Devoir Maison n°2

Exercice 1 Produit semi-direct

1. Soient H et K deux groupes notés multiplicativement. On note $\mathrm{Aut}(H)$ le groupe des automorphismes de H. Soit

$$\varphi\colon \begin{cases} K & \to \mathrm{Aut}(H) \\ k & \mapsto \varphi_k \end{cases}$$

un morphisme de groupes.

(a) Montrer que l'ensemble $H \times K$ muni de la loi

$$(h, k) \cdot (h', k') = (h\varphi_k(h'), kk'),$$

est un groupe. Le groupe ainsi obtenu est appelé *produit semi-direct* de H par K relativement à φ et est noté $H \rtimes_\varphi K$. Si φ est le morphisme trivial (c'est-à-dire, $\varphi_k = 1_{\mathrm{Aut}(H)} = \mathrm{id}_H$ pour tout $k \in K$), on retrouve le *produit direct* de H et K.

(b) On suppose que H et K sont abéliens. Montrer que $H \rtimes_\varphi K$ est commutatif si et seulement si φ est le morphisme trivial.

(c) Soient

$$H' = H \times \{1\} = \{(h, 1) : h \in H\},$$
$$K' = \{1\} \times K = \{(1, k) : k \in K\}.$$

Montrer que H', K' sont deux sous-groupes de $H \rtimes_\varphi K$ et que $H' \subset H \rtimes_\varphi K$ est distingué. Remarquer que $H' \cdot K' = H \rtimes K$ et $H' \cap K' = \{(1, 1)\}$ et montrer que le groupe quotient $H \rtimes K/H'$ est isomorphe à K.

2. Réciproquement, soient G un groupe et E, F deux sous-groupes de G. On supposer que E est distingué dans G et que $E \cdot F = G$ et $E \cap F = \{1\}$. On définit

$$\psi\colon \begin{cases} F & \to \mathrm{Int}(E) \\ x & \mapsto \psi_x \end{cases}$$

où ψ_x est l'automorphisme intérieur $y \mapsto xyx^{-1}$ de E. Montrer que G et $E \rtimes_\psi F$ sont isomorphes.

3. (a) Soit $n \geq 1$ un entier. Exhiber un isomorphisme entre le groupe diédral D_{2n} et un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. A-t-on $D_{2n} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

(b) À l'aide de la question (1.b), contruire un groupe *non commutatif* d'ordre $21 = 3 \times 7$.

Corrigé :

(1) (1.a) Vérification directe.

(1.b) Soient $(h, k), (h', k') \in H \rtimes K$, on a

$$(h, k) \cdot (h', k') = (h\varphi_k(h'), kk'), \quad \text{et} \quad (h', k') \cdot (h, k) = (h'\varphi_{k'}(h), k'k)$$

Comme H et K sont commutatifs, $(h, k) \cdot (h', k') = (h', k') \cdot (h, k)$ si et seulement si $h\varphi_k(h') = h'\varphi_{k'}(h)$.

– Supposons pour l'instant $H \rtimes K$ commutatif, c'est-à-dire, $h\varphi_k(h') = h'\varphi_{k'}(h)$ pour tout $h, h' \in H$ et tout $k, k' \in K$. En particulier, en prenant $h = 1 \in H$, on a

$$\varphi_k(h') = h'\varphi_{k'}(1) = 1, \quad \forall k \in K, h' \in H.$$

En particulier, $\varphi_k = \mathrm{id}_H \in \mathrm{Aut}(H)$. Donc, le morphisme $\varphi\colon K \to \mathrm{Aut}(H)$ est trivial.

– Réciproquement, supposons que $\varphi\colon K \to \mathrm{Aut}(H)$ est trivial, c'est-à-dire, $\varphi_k = \mathrm{id}_H$ pour tout $k \in K$. Par suite, on a $h\varphi_k(h') = hh'$, et $h'\varphi_{k'}(h) = h'h$. D'où

$$h\varphi_k(h') = h'\varphi_{k'}(h) = hh'.$$

C'est-à-dire, le groupe $H \rtimes K$ est commuatif.

