Jean Fresnel, le 22 septembre 2009

Espaces vectoriel de matrices diagonalisables

0. Introduction

Soit k un corps commutatif, on sait que si deux matrices diagonalisables A et B de $M_n(k)$ commutent, alors elles sont simultanément diagonalisables et ainsi $\lambda A+\mu B$ est diagonalisable pour tout $\lambda,\mu\in k$.
On s'intéressa ici à la réciproque
(R) *Soient* $A,B\in M_n(k)$ *, supposons que la matrice* $\lambda A+\mu B$ *soit diagonalisable pour tout* $\lambda,\mu\in k$ *. Alors a-t-on* $AB=BA$?
Si k n'est pas algébriquement clos, la remarque 1 ci-après donne un exemple avec réponse négative. Si k est algébriquement clos de caractéristique positive, la remarque 2 ci-après donne aussi un exemple avec réponse est négative.
Il nous reste à considérer la réciproque sous l'hypothèse où k est un corps commutatif, algébriquement clos, de caractéristique nulle. C'est le résultat de 1955 dû à **T.S. Motzkin** et **O. Taussky.**
La démonstration se décompose en deux parties. Pour la première, on montre que si X,Y,Z sont des indéterminées sur k, alors le polynôme caractéristique de $YA+ZB$ i.e. $\text{dét}(XI_n-YA-ZB)$, se factorise en polynômes homogènes de degré 1, on a donc
$\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i Y-\beta_i Z)=\text{dét}(XI_n-YA-ZB)$ avec $\alpha_i,\beta_i\in k$.
Pour la seconde partie, on montre qu'on peut choisir A diagonale, de diagonale $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ et qu'alors B admet le premier vecteur canonique de k^n comme vecteur propre, avec la valeur propre β_1. Alors la démonstration s'ensuit par récurrence sur n.
En ce qui concerne la partie 1, on définit une notion de tangente à une courbe projective plane C, définie par un polynôme homogène irréductible $P(X,Y,Z)$. On dit qu'une droite passant par un point p de C est tangente à C, si le nombre d'intersections en p de la droite et de C est strictement supérieur à la multiplicité de p pour la courbe C. Alors la théorie de la courbe duale permet de montrer que $\text{dét}(XI_n-YA-ZB)$ se factorise en polynômes homogènes de degré 1.
Cela étant, les valeurs propres de $\lambda A+\mu B$ sont
$(\lambda\alpha_1+\mu\beta_1,\lambda\alpha_2+\mu\beta_2,\dots,\lambda\alpha_n+\mu\beta_n)$, sachant que $\lambda A+\mu B$ est diagonalisable, il suit que $\text{rang}(\lambda A+\mu B-(\lambda\alpha_1+\mu\beta_1)I_n)$ est égal à n moins le nombre de i avec $\lambda\alpha_1+\mu\beta_1=\lambda\alpha_i+\mu\beta_i$. Cela implique qu'un certain nombre de mineurs sont nuls. C'est en utilisant cela qu'on peut montrer la partie 2.

Remarque 1 L'hypothèse K algébriquement clos n'est pas superflue. En effet deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ qui ne commutent pas engendrent un espace vectoriel de matrices diagonalisables.

Remarque 2 La caractéristique nulle est indispensable. Soit p un nombre premier , K un corps de caractéristique p , $A := \begin{bmatrix} 0_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{p+1}(K)$, où 0_p est la matrice nulle de $M_{p+1}(K)$, soit B la matrice compagnon du polynôme $X^{p+1}+1$. Alors $\lambda A + B$ est la matrice compagnon de $X^{p+1} - \lambda X^p + 1$. Ce polynôme a pour dérivée X^p , cela montre que ce polynôme est séparable. En conséquence $\lambda A + B$ est diagonalisable ; il suit de cela que tout élément de $KA + KB$ est diagonalisable, et facilement $AB \neq BA$.

1. Tangente à une courbe plane et courbe duale

1.1. Les tangentes à courbe plane.

Soient k un corps algébriquement clos, C une courbe projective plane définie par un polynôme irréductible et homogène P avec degré$P \geq 1$. Si $p = (1:\beta;\gamma)$ est un point de C , i.e. $P(1,\beta,\gamma) = 0$, alors on a $P(1,Y,Z) = F_r(Y-\beta, Z-\gamma) + F_{r+1}(Y-\beta, Z-\gamma) + ... + F_n(Y-\beta, Z-\gamma)$ où F_i est homogène de degré i , ou nul et $F_r \neq 0$. Alors par définition r est la *multiplicité de* C (ou de P) en p ; on le notera $\mathrm{mult}(p;P)$.

