M1PY4W11

Corrigé du DS du 15 mars 2014

Exercice 1.

$$F = \mathcal{V}ect(\,\{(1,1,0),(0,1,1)\}\,) \qquad G = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z=0\,\}$$

Les éléments de $F \cap G$ sont les éléments de F qui appartiennent à G.

Par définition, $F = \{\,a(1,1,0)+b(0,1,1) \,/\, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} = \{\,(a,a+b,b) \,/\, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$.

Par définition de G, $(a,a+b,b) \in G$ si et seulement si $a+(a+b)+b=0$, autrement dit si et seulement si $b=-a$.

Ainsi, $F \cap G = \{(a,0,-a) \,/\, a \in \mathbb{R}\} = \{\,a(1,0,-1) \,/\, a \in \mathbb{R}\}$. C'est un sous-espace de dimension 1, dont une base est $\{\,(1,0,-1)\,\}$.

Exercice 2. 1) $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$ est un espace vectoriel de dimension 4. Sa base canonique est $\{1,X,X^2,X^3\}$.

2) On considère la famille $\mathcal{A}$ composée des 3 polynômes suivants

$$P_1(X) = 1+X^2+X^3,\;\; P_2(X) = 1+X+2X^2,\;\; P_3(X) = 1-X+2X^3$$

a) $\mathcal{A}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$, car elle ne comporte que 3 vecteurs alors que $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4.

b) Soit a, b, c réels.

$$aP_1(X)+bP_2(X)+cP_3(X)=0 \;\Leftrightarrow\; (a+b+c)+(b-c)X+(a+2b)X^2+(a+2c)X^3=0 \;\Leftrightarrow\; b=c \; et \; a=2c$$

Ainsi , la combinaison linéaire non triviale $2P_1(X)+P_2(X)+P_3(X)$ est nulle. Ceci prouve que la famille $\mathcal{A}$ n'est pas libre.

c) Comme la famille $\mathcal{A}$ comporte 3 éléments et n'est pas libre, la dimension de $\mathcal{V}ect(\mathcal{A})$ est au plus 2. De plus, P_1et P_2 n'étant pas colinéaires, ils constituent une famille libre d'éléments de $\mathcal{V}ect(\mathcal{A})$. Donc $\mathcal{V}ect(\mathcal{A})$ est de dimension 2, et $\{P_1,P_2\}$ en est une base.

Exercice 3. On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{pmatrix} = -5A - 4I_3$$

b) Ainsi $A^2+5A = -4I_3$, doù $-\dfrac{1}{4}\,(A+5I_3)\,A = I_3$. Par définition, A est donc inversible et $A^{-1} = -\dfrac{1}{4}\,(A+5I_3)$.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -3/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$.

d) Le système d'équations

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} -2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

se réécrit

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme A est inversible, il a une et une seule solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -3/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ -5/4 \\ -3/4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

$$f\ :\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,y+z) \end{array}\right.$$

1) Soit (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z)\in Ker(f)\ \Leftrightarrow\ f(\,(x,y,z)\,)=0_{\mathbb{R}^3}\ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow (x,y,z)=x\,(1,-1,1)$$

Ainsi, $Ker(f)$ est le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $(1,-1,1)$.

Pour déterminer l'image de f, on peut utiliser le théorème du rang :

$$dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^3) - dimKer(f)) = 2$$

Comme $Im(f)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$, $Im(f)=\mathbb{R}^2$.

On peut aussi constater que le sous-espace vectoriel $Im(f)$ contenant $f(1,0,0)=(1,0)$ et $f(0,0,1)=(0,1)$, il contient toutes les combinaisons linéaires de ces 2 vecteurs, donc il est égal à $\mathbb{R}^2$tout entier.

2)

$f(e_1)=f(\,(1,0,0)\,)=(1,0)=e'_1$, $f(e_2)=f(\,(0,1,0)\,)=(1,1)=e'_1+e'_2$, $f(e_3)=f(\,(0,0,1)\,)=(0,1)=e'_2$

donc

$$A=Mat_{\mathcal{C}\,\mathcal{C}'}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) On note $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_1-e_2+e_3\}$ et $\mathcal{B}'=\{e'_1,e'_1+e'_2\}$.

$f(e_1)=1\times e'_1+0\times(e'_1+e'_2)$, $f(e_2)=0\times e'_1+1\times(e'_1+e'_2)$, $f(e_1-e_2+e_3)=f(\,(1,-1,1)\,)=(0,0)=0\times e'_1+0\times(e'_1+e'_2)$

donc

$$Mat_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) On pose $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) P' est triangulaire, et ses éléments diagonaux sont non nuls, donc P' est inversible. On peut calculer P'^{-1} par exemple par la méthode générale de Gauss. Seule la partie "remontée" de l'algorithme est nécessaire, puisque P' est déjà triangulaire. On trouve en une étape $P'^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $P'^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5) a) On constate les égalités $Mat_{\mathcal{B},\,\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})=P$ et $Mat_{\mathcal{B}',\,\mathcal{C}'}(id_{\mathbb{R}^2})=P'$.

b) On sait que $Mat_{\mathcal{C}',\,\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^2})\times Mat_{\mathcal{C}\,\mathcal{C}'}(f)\times Mat_{\mathcal{B},\,\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})=Mat_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}(f)$ et que $Mat_{\mathcal{C}',\,\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^2})=(Mat_{\mathcal{B}',\,\mathcal{C}'}(id_{\mathbb{R}^2}))^{-1}$. En utilisant les résultats des questions 5a et 3, on en déduit $P'^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.