La conjecture de monodromie-poids (ℓ-adique) d'après P. Scholze

Mazzari Nicola

Résumé. Voici des notes pour le GdT prefectoïde (IMB 2013) sur la dernier section de l'article de P. Scholze sur les espaces perfectoïdes et la conjecture de monodromie-poids. On se limite à copier la preuve de Scholze avec quelques petits rappels sur le théorème de monodromie locale ℓ-adique. Comme il est probable que l'auteur de ces notes a commis des erreurs il est fortement conseillé de lire les références données.

1. Corps locaux (rappels)

Soit K un corps local à corps résiduel k de caractéristique $p > 0$ [1]. Soit R l'anneau de valuation de K.

Pour tout corps E, on note $G_E = \mathrm{Gal}(E_s|E)$ le groupe de Galois absolu (E_s est la clôture séparable de E).

On rappel le dévissage classique de G_K :

$$1 \to I \to G_K \to G_k \to 1$$

où $I = G_{K_{\mathrm{nr}}}$ est le groupe d'inertie (voir le groupe de Galois absolu de l'extension non-ramifié maximale de K contenue dans K_s) et on identifie $G_k = \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{nr}}|K)$; puis si $\mu_{\ell^n}(K_s)$ est le groupe des racines de l'unité d'ordre ℓ^n dans K_s (ou bien dans k_s car $\ell \neq p$) et $\mathbb{Z}_\ell(1) := \varprojlim_n \mu_{\ell^n}(K_s)$ est le twist de Tate. Si $K_\ell = K_{\mathrm{nr}}(\pi^{1/\ell^\infty})$ est l'extension modérément ramifié de K_{nr} ($\pi \in K$ uniformisante) alors

$$1 \to P_\ell \to I \to \mathbb{Z}_\ell(1) \to 1$$

avec $P_\ell = G_{K_\ell}$ qui est un groupe profini d'ordre coprime à ℓ. La projection $t_\ell : I \to \mathbb{Z}_\ell(1)$ est induite par $\pi^{1/\ell^n} t_{\ell,n}(g) = g(\pi^{1/\ell^n})$.

Pour le détailles voir [Ser68].

2. Monodromie ℓ-adique

Le théorème de monodromie locale apparaisse pour la première fois dans [CS01, letter 24 Sept. 1964 p.183] [2], des autres références sont [ST68, Appendix] ou [Ill94, SGA72, Del80].

Date: 7/3/2013.

1. i.e. K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{F}_p((t))$.

2. La réponse de Serre commence par : *Ton théorème sur l'action du groupe d'inertie est rupinant – si tu l'as vraiment montré.*

Soit $\rho : G_K \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V)$ un homomorphisme continu [3] avec V un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie (ce qui on appel une représentation ℓ-adique à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$).

2.1. **Théorème** (Grothendieck)**.** *Tout ρ comme avant est quasi-unipotente : il existe un sous groupe $I_1 \subset I$ ouvert (i.e. d'indice fini) tel que $\rho_{|I_1}$ est unipotente* [4]*.*

2.2. *Remarque.* Donc quitte à faire une extension finie de K on peut supposer $I_1 = I$ (cas semi-stable) : i.e. tout représentation ℓ-adique est potentiellement semistable (sous l'hypothèse k fini). Si on remplace $\mathbb{Q}_\ell$ par $\mathbb{Q}_p$ c'est ne pas vrai que l'action de I est quasi-unipotente, mais (en caractéristique zero) on à le même énoncé si on se restreint aux représentations de de Rham (et on donne la bonne définition de semi-stabilité). Voir Colmez pour une discussion complète sur le théorème de monodromie p-adique.

Démonstration. On remarque que l'identification $\mathbb{Z}_\ell(1) \equiv \mathrm{Gal}(K_\ell|K_{nr})$ est compatible avec l'action de G_k qui agit de façon naturel sur les racines de l'unité et par automorphismes internes de l'extension $\mathrm{Gal}(K_\ell|K)$ sur le groupe de droite. Donc si on note $\chi_\ell : G_k \to \mathbb{Z}_\ell^*$ le caractère cyclotomique, $\zeta \in \mathbb{Z}_\ell(1)$ et $g \in G_k$ on obtient que $\zeta^{\chi_\ell(g)}$ et ζ sont conjugues par un élément de $\mathrm{Gal}(K_\ell|K)$. Cela implique que si $a \in \mathbb{Z}_\ell^*$ est une valeur propre pour $\rho(\zeta)$ (qui est un $\mathbb{Z}_\ell$-automorphisme d'un réseau) alors $a^{\chi_\ell(g)}$ est aussi une valeur propre pour tous $g \in G_k$. L'image de χ_ℓ est infinie, i.e. pour tous k'/k extension finie, k' ne contient pas toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ. Donc si a n'est pas une racine de l'unité on obtient une contradiction car V est de dimension finie. □

Avec le notation précédente on a que $\rho_{|I_1}$ factorise par $\mathbb{Z}_\ell(1)$: on montre que $\rho(P_\ell) \subset GL(\Lambda/l\Lambda)$ qui est un groupe fini, mais les endomorphismes nilpotentes sont d'ordre fini en caractéristique zéro.