Comme k est algébriquement clos, on a $\prod_i (a_i(Y-\beta) + b_i(Z-\gamma))^{\alpha_i} = F_r(Y-\beta, Z-\gamma)$ avec $\Sigma \alpha_i = r$ et $k(a_i, b_i) \neq k(a_j, b_j)$ pour $i \neq j$, où $k(a_i, b_i)$ (resp. $k(a_j, b_j)$) dédigne la froite vectorielle engendrée par (a_i, b_i) (resp. (a_j, b_j)) Soient D une droite définie par le polynôme $a(Y-\beta X) + b(Z-\gamma X)$, i.e. passant par le point p , $i(p;D \cap C)$ le nombre d'intersection en p de D et de C . On a $i(p;D \cap P) \geq \mathrm{mult}(p;P) = r$; et on a $i(p;D \cap P) > r$ si et seulement si, il existe i avec $(a,b) = \lambda(a_i, b_i)$ et $\lambda \in k$. Si ces conditions sont réalisées, on dit que D est une *tangente (propre) à* C *en* p .

On rappelle que $i(p;D \cap P) := \dim_k \frac{k[Y-\beta, Z-\gamma]_{(Y-\beta, Z-\gamma)}}{(P(1,Y,Z), a(Y-\beta) + b(Z-\gamma))}$. Si $p = (\alpha:\beta:\gamma)$, on a $r = 1$ si et seulement si $(\frac{\partial P}{\partial X}(\alpha,\beta,\gamma), \frac{\partial P}{\partial Y}(\alpha,\beta,\gamma), \frac{\partial P}{\partial Z}(\alpha,\beta,\gamma)) \neq (0,0,0)$.

Si ces conditions sont réalisées alors il y a une seule tangente à C en p , elle est définie par le polynôme $\frac{\partial P}{\partial X}(p)X + \frac{\partial P}{\partial Y}(p)Y + \frac{\partial P}{\partial Z}(p)Z$.

1.2. La courbe duale

Théorème *Soient* C *une courbe projective plane définie par un polynôme homogène, irréductible* F *avec* $\deg F \geq 2$, p' *est un point du plan contenant* C , *avec* $p' \notin C$, *alors il existe* $p \in C$ *tel que la droite passant par* p *et* p' *soit tangente (propre) en* p *à* C.

Voir par exwemple [**Fr**] théorème du paragraphe 5. p. 11.

2. La factorisation du polynôme caractéristique

Théorème 2 *Soient* k *un corps algébriquement clos de caractéristique nulle,* $A, B \in M_n(k)$. *On suppose que tout élément de* $kA + kB$ *est diagonalisable. Soient* X, Y, Z *des indéterminées sur* k , *alors il existe* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in k$ *de façon que* $\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i Y - \beta_i Z) = \text{dét}\,(XI_n - YA - ZB)$.

Démonstration Soit $F(X,Y,Z) := \text{dét}(XI_n - YA - ZB)$.
α) *Soit* $p := (\alpha : \beta : \gamma)$ *tel que* $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $D(p) := \gamma Y - \beta Z$. *Alors on a* $i(p; F \cap D(p)) = \text{mult}(p\,; F)$.
La droite définie par $D(p)$ passe par le point $(1:0:0)$ qui n'est pas sur C ; p est de la forme $(\alpha : 1 : \gamma)$ ou $(\alpha : \beta : 1)$. Supposons $p := (\alpha : 1 : \gamma)$. On a $F(X, 1, Z) = \text{dét}(XI_n - A - ZB)$, soit
$\text{dét}((X - \alpha)I_n - (Z - \gamma)B + \alpha I_n - A - \gamma B) = F(X, 1, Z)$.
Sachant que $\text{dét}(\alpha I_n - A - \gamma B) = 0$, quitte à appliquer une conjugaison, on peut supposer que $\alpha I_n - A - \gamma B$ est une matrice diagonale A' , de diagonale $(0, \ldots, 0, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_{r+1}\alpha_{r+2} \ldots \alpha_n \neq 0$ et $r \geq 1$. En posant $U := X - \alpha$, $V := Z - \gamma$. On a donc
$F(X, 1, Z) := G(U, V) = \text{dét}(UI_n - VB' + A')$ où B' est semblable à B . Facilement les coefficients des r premières lignes de $M := UI_n - VB' + A'$ sont des polynômes homogènes en U et V , de degré 1 , il suit de cela que $G(U, V) = G_r(U, V) + G_{r+1}(U, V) + \ldots + G_n(U, V)$, où $G_i(U, V)$ est homogène de degré i ou nul . On a aussi $G_r(U, 0) = (U^r)(\alpha_{r+1} \ldots \alpha_n) + U^{r+1}T$ où $T \in k[U]$. Il suit de cela que $G_r \neq 0$ et donc que $\text{mult}(p; F) = r$. Par ailleurs, on a $\dim_k \frac{k[U,V]_{(U,V)}}{(G(U,V), V)} = i(p\,; F \cap D(p))$, comme $G(U, 0) = U^r \varepsilon$ où ε est un inversible de $k[U]_{(U)}$, il suit que $i(p; F \cap D(p)) = r$.

