq 2^{j+1} + 2^{k+1}$, d'où il ressort que, pour $|\xi| \geq 2^{j+4} + 2^{k+4}$, on a :

$$\alpha_{j,k} = p_j q_k \sum_{\ell=0}^\infty \theta_{\ell+2}(\xi) = p_j q_k\,.$$

Maintenant on écrit que $S_\ell(pq) = \displaystyle\sum_{j,k} S_\ell(p_j q_k)$ (série convergente) et que :

$$\sigma_{pq}(x,\xi) = \sum_{j,k} S_\ell(p_j q_k)\theta_{\ell+2}(\xi) = \sum_{j,k} \alpha_{j,k}(x,\xi)\,.$$

Il en résulte que :

$$\rho = \sigma_{pq} - \sigma_p \sigma_q = \sum_{j,k} \alpha_{j,k} - \tau_j \tau'_k =: \sum_{j,k} \beta_{j,k}\,.$$

On remarque alors que pour $|\xi| \geq 2^{\max(j,k)+5}$ on a $|\xi| \geq 2^{j+2}$, $|\xi| \geq 2^{k+2}$ et $|\xi| \geq 2^{j+4} + 2^{k+4}$, de sorte que $\tau_j = p_j$, $\tau'_k = q_k$, $\alpha_{j,k} = p_j q_k$ et donc que $\beta_{j,k} = 0$.

En outre, d'après (11.5.7) et (11.5.8), les $\beta_{j,k}$ vérifient aussi des estimations (11.5.8). On en déduit que :

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \rho(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta} \left(1+|\xi|\right)^{m+m'-|\beta|+|\alpha|} \sum_{2^{\max(j,k)+5} \geq |\xi|} 2^{-r(j+k)}\,.$$

Cette dernière somme s'estime en $(1+|\xi|)^{-r}$, ce qui montre que $\rho \in S_{1,1}^{m+m'-r}$ et le lemme est démontré. $\square$

Lemme 11.5.3. — *Soit $p \in G^m_r$. Alors pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\beta_\xi p \in \Gamma^{m-|\beta|}_r$ et $\sigma_{\partial^\beta_\xi p} - \partial^\beta_\xi \sigma_p \in S^{m-|\beta|-r}_{1,1}$.*

En outre pour $|a| < r$, $\partial^\alpha_x p \in \Gamma^m_{r-|\alpha|}$ et $\sigma_{\partial^\alpha_x p} = \partial^\alpha_x \sigma_p$.

Démonstration. — L'appartenance de $\partial^\alpha_x p$ et $\partial^\beta_\xi p$ à $\Gamma^m_{r-|\alpha|}$ et $\Gamma^{m-|\beta|}_r$ résulte aussitôt des définitions.

En outre la formule (11.5.2bis) montre que $\sigma_p(\cdot,\xi) = G(\cdot,\xi) * p(\cdot,\xi)$, et les dérivations en x commutent avec la convolution par G.

La formule (11.5.2) montre aussi que :

$$\sigma_{\partial^\beta_\xi p} - \partial^\beta_\xi \sigma_p = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\eta} \psi(\eta,\xi)\widehat{p}(\eta,\xi)d\xi\,.$$

On remarque alors que $\partial_{\xi_j}\psi$ est à support dans la réunion du cône $\{\varepsilon_1|\xi| \le |\eta| \le \varepsilon_2|\xi|\}$ et de la boule $\{|\eta|^2 + |\xi|^2 \le 16\}$, et que

$$\left|\partial^\gamma_\eta \partial^\beta_\xi \partial_{\xi_j}\psi(\eta,\xi)\right| \le C_{\gamma,\beta}(1+|\xi|)^{-1-|\beta|-|\gamma|}\,.$$

Une variante de la proposition 11.2.4 (laissée en exercice) montre alors que $\sigma_{\partial_{\xi_j} p} - \partial_{\xi_j}\sigma_p \in S^{m-1-r}_{1,1}$.

Itérant ce processus, on obtient que $\sigma_{\partial^\beta_\xi p} - \partial^\beta_\xi \sigma_p \in S^{m-|\beta|-r}_{1,1}$ (remarquer que ∂^λ_ξ envoie Γ^m_r dans $\Gamma^{m-\lambda}_r$ et $S^m_{1,1}$ dans $S^{m-\lambda}_{1,1}$). □

On introduit maintenant $\widetilde{\Gamma}^m_r$ l'espace des sommes formelles $p = \sum_{j<r} p_j$ avec $p_j \in \Gamma^{m-j}_{r-j}$. À une telle somme, on associe le symbole

$$p(x,\xi) = \sum_{j<r} p_j(x,\xi)\,. \tag{11.5.9}$$

On identifiera plus ou moins la somme formelle $\sum p_j$ et le symbole (11.5.9), bien que la décomposition d'un symbole p en une somme (11.5.9), si elle existe, ne soit pas absolument pas unique (sauf, par exemple, si on impose des conditions d'homogénéité).

