Jean Fresnel, le 27 juillet 2009

Courbe duale

0. Introduction

Soit C est une courbe projective plane définie par un polynôme homogène irréductible. A chaque point régulier de C on peut associer une tangente à la courbe C , c'est donc un point du dual du plan projectif. L'adhérence de cet ensemble de points est une courbe C^* appelée la courbe duale de C . Les courbes C et C^* sont birationnellement équivalentes. De façon plus générale, à tout point de C on peut associer une ou plusieurs tangentes et l'ensemble de toutes ces tangentes est la courbe C^* . Par ailleurs la courbe duale C^{**} de C^* est canoniquement isomorphe à C .

1. Définition de la courbe duale

Proposition et définition *Soient* k *un corps algébriquement clos de caractéristique nulle,* $F \in k[X_0, X_1, X_2] := k[X]$ *un polynôme homogène, irréductible avec* $\deg F \geq 2$. *Notons* x_i *l'image de* X_i *dans* $\frac{K[X]}{Fk[X]}$ *et notons aussi* $k[x_0, x_1, x_2]$ *ou* $k[x]$ *ce quotient. Soient* $F_i(X_0, X_1, X_2) := \frac{\partial F}{\partial X_i}(X_0, X_1, X_2)$ *pour* $0 \leq i \leq 2$,
$\rho : k[Y_0, Y_1, Y_2] \to k[x]$ *le* k*-homomorphisme défini par*
$\rho(Y_i) = F_i(x_0, x_1, x_2) := F_i(x)$.
1. *Alors il existe un polynôme homogène, irréductible* G *de* $k[Y_0, Y_1, Y_2] := k[Y]$ *tel que* $\ker \rho = G k[Y]$.
2. *Soient* $C := \mathrm{Proj}(k[x])$, $k[y_0, y_1, y_2] =: k[y]$ *le quotient* $\frac{k[Y]}{Gk[Y]}$ *où* y_i *est l'image* Y_i *et enfin* $C^* := \mathrm{Proj}(k[y])$ *; la courbe* C^* *s'appelle la courbe duale de* C . *Soit* $\overline{\rho} : k[y] \to k[x]$ *l'homomorphisme induit par* ρ . *Si* $\alpha := (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$ *est un point fermé de* C , *alors* $\rho^{-1}((\alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_0) k[x] + (\alpha_0 x_2 - \alpha_1 x_0) k[x])$ *est un idéal de* $k[y]$ *différent de* $y_0 k[y] + y_1 k[y] + y_2 k[y]$ *si et seulement si* $(F_0(\alpha), F_1(\alpha), F_2(\alpha)) \neq (0,0,0)$, i.e. *si et seulement si* $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$ *est un point régulier de* C . *Ainsi donc* $\overline{\rho}$ *induit un morphisme* $\theta : C_{rég} \to C^*$, *où* $C_{rég}$ *est l'ouvert des points réguliers de* C .
3. *Soient* $\pi : C' \to C$ (resp. $\pi^* : C^{*\prime} \to C^*$) *la normalisation de* C (resp. C^*) , *alors* θ *se prolonge en un morphisme* $\theta' : C' \to C^{*\prime}$, *plus précisément, si* $\pi(\xi)$ *est régulier, on a* $\theta'(\pi(\xi)) = \pi^*(\theta'(\xi))$. *On sait que* $C'(k)$ (resp. $C^{*\prime}(k)$) *s'identifie aux anneaux de valuation de* $\mathcal{K}(C) := k(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$ (resp. $\mathcal{K}(C^*) := k(\frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0})$) *qui contiennent* k .

4. *Notons toujours* $\overline{\rho}: k(\frac{y_1}{y_0},\frac{y_2}{y_0}) \to k(\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0})$ *l'homomorphisme induit par* $\overline{\rho}: k[y] \to k[x]$ *. Si donc* v *est une valuation associée au point* $\xi \in C'$ *, alors* $v\,\overline{\rho}$ *est une valuation associée au point* $\theta'(\xi) \in C^{*}{}'$*. Par ailleurs si* $p=(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2) \in C(k)$ *et si* $\pi(\xi)=p$ *, c'est équivalent au fait que l'anneau de valuation associé à* ξ *domine l'anneau local* $\mathbb{O}_{C,p}$ *. Si* $p=(1:\alpha_1:\alpha_2)$ *, si* A *est un anneau de valuation d'idéal maximal* tA *. Alors* A *domine* $\mathbb{O}_{C,p}$ *si et seulement si* $\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1 \in tA$ *et* $\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2 \in tA$ *.*

Démonstration Il s'agit d'abord de montrer que $\mathrm{haut}(\ker\rho)=1$, i.e. *qu'il existe* $G(Y_0,Y_1,Y_2)$ *homogène irréductible avec* $\deg G \geq 1$ *et* $\ker\rho = G k[Y]$.
On a $\mathrm{haut}(\ker\rho)+\dim\frac{k[Y]}{\ker\rho}=\dim k[Y]=3$. Il faut donc montrer que $\dim\frac{k[Y]}{\ker\rho}\notin\{0,1,3\}$. Si $\dim\frac{k[Y]}{\ker\rho}=0$, on a donc $F_i(x)=a_i\in k$, ainsi $F(X)$ divise $F_i(X)-a_i$ et pour des raisons de degré, on a $F_i(X)=a_i$, ainsi $F(X)=a_0X_0+a_1X_1+a_2X_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse sur le degré de F .
Si $\dim\frac{k[Y]}{\ker\rho}=1$, on a par exemple $F_0(x)$ transcendant sur k et donc $F_1(x)$ algébrique sur $k(F_0(x))$. Il existe alors un polynôme $A_0(U,V)+A_1(U,V)+\ldots+A_k(U,V)$ avec $A_i(U,V)$ homogène de degré i ou nul, $A_k\neq 0$ et $A_0(F_0(x),F_1(x))+A_1(F_0(x),F_1(x))+\ldots+A_k(F_0(x),F_1(x))=0$.
On déduit de cela qu'en particulier $F \mid A_k(F_0X),F_1(X))$. Or $A_k(U,V)=\sum_{i=0}^{k}a_iU^iV^{k-i}$, ainsi donc $\frac{F_1(x)}{F_0(x)}$ est racine du polynôme $\sum_{i=0}^{k}a_iT^{k-i}$, sachant que k est algébriquement clos, on a bien $\frac{F_1(x)}{F_0(x)}=a_1\in k$.
De même $\frac{F_2(x)}{F_0(x)}=a_2\in k$. De la formule d'Euler
$X_0F_0(X)+X_1F_1(X)+X_2F_2(X)=nF(X)$, on déduit que $(x_0+a_1x_1+a_2x_2)F_0(x)=0$, donc F divise $(X_0+a_1X_1+a_2X_2)F_0(X)$ et pour des raisons de degré on a $(X_0+a_1X_1+a_2X_2)F_0(X)=\lambda F(X)$ où $\lambda\in k^{\times}$.
Sachant que F est irréductible, il suit que $\deg F=1$, ce qui est impossible.
Sachant que $\dim k[x]=2$, on déduit que $\dim\frac{k[Y]}{\ker\rho}\leq 2$, ce qui élimine $\dim\frac{k[Y]}{\ker\rho}=3$.
Les parties 2., 3., 4. ne présentent pas de difficultés.

