Quelques indications de TD 12 (suite)

Exo. 1. (1) Notons $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, et $e_3 = (0, 0, 1)$. Alors $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après la définition de f, on a $f(e_1) = (0, -2, -2) = -2e_2 - 2e_3$, $f(e_2) = e_1 - e_2 - e_3$, et $f(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3$. Donc

$$f(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3)D$$

avec la matrice D donnée par

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Vérification directe.

(3) Notons $u_1 = (0, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, -1)$, et $u_3 = (0, -2, -2)$. On a alors $f(u_1) = u_2$, $f(u_2) = u_3$, et $f(u_3) = 0$. Donc

$$f(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3)D'$$

avec D' donnée par

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Par conséquent, $\mathrm{Im}(f) =< u_2, u_3 >$ avec $\{u_2, u_3\}$ une base de $\mathrm{Im}(f)$, et $\ker(f) =< u_3 >$ dont une base est donée par $\{u_3\}$. Donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

(5) En vertu de la question précédente, l'application f n'est ni injective, ni surjective.

Exo. 2. (1) Vérification directe.

(2) On a $f(1, 0, 0) = (2, 1, 3)$, $f(0, 1, 0) = (1, 2, 3)$, et $f(0, 0, 1) = (1, 1, 2)$.

(3) D'après (2), la matrice associée à f dans la base canonique est donnée par

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) L'image de f est le sous-espace linéaire engendré par les trois vecteurs $f(1, 0, 0) = (2, 1, 3)$, $f(0, 1, 0) = (1, 2, 3)$, et $f(0, 0, 1) = (1, 1, 2)$. Pour déterminer sa dimension, on considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

qui est ligne équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite, $\mathrm{Im}(f) =< f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) >$ est de dimension 2, avec une famille de base donnée par $\{(1,1,2),(0,1,1)\}$. Le noyau de f est l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 2x + \ y + \ z = 0 \\ x + 2y + \ z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} x = r \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = -3r \end{cases} .$$

Donc $\ker(f) = \{(r,r,-3r) \mid r \in \mathbb{R}\}$, qui est de dimension 1 de base $\{1,1,-3\}$.

(5) $f^{-1}(\{v\}) = u + \ker(f)$.

Exo. 3. (1) Considère la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 2 \\ \lambda & 3 & 5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est ligne équivalente à

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2-\frac{4\lambda}{3} \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\mathrm{Vect}\{u_1,u_2,u_3\} = \mathrm{Vect}\left\{(\lambda,0,1),(0,3,4),\left(0,0,2-\frac{4\lambda}{3}\right)\right\}.$$

Il en résulte que la famille $\{u_1,u_2,u_3\}$ est libre si et seulement si $\dim(\mathrm{Vect}\{u_1,u_2,u_3\}) = 3$, ou encore si et seulement si les trois vecteurs $(\lambda,0,1),(0,3,4),\left(0,0,2-\frac{4\lambda}{3}\right)$ sont linéairement indépendants, c'est-à-dire :

$$\lambda \neq 0, \quad \text{et} \quad 2 - \frac{4\lambda}{3} \neq 0,$$

donc $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 3/2$.

(2) Puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, il en résulte que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est génératrice si et seulement si elle est libre. Donc, vu la question (1) précédente, cette dernière condition équivaut à $\lambda \neq 0$, et $\lambda \neq 3/2$.

(3) Il s'agit de résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \qquad \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_1 + \ 3\lambda_2 \qquad = y \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = z. \end{cases}$$

Exo. 4. (1) Vérification directe.

(2) On pose $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, et $f_2(x) = \frac{f_1(x)-f(-x)}{2}$. Alors, on a $f_1 \in E_1$, et $f_2 \in E_2$. De plus $f = f_1 + f_2$. Ceci signifie qu'on a l'égalité suivante :

$$C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = E_1 + E_2.$$

On peut vérifier $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, d'où $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = E_1 \oplus E_2$.