Théorème 11.5.4. — *i) Si $p = \sum_{j<r} p_j \in \widetilde{\Gamma}^m_r$, alors $\sigma_p = \sum_{j<r} \sigma_{p_j} \in \Sigma^m_r$.*
ii) Si $p = \sum_{j<r} p_j \in \widetilde{\Gamma}^m_r$ et si $q = \sum_{k<r} q_k in \widetilde{\Gamma}^{m'}_r$, alors

$$p\sharp q := \sum_{j+k+|\alpha|<r} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi p_j(x,\xi) D^\alpha_x q_k(x,\xi) \in \widetilde{\Gamma}^{m+m'}_r\,.$$

En outre, $\sigma_{p\sharp q} - \sigma_p \sharp \sigma_q \in S^{m+m'-r}_{1,1}$, la composition $\sigma_p\sharp\sigma_q$ étant définie au théorème 11.4.1.

Démonstration. — i) Par les lemmes 11.5.1 et 11.1.3, on a $\sigma_{p_j} \in \Sigma^{m-j}_{r-j} \subset \Sigma^r_m$.

ii) Pour $\ell < r$, notons $a_\ell = \displaystyle\sum_{j+k+|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p_j(x,\xi) D_x^\alpha q_k(x,\xi)$.

Pour $j+k+|\alpha| = \ell < r$, on a $\partial_\xi^\alpha p_j \in \Gamma_{r-j}^{m-j-|\alpha|} \subset \Gamma_{r-\ell}^{m-j-|\alpha|}$ et $D_x^\alpha q_k \in \Gamma_{r-k-|\alpha|}^{m'-k} \subset \Gamma_{r-\ell}^{m'-k}$. Il en résulte que $a_\ell \in \Gamma_{r-\ell}^{m+m'-\ell}$.

Notons $\sigma_j = \sigma_{p_j}$ et $\tau_k = \sigma_{q_k}$. D'après le lemme 11.5.3, on a :

$$\sigma_{\partial_\xi^\alpha p_j} - \partial_\xi^\alpha \sigma_{p_j} \in S_{1,1}^{m-j-|\alpha|-r} \quad \text{et} \quad \sigma_{D_x^\alpha q_k} - D_x^\alpha \sigma_{q_k} \in S_{1,1}^{m'-k-r},$$

d'où il résulte que :

$$\sigma_{a_\ell} - \sum_{j+k+|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha \sigma_j D_x^\alpha \tau_k \in S_{1,1}^{m+m'-\ell-r}. \tag{11.5.10}$$

Par ailleurs, d'après la définition donnée au théorème 11.4.1, on a :

$$\sigma_p \sharp \sigma_q = \sum_{\substack{j<r\\k<r\\|\alpha|<r}} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha \sigma_j D_x^\alpha \tau_k .$$

Avec (11.5.10), on voit alors que :

$$\sigma_{p\sharp q} - \sigma_p \sharp \sigma_q + \sum_{\Delta} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha \sigma_j D_x^\alpha \tau_k \in S_{1,1}^{m+m'-r},$$

Δ étant l'ensemble des (j,k,α) tels que $j<r$, $k<r$, $|\alpha|<r$ et $j+k+|\alpha|>r$. Mais pour $(j,k,\alpha) \in \Delta$, on a :

$$\partial_\xi^\alpha \sigma_j D_x^\alpha \tau_k \in S_{1,1}^{m-j-|\alpha|+m'-k} \subset S_{1,1}^{m+m'-r},$$

et le théorème suit. □

Définition 11.5.5. — *i) On dira qu'un symbole $p \in \Gamma_r^m$ est elliptique sur $\mathbb{R}^n$ (resp. au point $x_0 \in \mathbb{R}^n$) s'il existe $R \geq 0$ et $C > 0$ tels que :*

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall |\xi| \geq R, \quad |p(x,\xi)| \geq C(1+|\xi|)^m \\ &\big(\textit{resp.} \quad \forall |\xi| \geq R, \quad |p(x_0,\xi)| \geq C(1+|\xi|)^m\big). \end{aligned} \tag{11.5.11}$$

ii) On dira que $p = \displaystyle\sum_{j<r} p_j \in \widetilde{\Gamma}_r^m$ est elliptique si p_0 l'est.

Théorème 11.5.6. — *Soit $p \in \widetilde{\Gamma}_r^m$ elliptique sur $\mathbb{R}^n$ (resp. en x_0). Alors il existe $h(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 pour $|\xi| \geq R$ (resp. il existe $h(\xi)$ et $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 sur un voisinage de x_0), et il existe q_1 et $q_2 \in \widetilde{\Gamma}_r^{-m}$ tels que $p\sharp q_1 = q_2 \sharp p = h(\xi)$ (resp. $p\sharp q_1 = q_2\sharp p = h(\xi)\chi(x)$).*

Démonstration. — Supposons d'abord que p soit elliptique sur $\mathbb{R}^n$, et construisons q tel que $q\sharp p = h(\xi)$. On cherche q sous la forme $\displaystyle\sum_{k<r} q_k$ avec $q_k \in \Gamma_{r-k}^{-m-k}$.

Par définition on a $q\sharp p = \displaystyle\sum_{\ell<r} a_\ell$ avec :

$$a_0 = q_0 p_0 \quad ; \quad a_\ell = q_\ell p_0 + \sum_{j+k+|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha q_j D_x^\alpha p_k .$$

R étant tel que l'on ait (11.5.11), on choisit $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 pour $|\xi| \geq R+1$ et valant 0 pour $|\xi| \leq R$. On pose alors

$$q_0(x,\xi) = \frac{h(\xi)}{p_0(x,\xi)}\,,$$

le quotient étant parfaitement défini, puisque $p_0 \neq 0$ sur le support de h. En outre on vérifie que grâce à l'ellipticité (11.5.11), on a $q_0 \in \Gamma_r^{-m}$.