2. Une courbe plane et sa courbe duale sont birationnellement équivalentes

2.1. **Théorème** *Les hypothèses et notations sont celles de* 1. . *Soient* $\mathcal{K}(C)$ (resp. $\mathcal{K}(C^*)$) *le corps des fonctions de* C (resp. C^*) . *L'homomorphisme* $\bar{\rho}: k[y_0, y_1, y_2] \to k[x_0, x_1, x_2]$ *induit un homomorphisme toujours noté* $\bar{\rho}$ *de* $\mathcal{K}(C^*)$ *dans* $\mathcal{K}(C)$. *Alors ce dernier est un isomorphisme ; ainsi les courbes* C *et* C^* *sont birationnellement équivalentes. En plus on a* $\deg G \geq 2$. *En particulier* $\theta' : C' \to C^{*\prime}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration Soient $\mathcal{L} := k(x_0, x_1, x_2) := \mathrm{Fr}(k[x_0, x_1, x_2])$, $\mathcal{K} := k(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$, d une dérivation sur $\mathcal{K}$ non nulle et triviale sur k . Alors d se prolonge en une dérivation sur $\mathcal{L}$ (en fait on pourra choisir arbitrairement $d(x_0)$) .
En appliquant d sur l'égalité $F(x) = 0$, on obtient

(1) $F_0(x)\, d(x_0) + F_1(x)\, d(x_1) + F_2(x)\, d(x_2) = 0$.

et de la fomule d'**Euler**, on déduit

(2) $x_0 F_0(x) + x_1 F_1(x) + x_2 F_2(x) = 0$

Sachant que $y_i := F_i(x)$, la relation (2) s'écrit

(3) $x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$

En appliquant d à (3) et en utilisant (1) , on obtient

(4) $x_0\, d(y_0) + x_1\, d(y_1) + x_2\, d(y_2) = 0$.

De façon analogue, soit $G_i(Y_0, Y_1, Y_2) := \frac{\partial G}{\partial Y_i}(Y_0, Y_1, Y_2)$.

On note $G(y)$ (resp. $G_i(y)$) l'élément $G(y_0, y_1, y_2)$ (resp. $G_i(y_0, y_1, y_2)$) . Soit $z_i := G_i(y)$, alors en appliquant d à l'égalité $G(y) = 0$, on déduit

(5) $z_0\, d(y_0) + z_1\, d(y_1) + z_2\, d(y_2) = 0$,

et de la fomule d'**Euler**, on déduit que

(6) $z_0 y_0 + z_1 y_1 + z_2 y_2 = 0$.

Admettant selon le lemme 1 ci-après que $\mathrm{rang}\begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ d(y_0) & d(y_1) & d(y_2) \end{bmatrix} = 2$, il suit des relations (3) , (4) et (5) , (6) qu'il existe $\lambda \in \mathcal{K}^\times$ tel que $(x_0, x_1, x_2) = \lambda\,(z_0, z_1, z_2)$; ce qui implique que $k(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) = k(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$. Or des inclusions $k(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) \subset k(\frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0}) \subset k(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$, on déduit que $k(\frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0}) = k(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$.
Il suit de cela que les courbes C et C^* sont birationnellement équivalentes.
Il reste à montrer que $\deg G \geq 2$. Sinon, on aurait $G(Y) = a_0 Y_0 + a_1 Y_1 + a_2 Y_2$ et donc $z_0 = a_0$, $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$. Sachant que $(x_0, x_1, x_2) = \lambda(z_0, z_1, z_2)$, on déduit que $\frac{x_1}{x_0} \in k$ et $\frac{x_2}{x_0} \in k$ et donc que $k = k(\frac{x_2}{x_0}) = \mathcal{K}(C)$, ce qui est impossible puisque $k[x]$ est un annneau de dimension 1 et donc $\mathrm{dimalg}_k \mathcal{K}(C) = 1$.

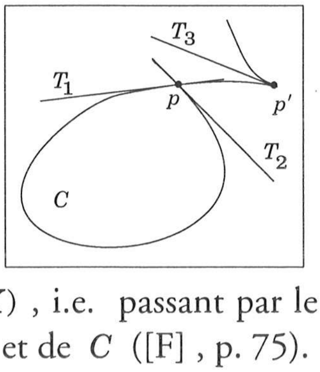
2.2. **Lemme** *Soient selon* 1. , $k[x]=k[x_0,x_1,x_2]$ *et* $\mathcal{L}:=k(x):=\mathrm{Fr}(k[x])$. *Il existe une dérivation* d *sur* $\mathcal{L}$ *qui n'est pas triviale, qui est triviale sur* k *, qui prolonge une dérivation de* $\mathcal{K}$ *de façon que* $\mathrm{rang}\begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ d(y_0) & d(y_1) & d(y_2) \end{bmatrix}=2$.