β) *Montrons que* F *se factorise en polynômes de degré* 1 , i.e. $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i Y-\beta_i Z)=F(X,Y,Z)$. On a $P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}...P_s^{\alpha_s}=F(X,Y,Z)$ avec P_i irréductible, homogène. Supposons que degré $P_1 \geq 2$, soit C_1 la courbe projective plane définie par P_1 , alors on sait par le théorème 1 qu'il existe, issu de $(1:0:0)$ une tangente (propre) à C_1 , disons en $p:=(\alpha:\beta:\gamma)$. Alors on a $i(p;P_1\cap D(p))>\mathrm{mult}(p;P_1)$. Connaissant les formules

$i(p;P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}...P_s^{\alpha_s}\cap D(p))=\sum_j \alpha_j i(p;P_j\cap D(p))$,

$\mathrm{mult}(p;P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}...P_s^{\alpha_s})=\sum_j \alpha_j \,\mathrm{mult}(p;P_j)$ et sachant que

$i(p;P\cap D(p))\geq \mathrm{mult}(p;P)$, on déduit que $i(p;F\cap D(p))>\mathrm{mult}(p;F)$. Ce qui est une contradiction avec α). Ainsi donc degré $P_j=1$ et comme degré$_X F=n$ on a degré$_X P_j=1$.

3. Un plan vectoriel de matrices diagonalisables est commutatif

Lemme 1 *Soient* k *un corps commutatif, algébriquement clos de caractéristique nulle,* $kA'\oplus kB'\subset M_n(k)$ *un plan vectoriel constitué de matrices diagonalisables. Alors il existe* $A,B\in kA'\oplus kB'$ *de façon que* $kA+kB=k'A'\oplus kB'$ *et il existe* $\alpha_1,...\alpha_n,\beta_1,...,\beta_n\in k$ *avec* $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_t\neq\alpha_i$ *pour* $i>t$ *et* $\beta_1=\beta_2=...=\beta_t$ *et de plus* $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i Y-\beta_i Z)=\mathrm{dét}(XI_n-YA-ZB)$.

Démonstration Par le théorème 2 , on a $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i' Y'-\beta_i' Z')=\mathrm{dét}(XI_n-Y'A'-Z'B')$. Quitte à permuter les indices, on peut supposer qu'il existe t avec $(\alpha_1',\beta_1')=(\alpha_2',\beta_2')=...=(\alpha_t',\beta_t')\neq(\alpha_i',\beta_i')$ pour $i>t$. Comme k est infini, il existe $\mu\in k$ avec $\alpha_1'+\mu\beta_1'=\alpha_2'+\mu\beta_2'=...=\alpha_t'+\mu\beta_t'\neq\alpha_i'+\mu\beta_i'$ pour $i>t$.
Il suit de cela que

$$\prod_{i=1}^{n}(X-Y'(\alpha_i'+\mu\beta_i')-(Z'-\mu Y')\beta_i')=\mathrm{dét}(XI_n-Y'(A'+\mu B')-(Z'-\mu Y')B') .$$

En posant $Y:=Y'$, $Z:=Z'-\mu Y'$, $\alpha_i:=\alpha_i'+\mu\beta_i'$, $\beta_i=\beta_i'$, $A:=A'+\mu B'$, $B:=B'$, on obtient $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i Y-\beta_i Z)=\mathrm{dét}(XI_n-YA-ZB)$ avec $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_t\neq\alpha_i$ pour $i>t$ et $\beta_1=\beta_2=...=\beta_t$.

Lemme 2 *Soient* k *un corps algébriquement clos, de caractéristique nulle. On suppose que* $kA\oplus kB\subset M_n(k)$ *est un plan vectoriel constitué de matrices diagonalisables, que* A *est diagonale, de diagonale* $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ *avec* $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_t\neq\alpha_i$ *pour* $i>t$ *, que* $B=[b_{ij}]$ *et que*

$\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i Y-\beta_i Z)=\text{dét}(XI_n-YA-ZB)$ *avec* $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_t$ *. Alors on a* $b_{11}=\beta_1$, $b_{1,s}=b_{s,1}=0$ *pour* $2\le s\le t$.

