Lacanau-océan, le 31 août 2005, Jean Fresnel

Extension galoisienne et idéaux premiers

Soient $K \subset L$ *deux corps commutatifs,* L/K *fini et normal,* $G := \mathrm{Aut}(L/K)$, A (resp. B) *un sous-anneau de* K (resp. L) *avec* $\mathrm{Fr}(A) = K$ (resp. $\mathrm{Fr}(B) = L$), B *globalement stable par* G *et* B *entier sur* A *et enfin* A *intégralement clos dans* K *. Soient* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A *,* $\mathfrak{P}_1$ *et* $\mathfrak{P}_2$ *deux idéaux premiers de* B *avec* $\mathfrak{P}_i \cap A = \mathfrak{p}$ *. Alors il existe* $\sigma \in G$ *tel que* $\sigma(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{P}_2$ *; en d'autres termes le groupe* G *opère transitivement sur l'ensemble des idéaux premiers de* B *au-dessus de* $\mathfrak{p}$ *. Un exemple d'anneau* B *ayant les propriétés indiquées est la clôture intégrale de* A *dans* L *.*

1) Soient $G = \{ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r \}$, $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A , $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux idéaux maximaux de B avec $\mathfrak{M}_i \cap A = \mathfrak{m}$. Il s'agit de montrer que $\mathfrak{M}_2 \in \{ \sigma_1(\mathfrak{M}_1), \sigma_2(\mathfrak{M}_1), \ldots, \sigma_r(\mathfrak{M}_1) \}$. Supposons le contraire.
1.1) Montrer qu'il existe $c \in B$ tel que $c \equiv 1 \bmod \sigma_i(\mathfrak{M}_1)$ pour $1 \leq i \leq r$ et $c \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}_2$ (utiliser le théorème des chinois, F.1.9.14.).
1.2) Soit $N_{L/K}$ la norme définie en F.3.8.21. (partie 3.), i.e.
$N_{L/K}(c) = \sigma_1(c)\, \sigma_2(c) \ldots \sigma_r(c)$ (resp. $N_{L/K}(c) = (\sigma_1(c)\, \sigma_2(c) \ldots \sigma_r(c))^{p^\alpha}$ avec $\alpha \geq 0$), si $\mathrm{car} K = 0$ (resp. $\mathrm{car} K = p$) ; on a donc $N_{L/K}(c) \in K$. Conclure que $N_{L/K}(c) \in A$ (utiliser $N_{L/K}(c)$ entier sur A).
1.3) Déduire de 1.1) et 1.2) que $N_{L/K}(c) \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$ et aussi que $N_{L/K}(c) \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}$. Conclure à une contradiction.
2) Soient $G = \{ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r \}$, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A , $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ deux idéaux premiers de B avec $\mathfrak{P}_i \cap A = \mathfrak{p}$. Il s'agit de montrer que $\mathfrak{P}_2 \in \{ \sigma_1(\mathfrak{P}_1), \sigma_2(\mathfrak{P}_1), \ldots, \sigma_r(\mathfrak{P}_1) \}$.
2.1) Soient $S := A - \mathfrak{p}$, $A' := S^{-1}A = A_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m} := \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, $B' := S^{-1}B$, $\mathfrak{M}_i := \mathfrak{P}_i B'$. Montrer que $\mathfrak{M}_i \cap A' = \mathfrak{m}$ et que $\mathfrak{M}_i$ est maximal (utiliser F.8.2.4.).
2.2) Conclure, en utilisant 1) avec A' , B', $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$.
3) Montrer que la clôture intégrale de A dans L a les propriétés indiquées.

[Fr. F.] **Fresnel J** *Anneaux* (Hermann 2001)