Démonstration Soient d une dérivation sur $k(\frac{y_1}{y_0},\frac{y_2}{y_0})$, non triviale et triviale sur k , alors d admet un prolongement à $k(y_0,y_1,y_2)$ avec $d(y_0)=0$. Comme $k(x_0,x_1,x_2)$ est algébrique fini sur $k(y_0,y_1,y_2)$ parce que $\dim \mathrm{alg}_k k(y_0,y_1,y_2)=\dim \mathrm{alg}_k k(x_0,x_1,x_2)=2$, il suit que d se prolonge à $k(x_0,x_1,x_2)$. Si donc $\mathrm{rang}\begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ d(y_0) & d(y_1) & d(y_2) \end{bmatrix}\leq 1$, cela veut dire que $y_1 d(y_2)-y_2 d(y_1)=0$, soit encore $d(\frac{y_1}{y_2})=0$. Il suit de cela que $\frac{y_1}{y_2}=a\in k$ et donc que d défini sur $k(\frac{y_1}{y_0},\frac{y_2}{y_0})$ se prolonge à $k(y_0,y_1,y_2)$ avec $d(y_0)=0$. Ainsi $F_1(x)-aF_2(x)=0$, i.e. $F(X)$ divise $F_1(X)-aF_2(X)=0$, et pour des raisons de degré on a $F_1(X)-aF_2(X)=0$. Il suit facilement de cela que $F(X_0,X_1,X_2)=\sum_{k=0}^{n} a_k X_0^{n-k}(aX_1+X_2)^k$; sachant que k est algébriquement clos, le polynôme F se factorise sous la forme $F(X)=\prod_{i=1}^{\infty}(\alpha_i X_0+\beta_i(aX_1+X_2))$, sachant que F est irréductible cela implique que $n=1$, ce qui est impossible. En conclusion, on a bien $\mathrm{rang}\begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ d(y_0) & d(y_1) & d(y_2) \end{bmatrix}=2$.

3. Les points de la courbe duale de C correspondent aux tangentes propres à C .

3.1. Les tangentes à courbe plane.

Soient k un corps algébriquement clos, C une courbe projective plane définie par un polynôme irréductible et homogène P avec degré$P\geq 1$. Si $p=(1:\beta;\gamma)$ est un point de C , i.e. $P(1,\beta,\gamma)=0$, alors on a $P(1,Y,Z)=F_r(Y-\beta,Z-\gamma)+F_{r+1}(Y-\beta,Z-\gamma)+...+F_n(Y-\beta,Z-\gamma)$ où F_i est homogène de degré i ou nul et $F_r\neq 0$. Alors par définition r est la *multiplicité de* C (ou de P) en p ([F] , p. 66) ; on le notera $\mathrm{mult}(p;P)$. Comme k est algébriquement clos, on a $F_r(Y-\beta,Z-\gamma)=\prod_i(a_i(Y-\beta)+b_i(Z-\gamma))^{\alpha_i}$ avec $\Sigma\alpha_i=r$ et $k(a_i,b_i)\neq k(a_j,b_j)$ pour $i\neq j$. Soient D une droite définie par le polynôme $a(Y-\beta X)+b(Z-\gamma X)$, i.e. passant par le point p , $i(p;D\cap C)$ le nombre d'intersection en p de D et de C ([F] , p. 75).



Alors on a $i(p;D\cap P)>r$ si et seulement si, il existe i avec $k(a,b)=k(a_i,b_i)$. Si ces conditions sont réalisées, on dit que D est une *tangente (propre) à* C *en* p ([F], p. 67).

On rappelle que $i(p;D\cap P):=\dim_k \frac{k[Y-\beta,Z-\gamma]_{(Y-\beta,Z-\gamma)}}{(P(1,Y,Z),a(Y-\beta)+b(Z-\gamma))}$. Si $p=(\alpha:\beta:\gamma)$, on a $r=1$ si et seulement si $(\frac{\partial P}{\partial X}(\alpha,\beta,\gamma),\frac{\partial P}{\partial Y}(\alpha,\beta,\gamma),\frac{\partial P}{\partial Z}(\alpha,\beta,\gamma))\neq(0,0,0)$; i.e. p est régulier. Si ces conditions sont réalisées alors il y a une seule tangente à C en p , elle est définie par le polynôme $\frac{\partial P}{\partial X}(p)X+\frac{\partial P}{\partial Y}(p)Y+\frac{\partial P}{\partial Z}(p)Z$.

3.2. Les tangentes à courbe plane et points de la normalisation

3.2.1. Lemme *Soient* k *un corps algébriquement clos de caractéristique nulle,* $F\in k[X_0,X_1,X_2]:=k[X]$ *un polynôme homogène, irréductible avec* $\deg F\geq 2$, C *la courbe projective plane définie par* F *et* C^* *sa courbe duale selon* 1. . *Soient* $\pi:C'\to C$ (resp. $\pi^*:C^{*\prime}\to C^*$) *la normalisation de* C (resp. C^*) , $\theta':C'\to C^{*\prime}$ *le morphisme défini en* 1. .