Supposons construits $q_0, \ldots, q_\ell$, à support dans $\{|\xi| \geq R\}$, tels que $q_j \in \Gamma_{r-j}^{-m-j}$ et $a_1 = \ldots = a_\ell = 0$. Si $\ell+1 < r$, on a, pour $j+k+|\alpha| = \ell+1$ et $j < \ell+1$:

$$\partial_\xi^\alpha q_j \in \Gamma_{r-j}^{-m-j-|\alpha|}\,, \quad D_x^\alpha p_k \in \Gamma_{r-k-|\alpha|}^{m-k}\,,$$

d'où $b_{\ell+1} = \displaystyle\sum_{j+k+|\alpha|=\ell+1} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha q_j D_x^\alpha p_k \in \Gamma_{r-(\ell+1)}^{-(\ell+1)}$.

En outre $b_{\ell+1}$ est à support dans $\{|\xi| \geq R\}$. On peut donc définir

$$q_{\ell+1}(x,\xi) = -\frac{b_{\ell+1}}{p_0(x,\xi)}\,,$$

et grâce à l'ellipticité (11.5.11), on voit que $q_{\ell+1} \in \Gamma_{r-(\ell+1)}^{-m-(\ell+1)}$.

Finalement on construit $q = \displaystyle\sum_{k<r} q_k \in \widetilde{\Gamma}_r^{-m}$ tel que $q\sharp p = \displaystyle\sum_{\ell<r} a_\ell$ avec :

$$a_0 = h(\xi) \quad ; \quad a_\ell = 0 \ \text{ pour } 1 \leq \ell < r\,.$$

La construction d'un q' tel que $p\sharp q' = h$ est similaire et laissée en exercice.

Si p est elliptique en x_0, puisque $p_0 \in \Gamma_r^m$ et que $r > 0$, il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$|p_0(x,\xi) - p_0(x_0,\xi)| \leq \frac{C}{2}\,(1+|\xi|)^m\,,$$

d'où il résulte que :

$$|p_0(x,\xi)| \geq \frac{C}{2}\,(1+|\xi|)^m\,,$$

pour tout $|\xi| \geq R$ et tout x dans V.

Prenant $\chi \in C_0^\infty(V)$ qui vaut 1 au voisinage de x_0, on modifie la construction précédente en posant :

$$q_0(x,\xi) = \frac{\chi(x)h(\xi)}{p_0(x,\xi)}\,.$$

La démonstration se poursuit de manière identique : les $b_{\ell+1}$ sont dans $\Gamma_{r-(\ell+1)}^{-(\ell+1)}$ et à support dans $V \times \{|\xi| \geq R\}$. Le quotient $q_{\ell+1} = -\dfrac{b_{\ell+1}}{p_0}$ est alors bien défini et appartient à $\Gamma_{r-(\ell+1)}^{-m-(\ell+1)}$. Finalement on a $q\sharp p = \displaystyle\sum_{\ell<r} a_\ell$ avec $a_0 = \chi(x)h(\xi)$ et $a_\ell = 0$ pour $1 \leq \ell < r$. □

11.6. Application à la régularité d'EDP non linéaires

Considérons comme en 11.3, une équation de la forme :

$$F\left(x, \partial^A u(x)\right) = 0\,, \tag{11.6.1}$$

où F est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $N = \operatorname{card} A$, $A = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \,/\, |\alpha| \leq m\}$.

Notons $c_\alpha(x) = \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}\left(x, \partial^A u(x)\right)$, et formons le symbole :

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha\,. \tag{11.6.2}$$

C'est un polynôme en ξ, de degré m et la partie de plus haut degré sera appelée *symbole principal* :

$$p_0(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha\,. \tag{11.6.3}$$

Tout cela est bien défini si $u \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ ($\mu > 0$ non entier), car alors $c_\alpha \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$). Il faut bien noter, cependant, que les c_α, et donc p et p_0, **dépendent de** u.

Théorème 11.6.1. — *Soit $u \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ ($\mu > 0$, 2μ non entier) solution de l'équation* (11.6.1). *Supposons que le symbole p_0 défini en* (11.6.3) *soit elliptique sur $\mathbb{R}^n$. Alors $u \in C^{m+2\mu}(\mathbb{R}^n)$ et en fait $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. — Le symbole (11.6.2) appartient à Γ^m_μ ; il est elliptique puisque p_0 l'est. D'autre part, le symoble σ_p associé à p est :

$$\sigma_p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sigma_{c_\alpha}(x,\xi)(i\xi)^\alpha\,,$$

où σ_{c_α} est le symbole de l'opérateur de paraproduit par c_α. Autrement dit, on a exactement :

$$\sigma_p(x,D)v = \sum_{|\alpha| \leq m} \pi\left(c_\alpha, \partial^\alpha v\right)\,.$$

En vertu du théorème 11.3.5, u apparaît comme une solution d'une équation :

$$\sigma_p(x,D)u = f \in C^{2\mu}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{11.6.4}$$

Par le théorème 11.5.6, il existe $q \in \widetilde{\Gamma}^{-m}_r$ tel que $q \sharp p = h(\xi)$. Le symbole $\tau = \sigma_q$ appartient à $S^{-m}_{1,1}$; d'autre part le symbole σ_h associé à h est h lui-même, et d'après le théorème 11.5.4, on a alors :

$$\tau \sharp \sigma_q = h = 1 + (h-1)\,.$$

$h-1$ est C^∞ à support compact, et est donc un symbole dans $S^{-\mu}_{1,1}$.

