GDT 2014 :
ESPACES DE MODULES DES GROUPES p-DIVISIBLES
D'APRÉS SCHOLZE ET WEINSTEIN

A2X

1. Introduction

Le but de ce groupe de travail est de lire l'article (et comprendre autant que possible) de P. Scholze et J. Weinstein sur les groupes p-divisibles et leurs espaces de modules [6]. Voici la liste des résultats qui nous intéressent

(A) Soit R un anneau (de caractéristique p) f-semi-parfait [1]. Alors le foncteur de Dieudonné (covariant)

$$M : (\text{grps } p\text{-div.}/R) \to (\text{cristaux de Dieudonné}/R)$$

est pleinement fidèle à isogenie près.

(B) Soit C une extension algébriquement close et complete de $\mathbb{Q}_p$ (e.g. $\mathbb{C}_p$). On a une équivalence de catégories

$$(\text{grps } p\text{-div.}/\mathcal{O}_C) \to \{(T, W) |\ T \cong \mathbb{Z}_p^n,\ W \subset T \otimes C(-1) \text{ sous-vect.}\}$$

qui associe à G groupe p-divisible le couple $(T_p(G), \mathrm{Lie}(G) \otimes C)$.

(C) Soit H un groupe p-divisible sur k, corps parfait de caractéristique p. On peut lui associer un schéma formel $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H)$ sur $W(k)$ qui classifie les déformations de H [5]. On note par $\mathcal{M}_\eta^{\mathrm{ad}}$ l'espace adique associé. Pour le travail de Grothendieck-Messing il existe une application des périodes

$$\pi : \mathcal{M}_\eta^{\mathrm{ad}} \to \mathcal{F},$$

où $\mathcal{F}$ est la Grassamanienne qui a pour K-points rationnels le quotient de $M(H) \otimes K$ de dimension égale à $\dim(H)$.

Alors un point x de $\mathcal{F}(C, \mathcal{O}_C)$ est dans l'image de π il lui correspond un fibré vectoriel libre de rang h (hauteur de H) sur *la courbe* de Fargues-Fontaine.

(D) On peut introduire des structures de niveau pour construire des revêtements $\mathcal{M}_n$ de $\mathcal{M}_\eta^{\mathrm{ad}}$. Si G est un point de $\mathcal{M}_\eta^{\mathrm{ad}}(K, W(k))$, donc une déformation de H, alors une structure de niveau n est un isomorphisme

$$\alpha_n : (\mathbb{Z}/p^n)^h \to G[p^n]$$

Date: Janvier-Avril 2013.

1. i.e. le Frobenius $\phi : R \to R$ est surjectif et l'anneau topologique $\varprojlim_\phi R$ a un ideal de définition de type fini.

il est donc facile de définir un espace $\mathcal{M}_\infty$ avec structure de niveau infini dont α_n est remplacé par un isomorphisme

$$\alpha_\infty : \mathbb{Z}_p^h \to T_pG \ .$$

Alors l'espace $\mathcal{M}_\infty$ est un espace adique et il peut être défini sans utiliser les déformations de H.

2. Exposes

2.1. **Groupes p-divisibles sur un avd (A. Hertgen).** (1 séance) Révision des résultats de l'article de Tate [8]. Définitions et exemples fondamentaux de groupes p-divisibles et les résultats du §4 : notamment la décomposition de Hodge-Tate pour la cohomologie d'une variété abélienne. D'autres références sont [7] et les notes de J. Riou.

2.2. **Théorie de Dieudonné sur un corps parfait (Y. Gu).** (1 séance) Soit k un corps parfait de caractéristique p. Il existe une anti-equivalence entre la catégorie de k-schémas en groupe finis de p-torsion e la catégorie de modules de Dieudonné. Cela induise une anti-equivalence entre groupes p-divisibles et la la catégorie de modules de Dieudonné qui sont libres sur $W(k)$. Il s'agit essentiellement du résumer [1, Chapitre IV]. Voir aussi [3] pour une construction uniforme du foncteur de Dieudonné.

2.3. **Espaces perfectoides (D. Casazza).** (2 séances) [6, § 2]. On va revoir (rapidement) la définition d'espace adique (de Huber + quelques généralisations), la notion de fibre générique à la Raynaud dans ce contexte et les rappels nécessaires sur les espaces perfectoides. On donnera les exemples principaux plutôt que les preuve des résultats basiques de la théorie (vue l'année dernière).

2.4. **Extension vectorielle universelle (Q. Liu).** (1 séance) On donne la définition d'extension vectorielle universelle et on donne les résultats de base comme dans [4, Chapter1, § 1]. On pourra utiliser l'article original de Messing ou les notes d'Olivier.

2.5. **Survol de l'article de Scholze et Weinstein (J. Gillibert).** (1 séance)

2.6. **Revêtement universel et extension vectorielle universelle (N. Mazzari).** (2 séances) [6, § 3] On donne les définitions de revêtement universel d'un groupe p-divisible et le lien avec l'extension vectorielle universelle (même en passant à la fibre générique).

2.7. **Théorie de Dieudonné sur un anneau semi-parfait (O. Brinon).** (3 séances) [6, § 4]. Il s'agit de donner la preuve du théorème (A) qui est le coeur de l'article. C'est la partie que nous intéresse le plus.

2.8. **Classification de groupes p-divisibles(D. Tossici).** (1 séance)[6, § 5] On introduit la courbe de Fargues-Fontaine et on montre le résultat (B).

2.9. **Espaces de Rapoport-Zink (J. Tong).** (1 séance)[6, § 6] Résultats (C) et (D).

Références

[1] Michel Demazure. *Lectures on p-divisible groups.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 302. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[2] Laurent Fargues et Jean-Marc Fontaine. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique. `http://www.math.jussieu.fr/ fargues/Courbe.pdf`.

[3] Jean-Marc Fontaine. Groupes p-divisibles sur les vecteurs de Witt. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 280 :Ai, A1353–A1356, 1975.

[4] B. Mazur and William Messing. *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 370. Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[5] M. Rapoport and Th. Zink. *Period spaces for p-divisible groups*, volume 141 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[6] Peter Scholze and Jared Weinstein. Moduli of p-divisible groups. 11 2012.

[7] Stephen S. Shatz. Group schemes, formal groups, and p-divisible groups. In *Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984)*, pages 29–78. Springer, New York, 1986.

[8] J. T. Tate. p-divisible groups. In *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, pages 158–183. Springer, Berlin, 1967.

Institut de Mathématiques de Bordeaux - 351, cours de la Libération - F 33405 TALENCE cedex