(1.c) Vérification directe.

(2) On considère l'application suivante :

$$\alpha\colon E \rtimes_\psi F \to G, \quad (e, f) \mapsto e \cdot f \in G.$$

Montrons que c'est un morphisme de groupe. En effet, soient $(e, f), (e', f') \in E \rtimes_\psi F$, on a

$$\alpha((e, f)(e', f')) = \alpha((e\psi_f(e'), ff')) = e\psi_f(e')ff'.$$

Or par définition, $\psi_f(e') = fe'f^{-1}$, on obtient $\alpha((e, f)(e', f')) = e\psi_f(e')ff' = efe'f^{-1}ff' = efe'f'$. D'autre part, $\alpha(e, f) \cdot \alpha(e', f') = efe'f'$, par suite $\alpha((e, f)(e', f')) = \alpha(e, f) \cdot \alpha(e', f')$. Autrement-dit, α est un morphisme de groupes. Il nous reste à vérifier que le morphisme α ainsi défini est un *isomorphisme*. Comme $G = E \cdot F$, pour tout $g \in G$, on peut trouver $e \in E$ et $f \in F$ tels que $g = ef$. Par suite, $\alpha(e, f) = g$, d'où la surjectivité de α. Pour vérifier l'injectivité de α, il suffit d'étudier son noyau $\ker(\alpha)$. Soit $(e, f) \in \ker(\alpha) = E \rtimes_\psi F$, on a alors $1 = \alpha(e, f) = ef$. Par suite, $e = f^{-1} \in E \cap F = \{1\}$. D'où $e = f = 1$, ce qui achève la preuve.

(3) (a) Par définition, $D_{2n} =< \sigma, \tau >$ avec $\sigma^n = 1$, $\tau^2 = 1$, et $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$. On considère $\phi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tel que $\phi(\bar{0}) = \mathrm{id}$, et

$$\phi(\bar{1})\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \overline{m} \mapsto \overline{-m}.$$

On vérifie que ϕ ainsi défini nous donne un morphisme de groupe. Considérons ensuite l'application suivante :

$$\beta\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to D_{2n}, \quad (\overline{m}, \bar{i}) \mapsto \sigma^m\tau^i.$$

qui est alors un *isomorphisme*. Remarquons que si $n \geq 3$, alors D_{2n} *n'est pas isomorphe à* $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ car D_{2n} n'est pas commutatif dès que $n \geq 3$.

(b) Comme 7 est un premier, le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ est cyclique d'ordre 6. Soit σ un générateur de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$, qui est donc d'ordre 6. On considère l'application suivante

$$\gamma\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}), \quad \bar{i} \mapsto \sigma^{2i}.$$

qui est un *morphisme* de groupes. Comme $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ est d'ordre 6, par suite, l'application γ ci-dessus est non triviale. Donc, le produit semi-direct

$$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes_\gamma \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

n'est pas commutatif par (1.b). D'où la conclusion.

Exercice 2 Sous-groupe transitifs de S_4

Soit $n \geq 1$. Un sous-groupe G de $S_n = S(\{1, 2, \cdots, n\})$ est dit *transitif* si son action sur $\{1, 2, \cdots, n\}$ est transitive, i.e., pour tous $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, il existe $g \in G$ tel que $g(i) = j$. Le *commutant* d'un élément γ d'un groupe Γ est le sous-groupe de Γ des éléments qui commutent avec γ.

1. Montrer que n divise l'ordre de tout sous-groupe transitif de S_n.
2. Déterminer les sous-groupes transitifs de S_3.
3. Soit H le sous-groupe de S_4 engendré par $(1, 2, 3, 4)$ et $(1, 3)$.
   (a) Déterminer les sous-groupes de H qui sont transitifs.
   (b) Déterminer le commutant de chaque élément d'ordre 2 de S_4, et réaliser H de cette manière.