Par conséquent le théorème 11.4.1 implique que $\tau(x,D) \circ \sigma_p(x,D) = \operatorname{Id} + \rho(x,D)$, avec $\rho \in S^{-\mu}_{1,1}$. Compte tenu de (11.6.4), on a alors

$$u = \tau(x,D)f - \rho(x,D)u\,.$$

Puisque $f \in C^{2\mu}$, et que $\tau \in S^{-m}_{1,1}$, d'après le théorème 11.1.1 on a $\tau(x,D)f \in C^{m+2\mu}$. Enfin, $u \in C^{m+\mu}$ et $\rho \in S^{-\mu}_{1,1}$ impliquent par le théorème 11.1.1 que $\rho(x,D)u \in C^{m+2\mu}$.

On a donc bien $u \in C^{m+2\mu}$, et en itérant le procédé on trouve que $u \in C^\infty$. □

Théorème 11.6.2. — *Soit* $u \in C^{m+\mu}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *($\mu > 0$, 2μ non entier) solution sur* Ω *de l'équation* (11.6.1)*. Supposons que le symbole* p_0 *défini en* (11.6.3) *soit elliptique en un point* $x_0 \in \Omega$*. Alors* u *est de classe* $C^{m+2\mu}$ *(et* C^∞*) sur un voisinage de* x_0*.*

Démonstration. — Soient χ_1 et χ_2 dans $C^\infty_0(\Omega)$ telles que $\chi_2 = 1$ sur le support de χ_1. Posons $v = \chi_2 u \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$, et $F_1(x, y) = \chi_1(x)F(x, y)$. Alors v est solution sur $\mathbb{R}^n$ de

$$F_1\left(x, \partial^A v(x)\right) = 0\,.$$

Le symbole p_1 associé à cette équation et à v coïncide avec p là où χ_1 vaut 1. On peut toujours supposer que χ_1 vaut 1 au voisinage de x_0, et utilisant alors une paramétrix locale de p_1, on voit qu'il existe $\chi \in C^\infty_0(\Omega)$ valant 1 au voisinage de x_0, $h(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 pour $|\xi|$ grand, $\tau \in S^{-m}_{1,1}$ et $\rho \in S^{-\mu}_{1,1}$ tels que

$$\sigma_{\chi(x)h(\xi)}(x, D) = \tau(x, D) \circ \sigma_{p_1}(x, D) + \rho(x, D)\,.$$

D'après le théorème 11.3.5, $\sigma_{p_1}(x, D)v \in C^{2\mu}(\mathbb{R}^n)$, et on en déduit que

$$\sigma_{\chi h}(x, D)v \in C^{m+2\mu}(\mathbb{R}^n)\,.$$

On termine la démonstration en utilisant le lemme suivant :

Lemme 11.6.3. — *Soient* χ *et* h *comme ci-dessus, et soit* $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$*. Si* $\sigma_{\chi h}(x, D)v \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$*, alors, au voisinage de* x_0*,* v *est de classe* $C^{m+\mu}$*.*

Démonstration. — On écrit

$$1 = \sigma_h + (1 - h) = \sigma_{\chi h} + \sigma_{(1-\chi)h} + (1 - h)\,,$$

et donc

$$v = \sigma_{\chi h}(x, D)v + \sigma_{(1-\chi)h}(x, D)v + (1 - h(D))\,v\,.$$

$1 - h(\xi)$ est à support compact donc $(1 - h(D))\,v$ est C^∞, et il suffit de vérifier que $\sigma_{(1-\chi)h}(x, D)v$ est C^∞ autour de x_0. Mais (cf (11.5.2bis))

$$\sigma_{(1-\chi)h}(x, \xi) = \int G(x - y, \xi)\,(1 - \chi(y))\,h(\xi)dy\,,$$

avec

$$G(y, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\cdot\eta}\psi(\eta, \xi)d\eta\,.$$

Comme au lemme 11.2.2, on a les estimations :

$$\left|y^\alpha \partial^\beta_y G(y, \xi)\right| \leq C_{\alpha,b}\,(1 + |\xi|)^{n-|\alpha|+|\beta|}\ ,$$

d'où il résulte que sur tout compact $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et pour tous M et β on a :

$$\sup_{y\in K}\left|\partial^\beta_y G(y, \xi)\right| \leq C_{M,\beta}\,(1 + |\xi|)^{-M}\ .$$

Il en résulte que si ω est un ouvert tel que sur $\overline{\omega}$, $\chi(y) = 1$, le symbole $\sigma_{(1-\chi)h}(x, \xi)$ est à décroissance rapide en ξ, ainsi que ses dérivées pour $x \in \omega$. Il est alors clair que $\sigma_{(1-\chi)h}(x, D)v$ est C^∞ sur ω et le lemme est démontré. $\square$

Le lemme conclut la preuve du théorème 11.6.2. $\square$

CHAPITRE 12

MICROLOCALISATION

12.1. Définitions

On a vu aux chapitres précédents comment la régularité C^μ se caractérise par la transformation de Fourier (découpage et couronnes dyadiques). Maintenant on va découper aussi en secteurs pour “microlocaliser” la régularité.