1. *Soient* $p=(1:\alpha_1:\alpha_2)\in C$, $\xi\in C'$ *avec* $\pi(\xi)=p$, *alors il existe* $b\in k$ *tel que* $q:=\pi^*\theta'(\xi)=(-\alpha_2+\alpha_1 b:-b:1)$ *et la droite définie par le polynôme* $(-\alpha_2+\alpha_1 b)X_0-bX_1+X_2$ *est tangente (propre) en* p *à* C . *De façon plus précise, l'élément* b *est déterminé comme il suit. Il existe* $f(U,V)$ *un polynôme avec* $F(X_0,X_1,X_2)=X_0^n f(\frac{X_1}{X_0}-\alpha_1,\frac{X_2}{X_0}-\alpha_2)$ *et* $f(0,0)=0$. *Si* v *est une valuation associée à* ξ , *on suppose que* $v(\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2)\geq v(\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1)=r\geq 1$. *Soit* A *l'anneau de valuation de* v *alors il existe une uniformisante* t *et* $b\in k$ *tels que* $\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1-t^r\in t^{r+1}A$, $\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2-bt^r\in t^{r+1}A$. *Il suit de cela que* $\frac{F_0(x)}{F_2(x)}+\alpha_2-\alpha_1 b\in tA$, $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}+\alpha_2-\alpha_1 b\in tA$, *en conséquence* $q:=\pi^*\theta'(x)=(-\alpha_2+\alpha_1 b:-b:1)$.

2. *Soient* $p=(1:\alpha_1:\alpha_2)\in C$, *une tangente propre en* p *à la courbe* C *définie par le polynôme* $(-\alpha_1 u_i-\alpha_2 v_i)X_0+u_iX_1+v_iX_2$. *Alors il existe* $\xi\in C'$ *de façon que* $q:=\pi^*\theta'(\xi)=(-\alpha_1 u_i-\alpha_2 v_i:u_i:v_i)\in C^*$. *De façon plus précise, on a* $F(X_0,X_1,X_2)=X_0^n f(\frac{X_1}{X_0}-\alpha_1,\frac{X_2}{X_0}-\alpha_2)$ *avec* $f(U,V)=f_d(U,V)+f_{d+1}(U,V)+\ldots+f_r(U,V)$ *où* f_i *est homogène de degré* i *ou nul,* $f_d\neq 0$ *et* $d\geq 1$. *On a donc* $f_d(U,V)=\prod_{i=1}^{d}(u_iU+v_iV)$ *avec* $(u_i,v_i)\in k^2-\{(0,0)\}$. *Si* $v_i\neq 0$, *par la partie* 2. *du lemme* 3.2.2., *il existe une*

valuation v *sur* $k(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$ *avec* $v(\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1)>0$, $v\left(\frac{\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2}{\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1}+\frac{u_i}{v_i}\right)>0$. *Ainsi donc* v *définit un anneau de valuation qui domine* $\mathcal{O}_{C,p}$. *Soient* ξ *le point de* C' *associé à* v , $q:=\pi^*\,\theta'(x)$, *par la partie* 1. *du lemme, on sait que* $q=(-\alpha_2+\alpha_1 b:-b:1)$ *et que* $v\left(\frac{\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2}{\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1}-b\right)>0$. *Ainsi* $-b=\frac{u_i}{v_i}$ *et la tangente propre en* p *définie par le polynôme* $(-\alpha_1 u_i-\alpha_2 v_i)X_0+u_iX_1+v_iX_2$ *a la propriété que* $q=(-\alpha_1 u_i-\alpha_2 v_i:u_i:v_i)\in C^*$.

Démonstration Il existe un polynôme $f(U,V)$ tel que $F(X_0,X_1,X_2)=X_0^n f(\frac{X_1}{X_0}-\alpha_1,\frac{X_2}{X_0}-\alpha_2)$, on déduit que

$$F_0(X)=n\,X_0^{n-1}f(\frac{X_1}{X_0}-\alpha_1,\frac{X_2}{X_0}-\alpha_2)-X_0^{n-1}(\frac{X_1}{X_0})\frac{\partial f}{\partial U}(\frac{X_1}{X_0}-\alpha_1,\frac{X_2}{X_0}-\alpha_2)-$$
$$X_0^{n-1}(\frac{X_2}{X_0})\frac{\partial f}{\partial V}(\frac{X_1}{X_0}-\alpha_1,\frac{X_2}{X_0}-\alpha_2)\ .$$

Sachant que $0=F(x_0,x_1,x_2)=x_0^n f(\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1,\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2)$, on a donc $\frac{F_0(x)}{x_0^{n-1}}=-\frac{x_1}{x_0}\frac{\partial f}{\partial U}((\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1,\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2)-\frac{x_2}{x_0}\frac{\partial f}{\partial V}((\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1,\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2)$ et de façon plus facile, on a $\frac{F_1(x)}{x_0^{n-1}}=\frac{\partial f}{\partial U}(\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1,\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2)$, $\frac{F_2(x)}{x_0^{n-1}}=\frac{\partial f}{\partial V}(\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1,\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2)$.

Soit d une dérivation, de $f(\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1,\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2)=0$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial U}((\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1,\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2)\,d(\frac{x_1}{x_0})+\frac{\partial f}{\partial V}(\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1,\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2)\,d(\frac{x_2}{x_0})=0\ .$$

En conclusion, il existe $\lambda\in k(\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0})$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial U}(\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1,\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2)=\lambda\,d(\frac{x_2}{x_0})\ ,\ \frac{\partial f}{\partial V}(\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1,\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2)=-\lambda\,d(\frac{x_2}{x_0}).$$

Comme k est de caractéristique nulle et algébriquement clos, il existe bien une uniformisante t avec $\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1-t^r\in t^{r+1}A$; et on a bien $\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2-b\,t^r\in t^{r+1}A$ avec $b\in k$. On déduit de cela que $\frac{F_0(x)}{F_2(x)}-\alpha_1 b+\alpha_2\in tA$, $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}+b\in tA$. Ainsi l'anneau local $k[\frac{y_0}{y_2},\frac{y_1}{y_2}]_{\mathfrak{M}}$ avec $\mathfrak{M}=(\frac{y_0}{y_2}-\alpha_1 b+\alpha_2)\,k[\frac{y_0}{y_2},\frac{y_1}{y_2}]+(\frac{y_1}{y_2}+b)\,k[\frac{y_0}{y_2},\frac{y_1}{y_2}]$, est dominé par l'anneau A . Cela veut bien dire que $\pi^*\theta'(\xi)=(-\alpha_2+\alpha_1 b:-b:1)$. Il reste à montrer que la droite définie localement par le polynôme $(V-\alpha_2)-b(U-\alpha_1)$ est tangente propre à C en $(1:\alpha_1:\alpha_2)$. De la formule