(3) D'après la construction de (2), sa partie paire est égale à $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, et sa partie impaire est égale à $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Exo. 5. Il s'agit de prouver $H \subset G$. Quelque soit $h \in H \subset F + H = F + G$, il existe donc $f \in F$, et $g \in G$ tels que $h = f + g$. Comme $G \subset H$, on a $h - g \in H$. Par suite, $f = h - g \in F \cap H = F \cap G$. Donc $h = f + g \in F \cap G + G = G$. D'où le résultat.

Exo. 6. On démontre ici directement l'assertion (3). Les deux premières peuvent être vue comme corollaire de (3). On raisonne par récurrence sur N. Le cas où $N = 0$ est trivial, puisque dans ce cas-là, il s'agit de vérifier que l'élément $1 = \cos(0x)$ est non nul. Supposons ensuite que l'assertion a été vérifiée pour l'entier $N - 1 \geq 0$. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_N$ et $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 \cos(0x) + \lambda_1 \cos(x) + \cdots + \lambda_N \cos(Nx) + \mu_1 \sin(x) + \cdots + \mu_N(\sin(Nx)) = 0, \quad (*)$$

il nous faut alors démonter qu'on a $\lambda_0 = \cdots \lambda_N = \mu_1 = \cdots = \mu_N = 0$. Si l'on dérive deux fois l'égalité ci-dessus, on obtient

$$-\lambda_0 \cdot 0^2 \cdot \cos(0x) - \lambda_1 \cdot 1^2 \cdot \cos(x) - \cdots - \lambda_N N^2 \cos(Nx) - \mu_1 \cdot 1^2 \cdot \sin(x) - \cdots - \mu_N N^2(\sin(Nx)) = 0 \quad (**)$$

En calculant $(**) + N^2(*)$, on a

$$\begin{aligned} & \lambda_0(N^2 - 0^2)\cos(0x) + \lambda_1(N^2 - 1^2)\cos(x) + \cdots + \lambda_{N-1}(N^2 - (N-1)^2)\cos(N-1)x \\ + \ & \mu_1(N^2 - 1)\sin x + \cdots + \mu_{N-1}(N^2 - (N-1)^2)\sin((N-1)x) = 0. \end{aligned}$$

D'après l'assertion dans le cas $N-1$, on en déduit $\lambda_i(N^2-i^2)=0$ pour $0\le i\le N-1$, et $\mu_j(N^2-j^2)=0$ pour $1\le j\le N-1$. Donc $\lambda_i=\mu_j=0$ pour $0\le i\le N-1$, et $1\le j\le N-1$. Donc l'égalité $(*)$ devient l'égalité suivante :

$$\lambda_N\cos Nx+\mu_N\sin Nx=0.$$

Posons $x=0$, on a $\lambda_N=0$. Par suite, $\mu_N\sin Nx=0$, d'où $\mu_N=0$. Ceci finit la récurrence, et donc la preuve.

Exo. 7. Rappelons que la famille $\{1,X,\cdots,X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(1) Comme P_k est un polynôme de degré k, on a donc

$$P_k(X)=a_k\cdot X^k+\text{termes de degré }<k,$$

avec $a_k\neq 0$. Par conséquent, la matrice de passage de la famille $\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$ à $\{1,X,\cdots,X^n\}$ est alors de la forme suivante :

$$(P_0,P_1,\cdots,P_n)=(1,X,\cdots,X^n)\cdot A$$

avec

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Comme les a_k sont non nuls, il en résulte que la matrice A est inversible. Par suite, la famille $\{P_0,\cdots,P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Par définition de E_k, on a

$$E_k=X^k+\text{termes de degré }>k.$$

Notons B la matrice de passage de $\{1,X,X^2,\cdots,X^n\}$ à $\{E_0,E_1,\cdots E_n\}$, on a

$$(E_0,E_1,\cdots,E_n)=(1,X,\cdots,X^n)B$$

avec

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite, la matrice B est inversible, et donc la famille $\{E_0,E_1,\cdots,E_n\}$ est une base.

