M1PY4W11

DS du 15 mars 2014

Toutes les réponses doivent être argumentées.

Exercice 1. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$F = \mathcal{V}ect(\{(1,1,0),(0,1,1)\}) \qquad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0\}$$

Déterminer $F \cap G$. En donner une base.

Exercice 2. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficents réels.

1) Quelle est sa dimension ?

2) On considère la famille $\mathcal{A}$ composée des 3 polynômes suivants

$$P_1(X) = 1+X^2+X^3, \ \ P_2(X) = 1+X+2X^2, \ \ P_3(X) = 1-X+2X^3$$

a) $\mathcal{A}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$? (*Indication* : aucun calcul n'est nécessaire).

b) $\mathcal{A}$ est-elle libre ?

c) Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par $\mathcal{A}$.

Exercice 3. On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2, et l'exprimer à l'aide des matrices A et I_3.

b) En déduire que A est inversible, et exprimer A^{-1} à l'aide des matrices A et I_3.

c) Expliciter les coefficients de A^{-1}.

d) En déduire la solution du système d'équations

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 4. On considère l'application linéaire

$$f \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y+z) \end{array} \right.$$

1) Déterminer le noyau et l'image de f, et en préciser les dimensions.

2) On note $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}' = \{e'_1, e'_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de f relative à ces bases. On la note A.

3) On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_1 - e_2 + e_3\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_1 + e'_2\}$. En utilisant la définition de cette matrice, déterminer $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

4) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P' est inversible et calculer P'^{-1}.

b) Calculer le produit $P'^{-1}AP$.

5) a) Déterminer $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})$ et $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(id_{\mathbb{R}^2})$.

b) Peut-on obtenir la matrice produit $P'^{-1}AP$ sans faire les calculs de la question 4 ?