$f(U,V)=f_d(U,V)+\ldots+f_n(U,V)$ avec $f_i(U,V)$ homogène de degré i ou nul et $f_d(U,V)\neq 0$, on a donc

$$0=\left(\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1\right)^d f_d\left(1,\frac{\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2}{\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1}\right)+\left(\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1\right)^{d+1} f_d\left(1,\frac{\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2}{\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1}\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1\right)^n f_n\left(1,\frac{\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2}{\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1}\right).$$

Il suit de cette égalité que $v\left(f_d\left(1,\frac{\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2}{\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1}\right)\right)>0$. Si donc

$f_d(U,V)=\prod_{i=1}^{d}(u_iU+v_iV)$, il existe i tel que $v\left(u_i+v_i\frac{\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2}{\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1}\right)>0$ et on a

$v_i\neq 0$, or les formules $\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1-t^r\in t^{r+1}A$ et $\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2-b\,t^r\in t^{r+1}A$ impliquent

$\frac{\frac{x_2}{x_0}-\alpha_2}{\frac{x_1}{x_0}-\alpha_1}-b\in tA$; ainsi donc $u_i+v_ib=0$. Il suit de cela que la droite définie par le polynôme $(-\alpha_2+\alpha_1 b)X_0-bX_1+X_2$ est aussi la droite définie par le polynôme $(-\alpha_1 u_i-\alpha_2 v_i)\,X_0+u_iX_1+v_iX_2$, i.e. une tangente propre en p à C.

3.2.2. **Lemme** (relation entre tangentes et anneaux de valuations)

Soient k un corps algébriquement clos, $f(X,Y)\in k[X,Y]$ un polynôme irréductible avec $f(0,0)=0$, alors $f=f_d+f_{d+1}+\ldots+f_n$ où f_i est homogène de degré i ou nul et $f_d\neq 0$. On peut donc écrire f_d sous la forme

$f_d(X,Y)=X^{e_0}\prod_{i=1}^{s}(a_iX-b_iY)^{e_i}$ avec $e_0\geq 0$, $e_i>0$, $b_i\neq 0$ pour $1\leq i\leq s$ et $k(a_i,b_i)\neq k(a_j,b_j)$ pour $1\leq i<j\leq s$. Soit $k[x,y]:=\frac{k[x,y]}{fk[x,y]}$ où x (resp. y) *est l'image de X* (resp. Y) , *$k(x,y):=\mathrm{Fr}(k[x,y])$.*

1. *Soit w une valuation sur $k(x,y)$ dont l'anneau de valuation domine $k[x,y]_{(x,y)}$ avec $w(\frac{y}{x})\geq 0$ et $w(x)>0$. Alors il existe i tel que $w(a_i-b_i\frac{y}{x})>0$.*
2. *Soit $1\leq i\leq s$, alors il existe une valuation w_i sur $k(x,y)$, triviale sur k , avec $w_i(x)>0$ et $w_i(a_i-b_i\frac{y}{x})>0$.*
3. *Il existe une valuation w dont l'anneau de valuation domine $k[x,y]_{(x,y)}$ avec $w(\frac{x}{y})\geq 0$ et $w(y)>0$ si et seulement si $e_0\geq 1$.*

Démonstration Soient $f(X,Y) \in k[X,Y]$ un polynôme irréductible avec $f(0,0)=0$, $f=f_d+f_{d+1}+\ldots+f_n$ où f_i est homogène de degré i ou nul et $f_d \neq 0$. Soient $k[x,y]:=\frac{k[X,Y]}{fk[X,Y]}$, on a donc $\mathrm{Fr}(k[x,y])=k(x)[y]=k(y)[x]=k(x,y)$. Les anneaux de valuation de $k(x,y)$ qui dominent $k[x,y]_{(x,y)}$ sont ceux associés à une valuation w avec $w(x)>0$ et $w(\frac{y}{x}) \geq 0$ et ceux associés à une valuation w telle que $w(y)>0$ et $w(\frac{x}{y})>0$.

On considère d'abord le premier cas ; on a $k(x,y)=k(x)[\frac{y}{x}]$ et $0=\frac{1}{x^d}f(x,y)=f_d(1,\frac{y}{x})+xf_{d+1}(1,\frac{y}{x})+\ldots+x^{n-d}f_{n-d}(1,\frac{y}{x})$, ainsi donc $\frac{y}{x}$ est racine du polynôme $P(T):=f_d(1,T)+xf_{d+1}(1,T)+\ldots+x^{n-d}f_n(1,T)$. Soient v une valuation sur $k(x)$, triviale sur k avec $v(x)>0$, $\widehat{k(x)}$ le complété de $k(x)$ pour v , $\widehat{k(x)}^{alg}$ une clôture algébrique de $\widehat{k(x)}$, et notons encore v l'unique prolongement de v à $\widehat{k(x)}^{alg}$. Bien entendu $P(T)$ est un polynôme irréductible de $k(x)[T]$ à coefficients dans l'anneau de valuation de $k(x)$ pour v . Si $\xi \in \widehat{k(x)}^{alg}$ est une racine de $P(T)$, cela définit un $k(x)$-homomorphisme $\rho_\xi : k(x)[\frac{y}{x}] \to \widehat{k(x)}^{alg}$ par $\rho_\xi(\frac{y}{x})=\xi$ et cela définit sur $k(x)[\frac{y}{x}]$ une valuation w_ξ qui prolonge v et définie par $w_\xi(z)=v(\rho_\xi(z))$. Réciproquement, toute valuation w de $k(x)[\frac{y}{x}]$ qui prolonge v est de cette forme. En ce qui concerne le premier cas, on recherche les valuations w avec $w(\frac{y}{x}) \geq 0$, donc elles correspondent aux racines ξ de $P(T)$ avec $v(\xi) \geq 0$.