(3) Remarquons d'abord que les polynômes H_k vérifient les propriétés suivantes :

$$H_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k; \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Pour montrer que $\{H_0, H_1, \cdots, H_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de vérifier que, quelque soit $f \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe des uniques coefficients $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in k$ tels que

$$f(X) = \lambda_0 \cdot H_0(X) + \cdots + \lambda_n \cdot H_n(X).$$

Pour l'existence, on pose $\lambda_i = f(a_i)$, et on considère le polynôme

$$f(X) - (f(a_0) \cdot H_0(X) + \cdots + f(a_n) \cdot H_n(X)).$$

C'est un polynôme de degré $\leq n$, qui s'annule sur les $n+1$ points distincts $a_0, a_1, \cdots, a_n$, donc c'est le polynôme nul. Par conséquent, on a

$$f(X) = f(a_0) \cdot H_0(X) + \cdots + f(a_n) \cdot H_n(X),$$

d'où l'existence. Pour l'unicité, soient $\lambda_i \in k$ tels que

$$f(X) = \lambda_0 \cdot H_0(X) + \cdots + \lambda_n \cdot H_n(X).$$

En remplaçant X par a_i dans l'identité ci-dessus, on trouve $\lambda_i = f(a_i)$. D'où l'unicité. Ceci finit la preuve.

Exo. 8. (1) Montrons d'abord $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. Sinon, supposons $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. D'où $p^2 = 6q^2$. Donc $2|p^2$, et il en résulte $2|p$. Par suite, $4|6q^2$, donc $2|q^2$. En particulier, on a $2|q$, donc 2 serait un diviseur commun de p et q, par suite $\mathrm{PGCD}(p, q) \neq 1$, d'où une contradiction. Donc, on a $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. Comme corollaire, la famille $\{\sqrt{6}, 1\}$ est libre : en effet, soient $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que

$$a \cdot 1 + b\sqrt{6} = 0.$$

Comme $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, on a $b = 0$. Par suite $a = 0$, d'où l'assertion.

(2) Soient $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tels que $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c\sqrt{5} = 0$. D'où $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = -c\sqrt{5}$, donc

$$\left(a\sqrt{2} + b\sqrt{3}\right)^2 = \left(-c\sqrt{5}\right)^2.$$

C'est-à-dore

$$2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6} = 5c^2.$$

Par conséquent, $(2a^2 + 3b^2 - 5c^2) + 2ab\sqrt{6} = 0$. Or comme $a, b \in \mathbb{Q}$, et que la famille $\{1, \sqrt{6}\}$ est libre, on en déduit

$$\begin{cases} 2a^2 + 3b^2 - 5c^2 = 0 \\ 2ab = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on a ou bien $a = 0$, ou bien $b = 0$. Supposons d'abord que $a = 0$. Donc $3b^2 = 5c^2$. Si $b \neq 0$, on aurait $15 = \left(\frac{5c}{b}\right)^2$. En particulier, $\sqrt{15} \in \mathbb{Q}$, qui est absurde en utilisant le même raisonnement utilisé dans le début de la preuve de (1). Donc $b = 0 = c$. Le cas où $b = 0$ peut se traiter de la même manière.

Exo. 9. (1) Vérification directe.

(2) On pose $h(x) = x - \frac{1}{2}$, alors $F(h) = \int_0^1 h(t)dt = 0$.

(3) L'application F n'est pas injective car $h \in \ker(F)$ qui est donc non nul.

(4) Oui. En effet, soient $a \in \mathbb{B}$, $h_a(x) = a$ la fonction constante de valeur a. Alors $F(h_a) = a$. Donc $\mathrm{Im}(F) = \mathbb{R}$, d'où la surjectivité.