On appellera cône de $\mathbb{R}^n$ un cône *ouvert*. Si Γ_1 et Γ_2 sont deux cônes, on note $\Gamma_1 \Subset \Gamma_2$ pour dire que la base de Γ_1 ($\Gamma_1 \cap \mathbb{S}^{n-1}$) est relativement compacte dans la base de Γ_2.

On dira qu'une fonction $p(\xi)$ (respectivement $p(x,\xi)$) est à décroissance rapide dans un cône Γ (resp. dans $\Omega \times \Gamma$) si pour tout entier N (resp. pour tout N, tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$), il existe C_N (resp. $C_{N,\alpha}$) telle que :

$$\forall \xi \in \Gamma, \quad |p(\xi)| \leq C_N\,(1+|\xi|)^{-N} \ \big(\text{resp. } \forall \xi \in \Gamma,\ \forall x \in \Omega, \quad |\partial_x^\alpha p(x,\xi)| \leq C_{N,\alpha}\,(1+|\xi|)^{-N}\big).$$

Définition 12.1.1. — *Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que le point $(x_0,\xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ n'est pas dans le front d'onde C^μ de u (noté $WF_\mu(u)$) s'il existe une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ valant 1 au voisinage de x_0, un cône $\Gamma \Subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ contenant ξ_0, une fonction $v \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ et une distribution $w \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tels que :*

i) $\varphi u = v + w$;

ii) $\widehat{w}$ est à décroissance rapide dans Γ.

Remarque 12.1.2. — Il résulte de la définition que $WF_\mu(u)$ est fermé dans $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, et que si u est de classe C^μ au voisinage de x_0, alors $(\{x_0\} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})) \cap WF_\mu(u) = \emptyset$ (prendre φ tel que $\varphi u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$, $v = \varphi u$ et $w = 0$!).

Lemme 12.1.3. — *Soit $p(x,\xi,\eta)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, à support compact en x, telle que : il existe M, et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, C_α pour lesquels*

$$\forall (x,\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad |\partial_x^\alpha p(x,\xi,\eta)| \leq C_\alpha\,(1+|\eta|)^M\,(1+|\xi|)^{-n-1}\ . \tag{12.1.1}$$

On suppose que p est à décroissance rapide en ξ dans le cône Γ, c'est-à-dire que pour tout N, il existe C_N telle que :

$$\forall (x,\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \Gamma \times \mathbb{R}^n, \quad |\partial_x^\alpha p(x,\xi,\eta)| \leq C_\alpha\,(1+|\eta|)^M\,(1+|\xi|)^{-N}\ . \tag{12.1.2}$$

Alors pour tout cône $\Gamma' \Subset \Gamma$, la fonction

$$I(\eta) = \int e^{ix\cdot(\xi-\eta)} p(x,\xi,\eta)\,dx\,d\xi$$

est à décroissance rapide dans Γ'.

Remarque. — Grâce à (12.1.1), l'intégrale $I(\eta)$ est absolument convergente.

Démonstration. — Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta \in \Gamma'$, tout point ξ tel que $|\xi - \eta| < \varepsilon|\eta|$ appartienne nécessairement à Γ. On écrit alors $I = I_1 + I_2$, I_1 étant l'intégrale portant sur $\{|\xi - \eta| < \varepsilon|\eta|\}$ et I_2 l'intégrale sur $\{|\xi - \eta| \geq \varepsilon|\eta|\}$. Grâce à (12.1.2), on majore I_1 par

$$|I_1(\eta)| \leq C'_N\,(1 + |\eta|)^M\,(1 + |\eta|)^{-N+n} \quad \text{(pour } N > n).$$

Pour majorer I_2, on remarque que :

$$\left(1 + |\xi - \eta|^2\right) e^{ix\cdot(\xi-\eta)} = (1 - \Delta_x) e^{ix\cdot(\xi-\eta)}\,,$$

et en intégrant par parties on obtient :

$$I_2(\eta) = \int_{|\xi-\eta|\geq\varepsilon|\eta|} e^{ix\cdot(\xi-\eta)} \frac{(1-\Delta_x)^N p(x,\xi,\eta)}{\left(1 + |\xi - \eta|^2\right)^N} dx d\xi\,,$$

et grâce à la minoration $|\xi - \eta| \geq \varepsilon|\eta|$, on conclut que $I_2(\eta)$ est aussi à décroissance rapide en $\eta \in \Gamma'$. □

Dans le même ordre d'idées, on a :

Lemme 12.1.4. — *Soit $f(\xi)$ une fonction qui vérifie pour M et pour C convenables :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |f(\xi)| \leq C\,(1 + |\xi|)^M\,.$$

Soit $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors si f est à décroissance rapide dans un cône Γ, $\chi * f$ est à décroissance rapide dans tout cône $\Gamma' \Subset \Gamma$.