Démonstration Comme $\chi_{yA+B}(X)=(X-\alpha_1 y-\beta_1)^t Q(X)$ pour tout $y\in k$ et sachant que $yA+B$ est diagonalisable, on a
$\dim\ker(yA+B-(\alpha_1 y+\beta_1)I_n)\ge t$, ainsi $\text{rang}(yA+B-(\alpha_1 y+\beta_1)I_n)\le n-t$, cela montre en particulier que tous les mineurs d'ordre $n-t+1$ de $yA+B-(\alpha_1 y+\beta_1)I_n$ sont nuls .
Soient Y une indéterminée sur k , $2\le s\le t$,

$$H(Y):=\text{dét}\begin{bmatrix} b_{1,s} & b_{1,t+1} & \cdot\ \cdot & b_{1,n} \\ b_{t+1,s} & Y(\alpha_{t+1}-\alpha_1)+b_{t+1,t+1}-\beta_1 & \cdot\ \cdot & b_{t+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n,s} & \cdot & \cdot\ \cdot & Y(\alpha_n-\alpha_1)+b_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Alors $H(Y)$ est un polynôme de degré majoré par $n-t$ et le coefficient de Y^{n-t} est $b_{1,s}\prod_{i>t}(\alpha_i-\alpha_1)$. Comme $H(y)$ est un mineur d'ordre $n-t+1$ de $yA+B-(\alpha_1 y+\beta_1)I_n$, on a $H(y)=0$ pour tout $y\in k$, et donc $H(Y)=0$, il suit que $b_{1,s}=0$. Soit

$$K(Y):=\text{dét}\begin{bmatrix} b_{11}-\beta_1 & b_{1,t+1} & \cdot\ \cdot & b_{1,n} \\ b_{t+1,1} & Y(\alpha_{t+1}-\alpha_1)+b_{t+1,t+1}-\beta_1 & \cdot\ \cdot & b_{t+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & \cdot & \cdot\ \cdot & Y(\alpha_n-\alpha_1)+b_{n,n}-\beta_1 \end{bmatrix}.$$

La même méthode montre que $(b_{11}-\beta_1)\prod_{i>t}(\alpha_i-\alpha_1)=0$, donc $b_{11}=\beta_1$. En considérant ${}^tA$, ${}^tB$, les transposées de A et B , on obtient $b_{s,1}=0$ pour $2\le s\le t$.

Lemme 3 *Soient* k *un corps algébriquement clos, de caractéristique nulle. On suppose que* $kA\oplus kB\subset M_n(k)$ *est un plan vectoriel constitué de matrices diagonalisables, que* A *est diagonale, de diagonale* $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ *avec* $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_t\ne\alpha_i$ *pour* $i>t$ *, que* $B=[b_{ij}]$ *et que* $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i Y-\beta_i Z)=\text{dét}(XI_n-YA-ZB)$ *avec* $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_t$ *. Alors on a* $b_{1,s}=0$ (resp. $b_{s,1}=0$) pour $t<s\le n$.

Démonstration Soit $P(T):=\prod_{i>t}((\alpha_i-\alpha_1)T+(\beta_i-\beta_1))$, alors on a degré$P=n-t$. Soit μ une racine de P , de multiplicité s , alors $\mu\alpha_1+\beta_1$ est une racine de $\chi_{\mu A+B}(X)$ de multiplicité $t+s$; sachant que $\mu A+B$ est diagonalisable, il suit de cela que $\mu A+B-(\mu\alpha_1+\beta_1)I_n$ est de rang $n-t-s$, ainsi tous les mineurs de cette matrice, d'ordre supérieur ou égal à

$n-t-s+1$ sont nuls. Montrons que $b_{t+1,1}=0$. Soient Y une indéterminée sur k ,

$$L(Y):=\begin{bmatrix} b_{t+1,1} & b_{t+1,t+2} & \cdot\,\cdot & b_{t+1,n} \\ b_{t+2,1} & Y(\alpha_{t+2}-\alpha_1)+b_{t+2,t+2}-\beta_1 & \cdot\,\cdot & b_{t+2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdot\,\cdot & Y(\alpha_n-\alpha_1)+b_{n,n}-\beta_1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi les mineurs d'ordre $n-t$, $n-t-1$, ..., $n-t-(s-1)$ de la matrice $L(\mu)$ sont nuls. Soit $\ell(Y):=\text{dét}(L(Y))$, alors le lemme 4 , ci-après, dit que μ est zéro de $\ell(Y)$ de multiplicité supérieure ou égale à s . Comme toute racine μ de P est racine de ℓ avec multiplicité de μ en $P\leq$multiplicité de μ en ℓ , on déduit que degré $\ell\geq n-t$ ou $\ell=0$. Or on a degré $\ell\leq n-t-1$, ainsi $\ell=0$. Sachant que $b_{t+1,1}\prod_{i\geq t+2}(\alpha_i-\alpha_1)$ est le coefficient de Y^{n-t-1} on a bien $b_{t+1,1}=0$.