On peut écrire $f_d(X,Y)$ sous la forme, $f_d(X,Y)=X^{e_0}\prod_{i=1}^{s}(a_iX-b_iY)^{e_i}$ avec $b_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq s$ avec $k(a_i,b_i) \neq k(a_j,b_j)$ pour $i \neq j$. Il suit de cela que $P(T)=\prod_{i=1}^{s}(a_i-b_iT)^{e_i}+xf_{d+1}(1,T)+\ldots+x^{n-d}f_n(1,T)$. Alors le lemme de **Hensel** montre qu'il existe des polynômes $P_1,P_2,\ldots,P_s,P_\infty$ à coefficients dans l'anneau de valuation de $\widehat{k(x)}$ et si l'on note $\bar{P}_i$ l'image résiduelle de P_i , on a $\bar{P}_i(T)=(a_i-b_iT)^{e_i}$ pour $1 \leq i \leq s$, $\deg P_i=\deg \bar{P}_i$ et $\bar{P}_\infty=1$. Si donc ξ_i est une racine de $P_i(T)$ pour $1 \leq i \leq s$, on a alors $v(a_i-b_i\xi_i)>0$ et en particulier $v(\xi_i) \geq 0$. Si ξ_∞ est une racine de P_∞ , on a $v(\xi_\infty)<0$.

En résumé, si w est une valuation de $k(x,y)$ avec $w(x)>0$ et $w(\frac{y}{x})>0$, alors il existe $1 \leq i \leq s$ avec $w(a_i-b_i\frac{y}{x})>0$. Réciproquement pour tout i avec

$1 \leq i \leq s$, il existe une valuation w_i de $k(x,y)$ avec $w_i(x)>0$ et $w_i(a_i - b_i\frac{y}{x})>0$.

Pour le second cas, on procède de même, sachant $0 = \frac{1}{y^d} f(x,y) = f_d(\frac{x}{y},1) + y f_{d+1}(\frac{x}{y},1) + \ldots + y^{n-d} f_n(\frac{x}{y},1)$. On écrit $k(x,y) = k(y)[\frac{x}{y}]$, on considère une valuation sur $k(y)$, triviale sur k avec $v(y)>0$. Ainsi $\frac{x}{y}$ est racine du polynôme $Q(T)$ défini par $Q(T) := f_d(T,1) + y f_{d+1}(T,1) + \ldots + y^{n-d} f_n(T,1)$, on aura $f_d(T,1) = T^{e_0} \prod_{i=1}^{s} (a_i T - b_i)$ avec $b_i \neq 0$. Par le lemme de **Hensel** , on a $Q(T) = Q_0(T)\, Q_1(T)\, Q_\infty(T)$ où Q_0, Q_1, Q_∞ sont à coefficients dans l'anneau de valuation de $\widehat{k(y)}$, $\bar{Q}_0(T) = T^{e_0}$, $\bar{Q}_1(T) = \prod_{i=1}^{s} (a_i T - b_i)$, $\deg Q_0 = \deg \bar{Q}_0$, $\deg Q_1 = \deg \bar{Q}_1$ et $\bar{Q}_\infty = 1$. Il suit de cela que si ξ est racine de $Q(T)$ avec $v(\xi)>0$, cela veut dire que ξ est racine de $Q_0(T)$.

En résumé il existe une valuation w sur $k(x,y)$ avec $w(y)>0$ et $w(\frac{x}{y})>0$ si et seulement si $e_0 \geq 1$.

Remarque Un facteur $(a_i X - b_i Y)^{e_i}$ de f_d peut donner lieu à plusieurs anneaux de valuation. Soit $f(X,Y) := Y^2 + X^2 Y + X^4 + X^5$. Le polynôme f est bien irréductible. En effet par le lemme de **Gauss** , si f se factorise non trivialement, on aura $Y^2 + X^2 Y + X^4 + X^5 = (Y + A(X))(Y + B(X))$, donc $AB = X^4 + X^5$ donc $\deg A + \deg B = 5$, et comme $A + B = X^4$, on a $\deg(A+B) = 4$, ainsi à permutation près on a $\deg A = 1$, $\deg B = 4$, il est alors facile de montrer que c'est impossible. Soit $P(T) = T^2 + XT + X^2 + X^3, Z := \frac{T}{X}$, on a $\frac{1}{X^2} P(T) = Z^2 + Z + (1+X)$. Comme résiduellement $Z^2 + Z + 1 = (Z-j)(Z-j^2)$ (en caractéristique nulle) le lemme de **Hensel** dit que $P(T)$ se factorise dans $\widehat{k(x)}[T]$; cela donnera deux anneaux de valuation qui domineront $k[x,y]_{(x,y)}$.

Remarque *(le cas où f_d est sans facteurs multiples ;* i.e. *le point est multiple ordinaire)*
Si $e_0 = e_1 = \ldots = e_s = 1$, il suit facilement de la démonstration du théorème que les anneaux de valuation de $k(x,y)$ qui dominent $k[x,y]_{(x,y)}$ sont en bijection avec les facteurs de degré 1 de $f_d(X,Y)$.