Soit $T \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V)$ unipotente, on peut définir un endomorphisme nilpotent

$$\log(T) := -\sum_{n=1} \frac{(\mathrm{id} - T)^n}{n} \ .$$

2.3. **Définition.** Soit $\zeta \in \mathbb{Z}_\ell(1)$ générateur, alors on définit

$$N : V \otimes \mathbb{Q}_\ell(1) \to V \quad v \otimes \zeta \mapsto \log(\rho(\zeta))(v)$$

qui est le *logarithme de la partie unipotente de la monodromie* de ρ. Donc

$$\forall\ g \in I_1 \qquad \rho(g) = \exp(N(- \otimes t_\ell(g)))$$

3. La continuité est équivalente à l'existence d'un $\mathbb{Z}_\ell$ réseau $\Lambda \subset V$ tel que ρ factorise par $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}(\Lambda)$.

4. $(\mathrm{id} - \rho(g))^n = 0$ pour $n >> 0$.

et N est G_K-invariante [5]

2.4. **Lemme** (Jacob-Morosov). *Soit $N : V \to V$ un endomorphisme nilpotent dans une catégorie abélienne (e.g. $\mathbb{Q}_\ell$-esp. vect.), alors il existe une seule filtration $M_iV \subset V$ croissante, exhaustive et séparé tel que :*

(1) $N(M_iV) \subset M_{i-2}V$;

(2) N^k induise un isomorphisme $\mathrm{gr}_k^M V \to \mathrm{gr}_{-k}^M V$.

Démonstration. On peut construire M_iV par récurrence sur d tel que $N^{d+1} = 0$: si $d = 0$, alors $N = 0$ et on pose $M_{-1}V = 0 \subset M_0V = V$; si $d > 0$ on pose

$$M_{-d-1}V = 0 \subset M_{-d}V = \operatorname{im} N^d \subset M_{d-1}V = \ker N^d \subset M_dV = V$$

on obtient la suite exacte courte

$$0 \to M_{-d}V \to M_{d-1}V \to \ker N^d / \operatorname{im} N^d \to 0$$

et N induise un endomorphisme nilpotent $\bar{N}$ sur le dernier terme à droite tel que $\bar{N}^d = 0$. Donc on peut filtrer $\ker N^d / \operatorname{im} N^d$ et obtenir par pull-back la filtration sur V. □

Avec le notation du Def. 2.3, quitte à choisir un générateur topologique de $\mathbb{Z}_\ell(1)$, on à $V \otimes \mathbb{Q}_\ell(1) \cong V$ et donc il existe une filtration (de monodromie) associé à le logarithme de la monodromie N.

3. Monodromie-Poids

Soit X/K une variété projective et lisse et soit ρ la représentation ℓ-adique

$$V := \left(\varprojlim_n H^i_{\mathrm{et}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/l^n) \right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

qui est quasi-unipotente par le théorème de monodromie locale. Donc on peut définir l'opérateur N et la filtration de monodromie.

La conjecture de monodromie-poids dit que :

3.1. **Conjecture** (Deligne). *Pour tout $\phi \in G_K$ relèvement du Frobenius géométrique [6] les valeurs propre de ϕ agissant sur $\mathrm{gr}_j^M V$ sont des nombres de Weil de poids $i + j$ [7]. (Voir* [Del71, Principe 8.1] *ou* [Ill94, Ito]*.)*

Grosso modo on voudrais que I agisse trivialement sur $\mathrm{gr}_j^M V$ et ce la est une représentation de $G_K/I = G_k$ de poids $i + j$. Par la théorie des cycles évanescentes si X admet un modèle propre et lisse sur R alors l'inertie agit trivialement sur V qui est pure de poids i.

5. D'abord il faut noter que ρ factorise sur $\mathrm{Gal}(K_\ell|K)$ et utiliser que $\zeta^{\chi_\ell(g)}$ et ζ sont conjugues par un élément de $\mathrm{Gal}(K_\ell|K)$.

6. i.e. l'image de ϕ dans G_k est l'automorphisme $a \mapsto a^{1/q}$, où $q = \#k$.

7. i.e. sont des $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ tel que $2\log_q |\alpha|_\sigma = i + j$ pour tous $\sigma : \bar{\mathbb{Q}}_\ell \to \mathbb{C}$ plongement.

La conjecture est un théorème pour K d'égale caractéristique p : Ito montre que dans ce cas on peut toujours se ramener au résultat suivant.