(c) Soit G un sous-groupe transitif de S_4 d'ordre un diviseur de 8. Montrer qu'il est conjugué à l'un de ceux déterminés à la question (a).

(d) Établir, à conjugaison près, la liste des sous-groupes transitifs de S_4.

Corrigé :

(1) Soit $G \subset S_n$ un sous-groupe *transitif*. Si l'on note $G_1 \subset G$ le fixateur de l'élément 1, alors on a l'égalité $|G| = |G_1| \cdot |O_1|$, avec O_1 l'orbite de l'action de G sur $\{1, 2, \cdots, n\}$ contenant 1. Comme G agit transitivement sur $\{1, 2, \cdots, n\}$, c'est-à-dire, il n'y a qu'une seule orbite pour cette action. Ainsi $O_1 = \{1, 2, \cdots, n\}$, par suite $|O_1| = n$. Donc $n = |O_1|$ divise $|G|$.

(2) Soit $G \subset S_3$ un sous-groupe transitif de S_3, en particulier, d'après la formule de Lagrange, on a $|G| \in \{1, 2, 3, 6\}$. Vu la question précédente, 3 divise $|G|$, par suite, $|G| = 3$ ou 6. Si $|G| = 3$, G est alors l'unique sous-groupe d'ordre 3 de S_3 : $G = \{(123), (132), 1\}$ (et on vérifie que G est transitif) ; si $|G| = 6$, on a forcément $G = S_3$, qui est également transitif.

(3) Par défintion, $H =< (1234), (13) >\subset S_4$.

(3.a) Avec un calcul explicite, on montre que $H = \{1, (1234), (13)(24), (1432), (13), (14)(23), (24), (12)(34)\}$. En particulier, H est d'ordre 8.

(3.b) Notons $\sigma = (13)(24) \in S_4$. Avec un calcul explicite, on a $(1234)\sigma = \sigma(1234)$, et $(13)\sigma = \sigma(13)$. Autrement-dit, les deux générateurs de H sont tous contenus dans $C(\sigma)$ (:= le commutant de σ dans S_4). Comme $C(\sigma) \subset S_4$ est un sous-groupe, on en déduit que $H \subset C(\sigma)$, en particulier, $8 = |H| \leq |C(\sigma)|$. D'autre part, S_4 agit sur $X = S_4$ par conjugaison :

$$S_4 \times X \to X, \quad (\tau, x) \mapsto \tau x \tau^{-1}$$

et on note par $O_\sigma \subset X$ l'orbite de $\sigma \in X = S_4$ sous cette action de S_4. Par définition, $C(\sigma)$ est exactement le fixateur de σ sous cette action, on en déduit que

$$|S_4| = |C(\sigma)| \cdot |O_\sigma|.$$

D'après le corollaire 8.2.4 du cours, on a

$$O_\sigma = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

ainsi $|O_\sigma| = 3$. Donc $C(\sigma)$ est d'ordre 8, et on a forcément $H = C(\sigma)$.

(3.c) Soit maintenant K un sous-groupe transitif de S_4, d'ordre divisant 8. D'après (1), on sait que 4 divise le cardinal de K, par suite, $|K| = 4$ ou 8.

Cas où $|K| = 4$: Alors l'action de K sur $\{1, 2, 3, 4\}$ est simplement transitive. On se distingue deux cas :

– Si K cyclique d'ordre 4. Alors on voit que K est conjugué à $< (1, 2, 3, 4) >$;
– Si K n'est pas cyclique. Alors comme K agit transitivement sur $1, 2, 3, 4$, on peut trouver $\tau \in K$, tel que $\tau(1) = 2$. Ainsi $\tau = (1, 2)(3, 4)$. De même, on montre que K contient $(13)(24)$, et $(14)(23)$. Donc $K = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