4. La courbe biduale de C est canoniquement isomorphe à C

Théorème *Soient* k *un corps algébriquement clos de caractéristique nulle,* $F(X_0,X_1,X_2)$ *un polynôme homogène de* $k[X_0,X_1,X_2]$ *avec* $\deg F\geq 2$, $k[x_0,x_1,x_2]:=\frac{k[X_0,X_1,X_2]}{Fk[X_0,X_1,X_2]}$ *où* x_i *est l'image de* X_i . *Soient* $F_i(X):=\frac{\partial F}{\partial X_i}(X)$, $\rho: k[Y_0,Y_1,Y_2]\to k[x]:=k[x_0,x_1,x_2]$ *défini par* $\rho(Y_i)=F_i(x):=F_i(x_0,x_1,x_2)$. *Alors il existe un polynôme homogène* G *avec* $\deg G\geq 2$ *et* $\ker\rho=Gk[Y]$. *Soit* $k[y]:=k[y_0,y_1,y_2]:=\frac{k[Y]}{Gk[Y]}$ *où* y_i est *l'image de* Y_i . *Alors* ρ *induit un homomorphisme injectif* $\bar\rho: k[y]\to k[x]$, *ce dernier induit un morphisme* u *d'un ouvert dense de* $C:=\mathrm{Proj}(k[x])$ *dans* $C^*:=\mathrm{Proj}(k[y])$. *Soient de même,* $G_i(Y):=\frac{\partial G}{\partial Y_i}(Y)$, $\sigma: k[Z]\to k[y]$ *défini par* $\sigma(Z_i)=G_i(y)$, *alors il existe un polynôme homogène* $H(Z)$ *tel que* $\ker\sigma=Hk[Z]$. *Soit* $k[z]:=k[z_0,z_1,z_2]:==\frac{k[Z]}{Hk[Z]}$ *où* z_i *est l'image* Z_i *; alors* σ *induit un homomorphisme injectif* $\bar\sigma: k[z]\to k[y]$. *Ce dernier induit un morphisme* v *d'un ouvert dense de* C^* *dans* $C^{**}:=\mathrm{Proj}(k[z])$. *Sachant qu'il existe* $\lambda\in\mathcal{K}(C)$ *tel que* $(\bar\sigma\bar\rho\,(z_0),\bar\sigma\bar\rho\,(z_1),\bar\sigma\bar\rho\,(z_2))=\lambda(x_0,x_1,x_2)$, *on peut choisir* $H(Z_0,Z_1,Z_2)=F(Z_0,Z_1,Z_2)$, *il suit que* $\sigma\rho$ *induit un isomorphisme de* C *sur* C^{**} *qui est de la forme* $(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)\mapsto(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)$. *On dit alors que* C^{**} *est canoniquement isomorphe à* C .
En d'autres termes si on identifie C *au fermé de* $\mathbb{P}_k^2$ *qui est* $V(F)$ *et si on identifie* C^{**} *au fermé de* $\mathbb{P}_k^2$ *qui est* $V(H)$, *alors* $C=C^{**}$ *et l'isomorphisme induit par* $\sigma\rho$ *n'est autre chose que l'identité,* i.e. *du point de vue ensembliste c'est l'application* $(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)\mapsto(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)$.

Démonstration La relation $(\bar\sigma\bar\rho\,(z_0),\bar\sigma\bar\rho\,(z_1),\bar\sigma\bar\rho\,(z_2))=\lambda(x_0,x_1,x_2)$ implique que $P(z_0,z_1,z_2)=0$ si et seulement si $P(x_0,x_1,x_2)=0$, sachant que $\bar\sigma$ et $\bar\rho$ sont injectifs. On peut donc choisir $H(Z_0,Z_1,Z_2)=F(Z_0,Z_1,Z_2)$. Ainsi $\sigma\rho$ induit un isomorphisme de $k[\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{x_0})]$ sur $k[\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0}]$ et on a $\sigma\rho(\frac{z_1}{z_0})=\frac{x_1}{x_0}$, $\sigma\rho(\frac{z_2}{z_0})=\frac{x_2}{x_0}$. On définit de même des isomorphismes entre $k[\frac{z_0}{z_1},\frac{z_2}{z_1}]$ et $k[\frac{x_0}{x_1},\frac{x_2}{x_1}]$ et aussi entre $k[\frac{z_0}{z_2},\frac{z_1}{z_2}]$ et $k[\frac{x_0}{x_2},\frac{x_1}{x_2}]$. Il suit de cela que $\sigma\rho$ induit un isomorphisme entre $C=\mathrm{Proj}(k[x])$ et $C^{**}=\mathrm{Proj}(k[z])$ de la forme $(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)\mapsto(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)$.

5. Les tangentes à une courbe plane sont les points de la courbe duale

Théorème *Soient* C *la courbe projective plane définie par le polynôme homogène* F *avec* $\deg F \geq 2$, C^* *la courbe duale définie par le polynôme homogène* G *défini en* 1. , $\pi : C' \to C$ (resp. $\pi^* : C^{*\prime} \to C^*$) *la normalisation de* C (resp. C^*) , $\theta' : C' \to C^{*\prime}$ *l'isomorphisme induit par* $\theta : C_{reg} \to C^*$. *Soient* $Z := \{ (\pi(x), \pi^*\theta'(x)) \in C \times C^* \mid x \in C' \}$, *alors* Z *est un fermé de* $C \times C^*$. *Soient* $p = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in C$, $q = (\beta_0 : \beta_1 : \beta_2) \in C^*$, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

$i)$ *On a* $(p,q) \in Z$,

$ii)$ *La droite définie par le polynôme* $\beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$ *est une tangente (propre) en* p *à la courbe* C .

Soit $p_1 : Z \to C$ (resp. $p_2 : Z \to C^*$) *la première projection* (resp. *la seconde projection)* , *alors* p_i *est surjectif. En particulier, tout point de* C^* *correspond à une tangente propre à* C . *Il suit de cela que si* p' *est un point du plan contenant* C , *avec* $p' \notin C$, *alors il existe* $p \in C$ *tel que la droite passant par* p *et* p' *soit tangente (propre) en* p *à* C.

$iii)$ *la droite définie par le polynôme* $\alpha_0 X_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ *est une tangente (propre) en* q *à la courbe* C^* .

Démonstration Montrons d'abord l'équivalence $i)$ et $ii)$. D'abord $i)$ implique $ii)$, c'est le lemme 3.2.1 partie 1. . D'autre part $ii)$ implique $i)$ est le lemme 3.2.1. partie 2. .

Le morphisme p_1 est surjectif, en effet si $p \in C$, il existe $x \in C'$ avec $\pi(x) = p$, si $q = \pi^*\theta'(x)$, on a $(p,q) \in Z$. Enfin p_2 est surjectif parce que θ' et π^* le sont.