3.2. **Théorème** (Deligne Weil II 1.8.4)**.** *Soient $C/\mathbb{F}_q$ une courbe lisse et $x \in C(\mathbb{F}_q)$ un point rationnel et $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}^h_{X,x})$ le (henselianisé du) corps de valuation de x en C (donc* $\mathrm{car}K = p$*). Si $Y \to C \setminus \{x\}$ est propre et lisse, alors la conjecture MP est vraie pour $X = Y_K$.*

Autrement dit si $L/\mathbb{F}_p(t)$ est une extension finie et Y/L est propre et lisse, la conjecture est vraie pour $X = Y_K$ avec K le complété de L en un place x.

Donc il reste à résoudre la conjecture dans le cas de caractéristique zéro. Les cas connus avant Scholze sont : $\dim X \leq 2$, variétés abéliennes, certaines variétés de Shimura. Pour la suie K est un corps local de caractéristique mixte $(0, p)$ (i.e. une extension finie de $\mathbb{Q}_p$) de corps résiduel $k = \mathbb{F}_q$.

3.3. **Théorème.** *Soit Y une variété propre, lisse et géométriquement connexe sur K. Puis Y est une intersection complète (ensembliste) dans une variété torique $X_{\Sigma,K}$ qui est projective est lisse. Alors la conjecture de monodromie-poids est vraie pour Y (et bien sur pour $X_{\Sigma,K}$).*

Démonstration. La stratégie est de se ramener au Théorème de Deligne en utilisant le basculement des espaces perfectoïdes.

– On commence par des remarques Galoisiennes Comme $K/\mathbb{Q}_p$ est fini on peut identifier leurs clôture algébrique $\bar{K} = \bar{\mathbb{Q}}_p$. Si on note $\mathbb{C}_p$ le complété de $\bar{K}$ l'action de G_K sur $\bar{K}$ s'étend par continuité à un action $G_K \circlearrowright \mathbb{C}_p$. Par fonctorialité (du basculement) G_K agit sur $\mathbb{C}_p^\flat$. Si $\varpi \in K$ est une uniformisante on sait que le corps perfectoïde $\mathcal{K} = \widehat{K(\varpi^{1/p^\infty})}$ a comme basculement $\mathcal{K}^\flat$ qui est le completé de la clôture radicielle de $E = \mathbb{F}_q((\varpi^\flat))$. Avec ce notation on a des équivalences Galoisennes

$$(FW) \qquad G_{\mathcal{K}} = G_{\mathcal{K}^\flat} = G_E$$

car $\bar{\mathcal{K}}^\flat \subset \mathbb{C}_p^\flat$ dense et par continuité $G_{\mathcal{K}^\flat}$ agit sur $\mathbb{C}_p^\flat$. Cette action identifie $G_{\mathcal{K}} = G_{\mathcal{K}^\flat}$. Même $\bar{E} \subset \mathbb{C}_p^\flat$ est dense et stable par l'action de $G_{\mathcal{K}^\flat}$ et (FW) est vérifié.

– On aura besoin des résultats suivantes sur les espaces adiques :

(1) (Huber : comparaison étale) Soit X une variété algébrique sur un corps non-archimedienne algébriquement clos, alors
$$H^n_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}_\ell) = H^n_{\mathrm{et}}(X^{\mathrm{ad}}, \mathbb{Q}_\ell)$$
pour l différente de la caractéristique du corps de bas.

(2) Avec le notation du théorème il existe un ouvert $Y^{\mathrm{ad}}_{\mathcal{K}} \subset \widetilde{Y}$ tel que
$$H^n_{\mathrm{et}}(\widetilde{Y}_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell) = H^n_{\mathrm{et}}(Y^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell)$$
(on peut bien oublier le "ad" dans le membre de droite grâce au point précédente.)

(3) L'application d'espaces topologiques (et topoi étale)
$$\pi : X^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,\mathbb{C}_p^\flat} \to X^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,\mathbb{C}_p} \quad (x_0 : \cdots : x_s) \mapsto (x_0^\sharp : \cdots : x_s^\sharp)$$
induise un isomorphisme en cohomologie $\mathbb{Q}_\ell$-adique, $l \neq p$.

(4) (Approximation) Dans les hypothèses du théorème il existe un voisinage $\widetilde{Y}$ de $Y_{\mathcal{K}}$ et une sous variété (algébrique) $Z \subset X_{\Sigma,\mathcal{K}^\flat}$ tel que $Z^{\mathrm{ad}} \subset \pi^{-1}(Y)$ et $\dim Z = \dim Y$. Puis Z peut être définie sur extension finie L de $\mathbb{F}_q(\varpi)$.