Cas où $|K| = 8$: Alors, pour chaque élément $i \in 1, 2, 3, 4$, son fixateur est d'ordre 2, en particulier, non trivial. Donc, quitte à renuméroter les $\{1, 2, 3, 4\}$ (ce qui revient au même à remplacer K par un conjugué de K), on peut supposer que $(1, 3) \in K$, et $(2, 4) \in K$. En particulier, ces deux éléments engendrent un sous-groupe K' d'ordre 4 de K. Comme K est d'ordre 8, K' et forcément distingué dans K. En particulier, l'élément $(13)(24)$ engendre un sous-groupe d'ordre 2 de K, qui est également distingué dans K. Par suite, on a vu dans un exo. dans une feuille TD (numéro ?) que cet élément $(13)(24)$ sont forcément dans le centre de K. Donc, K est contenu dans le commutant de $(13)(24)$ dans S_4. Mais d'après (3.b), on sait que ce commutant est exactement le sous-groupe engendré par (1234) et (13). Donc $K = H =< (1234), (13) >$.

(3.d) Soit $K \subset S_4$ un sous-groupe transitif. Par la question (1), on a 4 divise $|K|$. Donc $|K| \in \{4, 8, 12, 24\}$.
Si |K|=4 : à conjugué près, il y a deux possibilités :

$$< (1234) >, \quad \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Si |K|=8 : à conjugué près, il n'y a qu'une seule possibilité : $K =< (1234), (13) >$.
Si |K|=12 : alors $K \subset S_4$ est d'indice 2, par suite, il est distingué dans S_4. Donc $K = A_4 \subset S_4$.
Si |K|=24 : alors, on n'a pas d'autre choix, $K = S_4$.

Exercice 3 Classification des groupes non-commutatifs d'ordre 8

Le but de cet exercice est de déterminer tous les groupes *non-commutatifs* d'ordre 8 à isomorphisme près. Dans la suite, G est un groupe *fini* et $Z = Z(G)$ le centre de G.

1. Montrer que Z est un sous-groupe distingué de G. Si G est d'ordre 8, quels sont les ordres possibles de Z ?
2. Montrer que si G/Z est un groupe cyclique, alors G est abélien.
3. Soit p un premier, et supposer le cardinal de G est une puissance de p. Montrer que $Z(G) \neq \{1\}$. (**Indication :** on pourra consider l'action de G sur lui-même par conjugaison, puis utiliser l'équation aux classes pour trouver une formule du type suivant :
$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|}{|H_i|}$$
où les $H_i \subsetneq G$ sont certains sous-groupes de G)
4. On suppose désormais que G est non-commutatif d'ordre $8 = 2^3$.
   (a) Montrer que $Z(G) \subset G$ est un sous-groupe d'ordre 2, et que $G/Z(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que G contient au moins un élément d'ordre 4.
   (c) Montrer que tout sous-groupe de G d'ordre 4 est distingué dans G. Soit $H \subset G$ un sous-groupe cyclique et d'ordre 4 de G.

Cas 1 : Il existe dans $G - H$ un élément d'ordre 2. Montrer alors que $G =< H, x >$. Montrer que l'automorphisme $H \to H$, $g \mapsto xgx^{-1}$ est égal à $g \mapsto g^{-1}$. En déduire que G est isomorphe au groupe diédral D_8.

Cas 2 : Tout élément de $G - H$ est d'ordre 4. Montrer alors que G n'a qu'un seul élément d'ordre 2, et qu'il engendre $Z(G)$. On le note par -1. Soit i un générateur de H, et soit $j \in G - H$. On pose $k = ij$. Montrer que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. On note alors $-i$ pour i^3, $-j$ pour j^3, et $-k$ pour k^3. Écrire la table de Cayley de G.

Note : ce groupe est appelé le groupe des quaternions et noté par $\mathbb{H}_8$ (Confer DM n°1 Exercice 2 pour une définition de $\mathbb{H}_8$ en termes de matrices).

Corrigé :

(1) On vérifie facilement que $Z = Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G, et par Lagrange, les ordres possibles de Z sont $1, 2, 4, 8$.