Il suit bien de ce qui précède et de l'équivalence $i)$ et $ii)$ que tout point de C^* correspond à une tangente propre à C .

Si $p' := (\alpha'_0 : \alpha'_1 : \alpha'_2)$, alors l'ensemble des droites passant par p' est défini par les polynômes de degré 1 , $\beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$ tels que $\alpha'_0 \beta_0 + \alpha'_1 \beta_0 + \alpha'_2 \beta_2 = 0$. Or $D := \{ (\beta_0 : \beta_1 : \beta_2) \in \mathbb{P}^2 \mid \alpha'_0 \beta_0 + \alpha'_1 \beta_0 + \alpha'_2 \beta_2 = 0 \}$ est une droite du plan projectif. Cette droite coupe le fermé C^* en au moins un point $q = (\gamma_0 : \gamma_1 : \gamma_2)$. Comme p_2 est surjectif, il existe $p \in C$ avec $(p,q) \in Z$, et l'équivalence $i)$ et $ii)$ dit que la droite définie par le polynôme $\gamma_0 X_0 + \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2$ est tangente propre à C en p et bien entendu cette droite passe par p' .

Il reste à montrer que $i)$ est équivalent à $iii)$ Soient $\pi^{**}(C^{**})') \to C^{**}$ la normalisation de $C^{**}, \upsilon' : (C^*)' \to (C^{**})'$ le morphisme induit par υ , $Z^* := \{ (\pi^*(y), \pi^{**}(\upsilon'(y)) \mid y \in C^* \}$.

Sachant par le théorème de la partie 4. que $C^{**}=C$, que vu induit de C sur $C^{**}=C$ l'identité, il suit que $v'u':C'\to(C^{**})'=C'$ est aussi l'identité. Par ailleurs $u':C'\to(C^*)'$ est bijectif, ainsi
$Z^*:=\{(\pi^*(u'(x)),(\pi^{**}(u'v'(x)))\mid x\in C'\}$. Comme $\pi^{**}=\pi$ et $v'u'=\mathbb{1}$, on a $Z^*:=\{(q,p)\in\mathbb{P}_k^2\times\mathbb{P}_k^2\mid(p,q)\in Z\}$. Ensuite l'équivalence entre $i)$ et $ii)$ appliquée à C^* dit que $(q,p)\in Z^*$ si et seulement si la droite définie par le polynôme $\alpha_0X_0+\alpha_1X_1+\alpha_2X_2$ est tangente propre à C^* en q. Ceci montre avec ce qui précède que $i)$ est équivalent à $iii)$.

Remarque *(courbe duale et dualité)*
Il y a une dualité entre $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{P}^2$ définie par le fermé
$T:=\{((\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2),(\beta_0:\beta_1:\beta_2)\mid\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0\}$ considérant $C\times C^*\subset\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$ alors $T\cap(C\times C^*)$ est un fermé qui contient Z (défini par le théorème ci-dessus), mais on peut avoir $T\cap(C\times C^*)\neq Z$. Considérons l'exemple ci-après.
Soit $F(X_0,X_1,X_2)=X_1^2X_2-X_0^3$, ainsi $F_0=-3X_0^2$, $F_1=2X_1X_2$, $F_2=X_1^2$; il suit de cela que $4F_0^3+27F_1^2F_2=0$. La courbe duale est définie par
$G(Y_0,Y_1,Y_2)=4Y_0^3+27Y_1^2Y_2$.
Soit $Z_i:=\{((\alpha_0:1:\alpha_0^3),(\xi_i\alpha_0^2:\alpha_0^3:-\frac{4}{27}\xi_i^3))\mid\alpha_0\in k\}$

$$\cup\{((0:0:1),(0:1:0))\}$$

avec $\xi_1=-\frac{3}{2}$, $\xi_2=3$. Facilement, on a $Z=Z_1$ et $T\cap(C\times C^*)=Z_1\cup Z_2$.

Un exemple *(la courbe C n'a pas de singularités et la courbe duale C^* a des singularités)*
Soit C la courbe projective plane définie par le polynôme
$F(X):=X_0^3+X_1^3+X_2^3$, c'est une courbe non singulière.
Soit $y_i:=\dfrac{\partial F}{\partial X_i}(x)=3\,x_i^2$. Alors $C^*=\{(\alpha_0^2:\alpha_1^2:\alpha_2^2)\in\mathbb{P}_k^2\mid\alpha_0^3+\alpha_1^3+\alpha_2^3=0\}$.
C'est donc la courbe projective plane définie par le polynôme
$G(Y):=Y_0^6+Y_1^6+Y_2^6-2(Y_0^3Y_1^3+Y_1^3Y_2^3+Y_2^3Y_0^3)$. Cette courbe admet un ensemble de 9 points singuliers, c'est $\{(0:1:\xi),(\xi:0:1),(1:\xi:0)\mid\xi^3=1\}$.
Soit $z_i:=\dfrac{\partial G}{\partial Y_i}(y)=6\,y_i^2\,(2\,y_i^3-(y_0^3+y_1^3+y_2^3))$. Facilement on a
$z_i=2\,.\,3^6\,.\,x_i(x_0\,x_1\,x_2)^3$. Il suit de cela que $C^{**}=C$.

Bibliographie

[*B, K*] **Brieskorn Egberty, Knörrer Horst** *Plane Algebraic Curves* Birkhâuser 1986

[*C*] **Coolidge Julian Lowell** *A Treatise on Algebraic Plane Curves* Dover Phoenix Ed. 2004

[*F*] **Fulton William** *Algebraic curves* The Benjamin/Cummings Publishing Company 1969

[*H*] **Hartshorne Robin** *Algebraic Geometry* Springer-Verlag (1977) ex. 2.3. p. 304

[*M* , *T*] **Motzkin Theodore Samuel, Taussky Olga** *Pair of matrices with property L. II* Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955) p. 387-401

[*W*] **Walker Robert J.** *Algebraic curves* Springer-Verlag (1978)