MHT201

Quelques indications de TD 13 (suite et fin)

Exo. 7. (i) Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$, on a

$$T(u) = xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) = -ye_1 + ye_2 + (x + y + z)e_3.$$

Donc $T(u) = 0$ si et seulement si $y = x + y + z = 0$. Donc

$$\ker(T) = \{xe_1 - xe_3 | x \in \mathbb{R}\}.$$

La matrice de l'endomorphisme $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) On a $f_1 + f_3 = e_2$, donc $e_1 = f_2 + e_2 = f_1 + f_2 + f_3$, et enfin $e_3 = e_1 - f_1 = f_2 + f_3$. Comme la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base, et que chaque e_i est une combinaison linéaire des f_j, on en déduit que le système $\{f_1, f_2, f_3\}$ est un générateur. En particulier,

$$\mathrm{Vect}\{f_1, f_2, f_3\} = \mathbb{R}^3.$$

Par conséquent, la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$.
(iii) $T(f_1) = 0$, $T(f_2) = T(e_1 - e_2) = e_3 + e_1 - e_2 - e_3 = f_2$, et $T(f_3) = f_3$. Donc, la matrice de f dans cette nouvelle base $\{f_1, f_2, f_3\}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc T est idempotent, c'est-à-dire, $T^2 = T$.
(iii) Comme

$$(f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3) \cdot P$$

avec $\{f_1, f_2, f_3\}$ et $\{e_1, e_2, e_3\}$ deux familles de base. On en déduit que la matrice P est inversible. Pour calculer son inverse, on utilise la méthode de Gauss, on trouve que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme
$$(e_1, e_2, e_3)PB = (f_1, f_2, f_3)B = T(f_1, f_2, f_3) = T(e_1, e_2, e_3)P$$
on a
$$T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3)PBP^{-1}.$$
D'où $A = PBP^{-1}$.

Exo. 8. (i) Notons
$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x' \\ 1 & 2 & -1 & y' \\ -1 & 0 & \alpha - 1 & z' \end{pmatrix}.$$
Donc il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (x', y', z')$ si et seulement si le système suivant
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$
admet une solution. Cette dernière condition revient au même de dire que le rang de la matrice B_α est égal au rang de A_α. Pour examiner cette condition sur le rang, on effectue des opérations élémentaires de lignes sur la matrice B_α, on trouve
$$B_\alpha \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x' \\ 0 & 1 & -1 & y' - x' \\ 0 & 1 & \alpha - 1 & x' + z' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x' \\ 0 & 1 & -1 & y' - x' \\ 0 & 0 & \alpha & 2x' - y' + z' \end{pmatrix}.$$
On en déduit donc $\mathrm{rang}(A_\alpha) = \mathrm{rang}(B_\alpha)$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est remplie : (1) $\alpha \neq 0$, et on a $\mathrm{rang}(A_\alpha) = \mathrm{rang}(B_\alpha) = 3$; (2) $\alpha = 0$ et $2x' - y' + z' = 0$. Sous la condition (ii), on a $\mathrm{rang}(A_\alpha) = \mathrm{rang}(B_\alpha) = 2$. D'où le résultat.

(ii) f_α est un automorphisme $\Leftrightarrow$ f_α est bijective $\Leftrightarrow$ la matrice A_α est inversible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(A_\alpha) = 3 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

(iii) On a donc $\alpha = 0$. Par suite,
$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
qui est ligne-équivalente à
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Donc $\mathrm{rang}(f_0) = \mathrm{rang}(A_0) = 2$.

Pour déterminer $\ker(f_0)$, il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En résolvant ce système, on trouve

$$\ker(f_0) = \{(-r, r, r) | r \in \mathbb{R}\},$$

avec une base donnée par $\{(-1, 1, 1)\}$.

Pour calculer $\mathrm{Im}(f_0)$, notons $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique. On a alors $f(e_1) = (1, 1, -1)$, $f(e_2) = (1, 2, 0)$, et $f(e_3) = (0, -1, -1)$. Par suite,

$$\mathrm{Im}(f_0) =< f(e_1), f(e_2), f(e_3) > .$$

En considérant la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient que

$$\mathrm{Im}(f_0) =< f(e_1), f(e_2), f(e_3) >=< (1, 1, -1), (0, 1, 1) >$$

avec une base donnée par $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1)\}$.

Pour calculer l'ensemble $f_0^{-1}(\{(0, 1, 1)\})$, il suffit de résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x + y & = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ -x \quad - z = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x = -r - 1 \\ y = 1 + r \\ z = r \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(iv)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(vi) On a $(u_1, u_2, u_3) = (e_1, e_2, e_3) \cdot A_1$. D'après (i), on sait que A_1 est inversible. Par suite, la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est bien une base.

(vii) Par définition, on a

$$g(u_1, u_2, u_3) = g(e_1, e_2, e_3) \cdot A_1(e_1, e_2, e_3) \cdot D \cdot A_1 = (u_1, u_2, u_3) \cdot A_1^{-1} \cdot D \cdot A_1.$$

Par conséquent,

$$M = A_1^{-1}DA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(viii) Pour $n \geq 1$ un entier, on a $M^n = A_1^{-1}D^nA$. Par exemple, $M^2 = A_1^{-1}DAA_1^{-1}DA = A_1^{-1}D^2A$. Donc, on a

$$M^n = \begin{cases} I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{si n est pair} \\ \\ M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, & \text{si n est impair.} \end{cases}$$