(2) Soit $\gamma \in G$ un élément de G dont l'image $\bar{\gamma}$ dans G/Z est un générateur. Montrons que tout $g \in G$, on peut trouver $z \in Z$, et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $g = z\gamma^n$. En effet, notons $\bar{g}$ l'image de $n \in G$ dans G/Z. Comme $G/Z =< \bar{\gamma} >$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\bar{g} = \bar{\gamma}^n$. Par suite, $z := g\gamma^{-n}$ appartient au noyau du morphisme $G \to G/Z$, c'est-à-dire, $z \in Z$. D'où $g = z\gamma^n$. Soit maintenant $g' \in G$ un élément quelconque, et soient $z' \in Z$ et $n' \in \mathbb{Z}$ tels que $g' = z'\gamma^{n'}$. On a alors
$$gg' = z\gamma^n z'\gamma^{n'} = zz'\gamma^n\gamma^{n'} = zz'\gamma^{n'}\gamma^n = z'\gamma^{n'}z\gamma^n = g'g.$$
D'où la commutativité de G.

(3) Déjà vu dans le TD.

(4)(4.a) Comme $Z \neq (1)$ et G n'est pas commutatif d'ordre 8, les ordres possibles de Z sont $2, 4$. Si $|Z| = 4$, alors G/Z serait d'ordre 2, donc cyclique. Par (2), G serait commutatif, d'où une contradiction. Donc $|Z| = 2$. De plus, de la même raison, G/Z est un groupe d'ordre 4 *non cyclique*, par suite on a forcément
$$G/Z \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(4.b) Par Lagrange, les ordres possibles d'un élément sont $1, 2, 4, 8$. Comme G n'est pas cyclique (d'ordre 8), il n'y a pas d'élément d'ordre 8 dans G. D'autre part, si tous les éléments sont d'ordre divisant 2, G serait alors commutatif, ce qui nous donne une contradiction. Donc, il existe au moins un élément d'ordre 4.

(4.c) Comme G est d'ordre 8, tous les sous groupes d'ordre 4 sont d'indice 2 dans G, par suite, ils sont tous distingués dans G. Soit alors $H \subset G$ un sous-groupe *cyclique d'ordre* 4.
Cas 1 : Soit $x \in G - H$ un élément d'ordre 2. Comme $x \notin H$, la réuinon disjointe suivante

$$H \sqcup xH \subset G$$

nous donne un sous-ensemble d'ordre 8. Donc, on a $G = H \sqcup xH =< H, x >$. Soit $h_0 \in H$ un générateur, comme $H \subset G$ est distingué, $xh_0x^{-1} \in H$. De plus, comme h_0 et xh_0x^{-1} ont le même ordre, et comme H est cyclique d'ordre 4 engendré par g, on a alors ou bien $xh_0x^{-1} = g$, ou bien $xh_0x^{-1} = h_0^3 = h_0^{-1}$ (car h_0 et $h_0^{-1} = h_0^3$ sont les seuls deux éléments d'ordre 4 de H). Or $G =< H, x >$, et comme G est *non commutatif*, la première possibilité est impossible. Par suite, $xh_0x^{-1} = h_0^{-1}$. Comme $h_0 \in H$ est un générateur, il s'ensuit que pour tout $g \in H$, on a $xgx^{-1} = g^{-1}$. Donc, on a $G =< H, x >=< h_0, x >$ avec