Démonstration. — On écrit :

$$(\chi * f)(\eta) = \int_{|\xi-\eta|\leq\varepsilon|\eta|} \chi(\eta - \xi) f(\xi) d\xi + \int_{|\xi-\eta|>\varepsilon|\eta|} \chi(\eta - \xi) f(\xi) d\xi\,,$$

ε étant assez petit pour que

$$\left.\begin{array}{r} \eta \in \Gamma' \\ |\xi - \eta| \leq \varepsilon|\eta| \end{array}\right\} \Longrightarrow \xi \in \Gamma\,.$$

La première intégrale est à décroissance rapide en $\eta \in \Gamma'$ puisque f l'est dans Γ, alors que la seconde est à décroissance rapide grâce à la majoration de f, et aux estimations :

$$|\chi(\eta - \xi)| \leq C_N\,(1 + |\xi - \eta|)^{-N}\,.$$

□

Corollaire 12.1.5. — *Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\chi \in C^\infty(\Omega)$. Alors $WF_\mu(\chi u) \subset WF_\mu(u)$.*

Démonstration. — On montre que si $(x_0, \xi_0) \notin WF_\mu(u)$, alors $(x_0, \xi_0) \notin WF_\mu(\chi u)$. En effet, si $(x_0, \xi_0) \notin WF_\mu(u)$, on écrit $\varphi u = v + w$ comme dans la définition. On a alors :

$$\varphi\chi u = \chi v + \chi\chi_1 w\,,$$

où $\chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 sur un voisinage du support de w. Alors $\chi v \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{\chi\chi_1 w} = \widehat{\chi\chi_1} * \widehat{w}$ est à décroissance rapide dans tout cône $\Gamma' \Subset \Gamma$ d'après le lemme 12.1.4. □

Corollaire 12.1.6. — *Si u_1 et u_2 sont deux distributions, alors*

$$WF_\mu(u_1 + u_2) \subset WF_\mu(u_1) \cup WF_\mu(u_2)\,.$$

Démonstration. — Par le lemme 12.1.4, on voit comme ci-dessus que l'on peut utiliser la *même* fonction φ pour écrire

$$\varphi u_1 = v_1 + w_1\,, \quad \varphi u_2 = v_2 + w_2\,,$$

et le corollaire suit aussitôt. $\square$

Définition 12.1.7. — *Si $p(x,\xi)$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, on définit le cône-support de p de la manière suivante :*

Un point (x_0,ξ_0) n'est pas *dans* cone supp(p) *s'il existe un voisinage ω de x_0 et un cône Γ contenant ξ_0 tels que p soit à décroissance rapide dans $\omega\times\Gamma$.*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer l'action des opérateurs pseudodifférentiels sur le $WF_\mu(u)$.

Théorème 12.1.8. — *Soit $p \in S^m_{1,0}(\Omega)$ et soit $u\in\mathcal{E}'(\Omega)$. Alors si μ et $m+\mu$ sont >0 et non entiers, $WF_\mu(Pu)\subset WF_{m+\mu}(u)\cap \operatorname{cone\,supp}(p)$.*

Démonstration. — Rappelons d'abord (cf chapitre 9.2) que Pu est défini par la formule :

$$\langle Pw,\Psi\rangle = \int e^{ix\cdot\xi}\frac{\widehat{w}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^k}\,(1-\Delta_x)^k\,(p(x,\xi)\Psi(x))\,dxd\xi\,,$$

pour $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$ et k assez grand pour que l'intégrale soit absolument convergente ($2k\geq n+1+k_0+m$ si $|\widehat{w}(\xi)|\lesssim(1+|\xi|)^{k_0}$).

En particulier, choisissant Ψ de la forme $\psi(x)e^{-ix\cdot\eta}$, on obtient :

$$\widehat{\psi Pw}(\eta) = \int e^{ix\cdot\xi}\frac{\widehat{w}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^k}\,(1-\Delta_x)^k\left(p(x,\xi)\psi(x)e^{-ix\cdot\eta}\right)dxd\xi\,,$$

qui se met sous la forme :

$$\widehat{\psi Pw}(\eta) = \int e^{ix\cdot(\xi-\eta)}q(x,\xi,\eta)\widehat{w}(\xi)dxd\xi\,, \tag{12.1.3}$$

la fonction $p(x,\xi,\eta)=q(x,\xi,\eta)\widehat{w}(\xi)$ vérifiant alors les estimations (12.1.1) du lemme 12.1.3.

On obtient le théorème 12.1.8 en réunissant les deux implications :

$$(x_0,\xi_0)\notin WF_{m+\mu}(u) \Longrightarrow (x_0,\xi_0)\notin WF_\mu(Pu)\,, \tag{12.1.4}$$

$$(x_0,\xi_0)\notin \operatorname{cone\,supp}(p) \Longrightarrow (x_0,\xi_0)\notin WF_\mu(Pu)\,. \tag{12.1.5}$$

Démonstration de (12.1.4). Si $(x_0,\xi_0)\notin WF_{m+\mu}(u)$, on écrit d'après la définition

$$\varphi u = v + w\,,$$

avec $v\in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$, $w\in\mathcal{E}'(\Omega)$, $\widehat{w}$ à décroissance rapide dans un cône Γ. On a alors :

$$\psi Pu = \psi P(1-\varphi)u + \psi Pv + \psi Pw\,,$$

où ψ est choisie à support dans un voisinage ω de x_0 telle que φ vaille 1 sur un voisinage de $\overline{\omega}$. Le noyau de P étant C^∞ en dehors de la diagonale (théorème 9.3.2 et corollaire 9.3.3), $\psi P(1-\varphi)u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Puisque $v\in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$, $Pv\in C^\mu_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (théorème 10.2.3), et $\psi Pv\in C^\mu(\mathbb{R}^n)$. Enfin $\psi Pw\in\mathcal{E}'(\Omega)$ et d'après (12.1.3) et le lemme 12.1.3, $\widehat{w}$ étant à décroissance rapide dans Γ, $\widehat{\psi Pw}$ est à décroissance rapide dans tout cône $\Gamma'\Subset\Gamma$.