– Ceci dit on a un diagramme commutative de topoi

$$\begin{tikzcd}
(X^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,\mathbb{C}_p^\flat})^\sim_{\mathrm{et}} \arrow[r, "\pi"] & (X^{\mathrm{ad}}_{\Sigma,\mathbb{C}_p})^\sim_{\mathrm{et}} \\
(\pi^{-1}(\widetilde{Y})_{\mathbb{C}_p^\flat})^\sim_{\mathrm{et}} \arrow[r] \arrow[u] & (\widetilde{Y}_{\mathbb{C}_p})^\sim_{\mathrm{et}} \arrow[u] \\
(Z^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{C}_p^\flat})^\sim_{\mathrm{et}} \arrow[u] & (Y^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{C}_p})^\sim_{\mathrm{et}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

et, quitte à faire une extension finie de corps de base L de Z, on peut supposer Z lisse grâce à de Jong (théorème d'altération). Le groupe $G_{\mathcal{K}}$ agit sur les objets du diagramme et les morphismes sont $G_{\mathcal{K}}$-equivariantes. Donc on obtient un diagramme des représentation ℓ-adiques de $G_{\mathcal{K}}$

$$\begin{tikzcd}
H^i(X_{\Sigma,\mathbb{C}_p^\flat}) \arrow[d] & H^i(X_{\Sigma,\mathbb{C}_p}) \arrow[l, "="'] \arrow[d] \\
H^i(\pi^{-1}(\widetilde{Y})_{\mathbb{C}_p^\flat}) \arrow[d] & H^i(\widetilde{Y}_{\mathbb{C}_p}) \arrow[l] \arrow[d, "="] \\
H^i(Z_{\mathbb{C}_p^\flat}) & H^i(Y_{\mathbb{C}_p})
\end{tikzcd}$$

qui induise une application $G_{\mathcal{K}}$-equivariante
$$\alpha^i : H^i(Y_{\mathbb{C}_p}) \to H^i(Z_{\mathbb{C}_p^\flat})$$

Supposons pour l'instant que α^i est injective. L'adhérence E' de L dans $\mathbb{C}_p^\flat$ est un extension finie de $E = \mathbb{F}_q((\varpi^\flat))$. Alors pour le théorème de Deligne la conjecture de monodromie-poids est vérifié pour $H^i(Z_{\mathbb{C}_p^\flat})$ comme $G_{E'}$-représentation et donc aussi comme $G_E = G_{\mathcal{K}}$-représentation. Pour passer de $G_{\mathcal{K}}$ à G_K il suffit de noter que $\mathcal{K}/K$ est une pro-p-extension totalement ramifié.

Pour finir la preuve on montre que α^i est injective. Si $d = \dim Z = \dim Y$ alors $H^{2d}(Y_{\mathbb{C}_p})$ et $H^{2d}(Z_{\mathbb{C}_p^\flat})$ sont isomorphes à $\mathbb{Q}_\ell$ (comme $\mathbb{Q}_\ell$-esp. vect.). Si α^{2d} n'était pas un isomorphisme elle serait nulle et par

commutativité
$$\beta : H^{2d}(X_{\Sigma,\mathbb{C}_p^\flat}) \to H^{2d}(Z_{\mathbb{C}_p})$$
serait nulle aussi. Mais la première classe de Chern d'un fibré inversible ample sur $X_{\Sigma,\mathbb{C}_p^\flat}$ a image non nulle, donc α^{2d} est isomorphisme. La dualité de Poincaré permet alors de montrer que α^i est injective pour tout i.

□

Références

[CS01] Pierre Colmez and Jean-Pierre Serre, editors. *Correspondance Grothendieck-Serre*. Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 2. Société Mathématique de France, Paris, 2001.

[Del71] Pierre Deligne. Théorie de Hodge. I. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, pages 425–430. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[Del80] Pierre Deligne. La conjecture de Weil. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (52) :137–252, 1980.

[Fon12] Jean-Marc Fontaine. Perfecoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze). *Séminaire Bourbaki*, 2012.

[Ill94] Luc Illusie. Autour du théorème de monodromie locale. *Astérisque*, (223) :9–57, 1994. Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Ito] Tetsushi Ito. Weight-monodromy conjecture over equal characteristic local fields. *http ://arxiv.org/abs/math/0308141arXiv :math/0308141.*

[Sch11] Peter Scholze. Perfectoid spaces. *http ://arxiv.org/abs/1111.4914v1arXiv :1111.49146v1*, 11 2011.

[Ser68] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

[SGA72] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I), Dirigé par A. Grothendieck. Avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim.

[ST68] Jean-Pierre Serre and John Tate. Good reduction of abelian varieties. *Ann. of Math. (2)*, 88 :492–517, 1968.

Institut de Mathématiques de Bordeaux - 351, cours de la Libération - F 33405 TALENCE cedex

E-mail address: `nicola.mazzari@math.u-bordeaux1.fr`