$$h_0^4 = 1, \quad x^2 = 1, \quad h_0 x = x h_0^{-1}.$$

Donc $G \simeq D_8$.
Cas 2 : Notons par $i \in H$ un générateur. Si tout élément de $G - H$ est d'ordre 4, et comme $H =< i >$ est cyclique d'ordre 4, le seul élément d'ordre 2 de G est alors i^2, qui sera noté dans la suite par -1. Comme il n'y a qu'un seul élément d'ordre 2, pour tout $g \in G$, on a forcément $g \cdot (-1) \cdot g^{-1} = -1$, c'est-à-dire $-1 \in Z = Z(G)$. Soit $j \in G - H$ qui est alors d'ordre 4. Comme j est d'ordre 4, j^2 est alors d'ordre 2, par suite, on a forcément $j^2 = -1$. Posons ensuite $k = ij$. Comme $j \notin H =< i >$, on a $k = ij \neq 1$. De plus, $k \neq -1$ (car sinon $i^2 = ij$, on aurait alors $i = j$, une contradiction !). Par suite, $k \in G$ est d'ordre 4. Donc k^2 est à nouveau d'ordre 2, par suite $k^2 = -1$. On note ensuite i^3 par $-i$, j^3 par $-j$, et k^3 par $-k$. La table de Cayley de G est facile à écrire.

Exercice 4 Formule de Burnside et coloriages de polyèdres

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Pour tout $x \in X$, on note par O_x son orbite par l'action de G et par G_x son stabilisateur.

   (a) Soit $x \in X$ et $y \in O_x$. Trouver $z \in G$ tel que
   $$G_y = z^{-1} G_x z.$$

   (b) Montrer que pour tout $x \in X$,
   $$|G| = \sum_{y \in O_x} |G_y|.$$

   (c) En déduire
   $$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x|$$
   où $\Omega = \{O_x, x \in X\}$ est l'ensemble des orbites dans X par l'action de G.

   (d) En décomposant de deux façons l'ensemble $F = \{(g, x) \in G \times X / g \cdot x = x\}$, déduire de la question précédente la **formule de Burnside** :
   $$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|,$$
   où $\mathrm{Fix}(g)$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que $g \cdot x = x$.

2. On cherche maintenant à déterminer le nombre de façons de colorier les faces et les arêtes d'un tétraèdre régulier, où k couleurs sont disponibles, à chaque face et à chaque arête étant attribuée une couleur et une seule. Le tétraèdre T est vu comme un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, et on le suppose centré en 0.

   On pourra identifier deux coloriages du tétraèdre s'il existe une rotation R de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ qui préserve le tétraèdre, i.e. $R(T) = T$, et qui envoie le premier coloriage sur le second.

   (a) Soit X l'ensemble des coloriages où on interdit cette identification. Quel est le cardinal de X ?

   (b) Montrer que l'ensemble des rotations préservant T, muni de la loi de composition, est un groupe.

   On note G ce groupe. On admet qu'il est fini et que les éléments de G sont au nombre de 12 :
   - l'identité $Id_{\mathbb{R}^3}$.
   - 3 rotations d'axe passant par le milieu d'une arête et le milieu de l'arête opposée, et d'angle π.
   - 8 rotations d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposée, et d'angle $\pm 2\pi/3$.

   (c) Le groupe G agit naturellement sur X, et chaque coloriage du tétraèdre correspond à une orbite O_x dans X par l'action de G. Exprimer le nombre de coloriages du tétraèdre en fonction de k.

(1) Déjà vu en TD.

(2) Un tétraèdre régulier a 4 faces S_1, S_2, S_3, S_4, et 6 arêtes $A_1, \cdots, A_6$. En particulier, il y a 10 objets à colorier.

   (a) $|X| = k^{10}$.

   (b) C'est clair.

   (c) On va appliquer la formule de Burnside : soit n le nombre de coloriage, ou d'une manière équivalente, le nombre d'orbites de G sur X, on a

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

   Il y a alors 3 cas à distinguer
   – Si $g = \mathrm{id}$. Alors $\mathrm{Fix}(g) = X$, par suite, $|\mathrm{Fix}(g)| = |X| = k^{10}$.
   – Si g est l'une des 3 rotations d'axe passant par le milieu d'une arête et le milieu de l'arête opposée, et d'angle π. Alors $|\mathrm{Fix}(g)| = k^6$.
   – Si g est l'une des 8 rotations d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposée, et d'angle $\pm 2\pi/3$. Par suite, $|\mathrm{Fix}(g)| = k^4$.

   On obtient finalement

$$n = \frac{1}{12}(k^{10} + 3 \cdot k^6 + 8 \cdot k^4)$$