Démonstration de (12.1.5). Si $(x_0,\xi_0)\notin$ cone supp(p), alors il existe $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$ valant 1 au voisinage de x_0 et il existe un cône Γ, contenant ξ_0, tel que $\psi(x)p(x,\xi)$ soit à décroissance rapide dans $\mathbb{R}^n\times\Gamma$. On utilise la formule (12.1.3) pour $w=u$, et la fonction $q(x,\xi,\eta)\widehat{w}(\xi)$

est alors à décroissance rapide dans $\mathbb{R}^n \times \Gamma \times \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire vérifie les estimations (12.1.2) du lemme 12.1.3). On conclut alors par le lemme 12.1.3 que $\widehat{\psi P w}$ est à décroissance rapide dans tout cône $\Gamma' \Subset \Gamma$ et $(x_0, \xi_0) \notin WF_{m+\mu}(u)$. □

Proposition 12.1.9. — *Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors u est de classe C^μ au voisinage de x_0 si et seulement si $\{x_0\} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cap WF_\mu(u) = \emptyset$.*

Démonstration. — La condition est nécessaire comme déjà indiqué à la remarque 12.1.2. Montrons qu'elle est aussi suffisante : par compacité de $\mathbb{S}^{n-1}$, on peut recouvrir $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par des cônes Γ_j, trouver des fonctions φ_j, v_j et des distributions $w_j \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telles que :

$$\varphi_j u = v_j + w_j \ ; \quad v_j \in C^\mu(\mathbb{R}^n),\ \widehat{w}_j \text{ à décroissance rapide dans } \Gamma_j\,.$$

Fixons $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, valant 1 au voisinage de x_0 et telle que $\chi\varphi_j = \chi$ pour tous les j. Utilisant le lemme 12.1.4, on peut alors écrire :

$$u = v_j' + w_j'\,,$$

avec $v_j' \in C^\mu$, $\widehat{w}_j'$ à décroissance rapide dans Γ_j', les $\Gamma_j' \Subset \Gamma_j$ recouvrant encore $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On peut maintenant introduire une partition de l'unité :

$$1 = h_0(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} h_j(\xi)\,,$$

h_0 étant C^∞ à support compact, et les $h_j(\xi)$ étant à support dans Γ_j'.

Alors $h_j(\xi)\widehat{w}_j(\xi)$ est à décroissance rapide, et $h_j(D)w_j \in C^\infty$; en outre, puisque $v_j \in C^\mu$ et que $h_j \in S^0_{1,0}$, on a $h_j(D)v_j \in C^\mu$. Enfin, puisque $h_0(D)\chi u \in C^\infty$, on voit que :

$$\chi u = h_0(D)\chi u + \sum_{j=1}^{\infty} h_j(D)v_j + \sum_{j=1}^{\infty} h_j(D)w_j \in C^\mu\,.$$

□

12.2. Ellipticité microlocale

Définition 12.2.1. — *Un symbole $p \in S^m_{\rho,\delta}$ sera dit elliptique en (x_0, ξ_0) s'il existe un voisinage ω de x_0, un cône ouvert Γ contenant ξ_0, et des constantes C et R tels que :*

$$\forall (x,\xi) \in \omega \times \Gamma\,,\ |\xi| \geq R\,, \quad |p(x,\xi)| \geq C\,(1+|\xi|)^m\ .$$

Théorème 12.2.2. — *Soit $p \in S^m_{1,0}(\Omega)$ elliptique en (x_0, ξ_0). Il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ valant 1 au voisinage de x_0, il existe $h(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap S^0_{1,0}$, valant 1 pour $|\xi| \geq R$, ξ dans un voisinage conique de ξ_0, et il existe des symboles $q^{(N)} \in S^{-m}_{1,0}(\Omega)$ tels que :*

pour toute fonction $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, valant 1 sur un voisinage de suppφ*, l'opérateur*

$$q^{(N)}(x, D_x)\varphi_1 p(x, D_x) - \varphi(x)h(D)$$

est associé à un symbole $r^N \in S^{-N-m}_{1,0}(\Omega)$.

Démonstration. — Elle est similaire à celle du théorème 11.5.6, en utilisant cette fois la formule de composition du théorème 9.4.2 : on part de $q_0 = \frac{\varphi(x)h(\xi)}{p(x,\xi)}$, en choisissant convenablement φ et h grâce à l'ellipticité de p. On vérifie que $q_0 \in S^{-m}_{1,0}(\Omega)$, et on pose ensuite

$$q_j = -q_0 \sum_{\substack{|\alpha|+\ell=j\\ \ell<j}} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi q_\ell(x,\xi) D^\alpha_x p(x,\xi)\,.$$

On vérifie que $q_j \in S^{-m-j}_{1,0}(\Omega)$, et posant $q^{(N)} = \sum_{j<N} q_j$, le théorème 9.4.2 implique précisément que $r^N \in S^{-N-m}_{1,0}(\Omega)$. □

Théorème 12.2.3. — *Soit $p \in S^m_{1,0}(\Omega)$ elliptique en (x_0,ξ_0). Alors si $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est tel que $(x_0,\xi_0) \notin WF_\mu(Pu)$, (x_0,ξ_0) n'est pas non plus dans $WF_{m+\mu}(u)$, pourvu que μ et $m+\mu$ soient > 0 et non entiers.*

Démonstration. — On écrit :

$$\varphi(x)h(D)u = q^{(N)}(x,D)\varphi_1 P(x,D)u - R^{(N)}(x,D)u\,.$$

Puisque $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, u est d'ordre fini, et pour N assez grand, $R^{(N)}(x,D)u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ ($R^{(N)}$ est d'ordre $-N-m$, aussi petit qu'on veut). Puisque $(x_0,\xi_0) \notin WF_\mu(Pu)$, on en déduit avec le corollaire 12.1.5 et le théorème 12.1.8 que $(x_0,\xi_0) \notin WF_{m+\mu}(\varphi h(D)u)$.