Une méthode analogue montre que $b_{r,1}=0$ pour $t<r\leq n$. Par transposition on obtient que $b_{1,r}=0$ pour tout $t<r\leq n$.

Théorème 3 *Soient k un corps commutatif, algébriquement clos, de caractéristique nulle, $A,B\in M_n(k)$. On suppose que tout élément de $kA+kB$ est diagonalisable. Alors les matrices A et B sont simultanément diagonalisables, ou ce qui est équivalent, les matrices A et B commutent.*

Démonstration Si $\dim(kA+kB)\leq 1$, le résultat est immédiat. Si $\dim(kA+kB)=2$, il résulte du théorème 2 et des lemmes 1, 2, 3 qu'après conjugaison on a $A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & A'\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}\beta_1 & 0\\ 0 & B'\end{bmatrix}$. Ainsi tout élément de $kA'+kB'\subset M_{n-1}(k)$ est diagonalisable. Par hypothèse de récurrence sur n on peut supposer que A' et B' sont simultanément diagonalisables. Il suit facilement que A et B sont simultanément diagonalisables.

Corollaire *Soient k un corps commutatif, algébriquement clos, de caractéristique nulle, V un sous-espace vectoriel de $M_n(k)$, constitué de matrices diagonalisables. Alors les éléments de V sont simultanément diagonalisables, ou ce qui est équivalent, les éléments de V commutent deux à deux ; en particulier* $\dim V\leq n$.

Lemme 4 *Soient k un corps commutatif, x_{ij} , $1\leq i\leq r$, $1\leq j\leq r$, x_ℓ , $2\leq \ell\leq r$ des éléments de k , Y une variable sur k ,* $\Delta(Y):=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdot\,\cdot & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22}-Yx_2 & \cdot\,\cdot & x_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdot\,\cdot & x_{rr}-Yx_r \end{bmatrix}$. *Soit*

$y \in k$, on suppose que tous les mineurs principaux d'ordre supérieur ou égal à $r-s$ de $\Delta(y)$ contenant x_{11} s'annulent. Alors on a
dét $\Delta(Y) = (Y-y)^{s+1}Q$ *où* $Q \in k[Y]$.

Démonstration Quitte à remplacer x_{ii} par $x_{ii} - y\, x_i$ et Y par $Y-y$, on peut supposer que $y=0$. Soit $b_{ij}(Y)$ le terme en position i,j de la matrice $\Delta(Y)$. Soient $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties K à t éléments de la forme $K = \{1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leq r\}$ avec $t \leq s$. Sachant que dét$(\Delta(Y)) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, b_{1\,\sigma(1)}(Y) \ldots b_{n\,\sigma(n)}(Y)$ on déduit que le coefficient de Y^t est $\sum_{K \in \mathcal{K}} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}(J)} (\operatorname{sgn} \sigma') \prod_{j \in J} b_{j\,\sigma'(j)}(0)$ où J est complément ordonné de K dans $\{1, 2, \ldots, r\}$. Sachant que $\sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}(J)} (\operatorname{sgn} \sigma') \prod_{j \in J} b_{j\,\sigma'(j)}(0)$ est un mineur d'ordre $n-t$ de $\Delta(0)$, il suit bien que le coefficient de Y^t est nul si $t \leq s$.

Bibliographie

[*B, K*] **Brieskorn Egberty, Knörrer Horst** *Plane Algebraic Curves* Birkhâuser 1986

[*C*] **Coolidge Julian Lowell** *A Treatise on Algebraic Plane Curves* Dover Phoenix Ed. 2004

[*F*] **Fulton William** *Algebraic curves* The Benjamin/Cummings Publishing Company 1969

[*Fr*] **Fresnel Jean** *Courbe duale* http://www.math.u-bordeaux1.fr/~fresnel/:.

[*H*] **Hartshorne Robin** *Algebraic Geometry* Springer-Verlag (1977) ex. 2.3. p. 304

[*M* , *T*] **Motzkin Theodore Samuel, Taussky Olga** *Pair of matrices with property L. II* Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955) p. 387-401

[*W*] **Walker Robert J.** *Algebraic curves* Springer-Verlag (1978)


Sigillum