Par ailleurs, (x_0,ξ_0) n'est pas dans le cône-support de $\varphi(x)\,(1-h(\xi))$, et par le théorème 12.1.8,

$$(x_0,\xi_0) \notin WF_{m+\mu}\left(\varphi\,(1-h(D))\,u\right)\,.$$

Il en résulte que $(x_0,\xi_0) \notin WF_{m+\mu}(\varphi u)$, et puisque φ vaut 1 au voisinage de x_0, on voit d'après la définition de WF que $(x_0,\xi_0) \notin WF_{m+\mu}(u)$. □

12.3. Régularité microlocale pour des EDP non linéaires

Nous allons donner dans ce paragraphe la version microlocale des théorèmes 11.6.1 et 11.6.2. On considère à nouveau une équation d'ordre m :

$$F\left(x,\partial^A u(x)\right) = 0\,, \tag{12.3.1}$$

et à la solution $u \in C^{m+\mu}(\Omega)$, on associe le symbole $p(x,\xi) \in \Gamma^m_\mu$,

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha \quad ; \quad c_\alpha(x) = \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}\left(x,\partial^A u(x)\right)\,. \tag{12.3.2}$$

Définition 12.3.1. — *$p(x,\xi)$ est elliptique en (x_0,ξ_0) si* $\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x_0)(i\xi_0)^\alpha$.

Théorème 12.3.2. — *Si u est solution de* (12.3.1), *$u \in C^{m+\mu}(\Omega)$, et si $p(x,\xi)$ est elliptique en (x_0,ξ_0), alors $(x_0,\xi_0) \notin WF_{m+2\mu}(u)$.*

Démonstration. — Soient χ_1 et χ_2 dans $C^\infty_0(\Omega)$ telles que $\chi_2 = 1$ sur le support de χ_1. Posons $v = \chi_2 u \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ et $F_1(x,y) = \chi_1(x)F(x,y)$.

Alors v est solution sur $\mathbb{R}^n$ de $F_1\left(x,\partial^A v(x)\right) = 0$, et le symbole p_1 associé est elliptique en (x_0,ξ_0).

On remarque que si p_1 est elliptique en (x_0, ξ_0), il existe un voisinage ω de x_0 et un cône Γ contenant ξ_0 tels que

$$\left| \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha \right| \geq C|\xi|^m \quad \text{pour } (x,\xi) \in \omega \times \Gamma\,.$$

Adaptant le théorème 11.5.6, on voit qu'il existe $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 au voisinage de x_0, $h(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans Γ, et valant 1 pour ξ dans un cône $\Gamma' \Subset \Gamma$, $|\xi| \geq 1$, et qu'il existe $q \in \widetilde{\Gamma}_\mu^{-m}$ tels que :

$$q \sharp p_1 = \chi(x) h(\xi)\,.$$

Passant aux opérateurs paradifférentiels (théorèmes 11.5.4 et 11.4.1), on a :

$$\sigma_{\chi h}(x,D)v = \sigma_q(x,D) \circ \sigma_{p_1}(x,D)v + \rho(x,D)v\,,$$

avec $\rho \in S_{1,1}^{-\mu}$. Par le théorème de paralinéarisation, on a $\sigma_{p_1}(x,D)v \in C^{2\mu}$, et on en déduit :

$$\sigma_{\chi h}(x,D)v \in C^{m+2\mu}(\mathbb{R}^n)\,.$$

D'après le lemme 11.6.3, on peut alors affirmer que $h(D)v$ est $C^{m+2\mu}$ au voisinage de x_0. Maintenant $h(\xi) \in S_{1,0}^0$ est elliptique en ξ_0, et cela implique par le théorème 12.2.3 que $(x_0, \xi_0) \notin WF_{m+2\mu}(v)$. Le théorème 12.3.2 est alors démontré. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.Agmon, A.Douglis, L.Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations, I,* Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 623-727 et *II,* Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 35-92.

[2] L.Bers, F.John, M. Schechter, *Partial Differential Equations*, Lectures in Applied Mathematics, AMS.

[3] J.M.Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Ec. Norm. Sup., 14 (1981), 209-246.

[4] R.Coifman, Y.Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque 57 (1978).

[5] O.A.Ladyženskaya, N.M.Ural'ceva, *Équations aux dérivées partielles de type elliptique*, Dunod (1968).

[6] Y.Meyer, *Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires*, Séminaire Bourbaki, année 1979-1980.

[7] Y.Meyer, *Remarques sur un thórème de J.M.Bony*, Supplementi ai Rendiconti del Seminario Matematico di Palermo, atti del Seminario di Analisi Armonica, Pisa 1980, serie II, 1981.

[8] Y.Meyer, *Nouvelles estimations pour les solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique 1981-1982.

[9] E.M.Stein, *Singular Intregrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton 1970.