MHT 201 - Test 3

1 - On considère la matrice *inversible* suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer A^2.

(b) Calculer A^{-1}.

(c) Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ \quad x - \; y \qquad = b \\ -x + 2y + z = c \end{cases}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont des paramètres (**Indication :** on pourra utiliser la matrice A^{-1}).

Corrigé : (a) On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Pour calculer A^{-1}, on utilise la méthode de Gauss. On considère donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est ligne-équivalente aux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Par suite, on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) Notons

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ et } \lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Le système ci-dessus s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$A \cdot \alpha = \lambda.$$

Comme la matrice A est inversible, on trouve

$$\alpha = I_3 \cdot \alpha = A^{-1} \cdot A \cdot \alpha = A^{-1} \cdot \lambda = \begin{pmatrix} a - 4b - 3c \\ a - 5b - 3c \\ -a + 6b + 4c \end{pmatrix}$$

D'où la solution

$$\begin{cases} x = a - 4b - 3c \\ y = a - 5b - 3c \\ z = -a + 6b + 4c. \end{cases}$$

2 - Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (2x + y - 4z, 3x + 5y - 7z, 4x - 5y - 6z).$$

Notons $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est alors la base canonique.

(a) Calculer $f(e_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

(b) Trouver la matrice de f dans la base canonique.

(c) Montrer que l'image de f est engendrée par la famille $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$, puis en déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ et le rang de f.
(d) Calculer la dimension de $\ker(f)$, en utilisant le résultat de la question (c).

(e) Déterminer $\ker(f)$. En déduire l'image réciproque $f^{-1}(\{f(e_1)\})$ du vecteur $f(e_1)$.

Corrigé : (a) $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (2, 3, 4)$, $f(e_2) = (1, 5, -5)$, et $f(e_3) = (-4, -7, -6)$.

(b) Par définition, la matrice M de l'application f s'insère dans l'égalité suivante :

$$f(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \cdot M,$$

donc on a

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

(c) Comme la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, quelque soit $u \in \mathbb{R}$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3.$$

Par suite, $f(u) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) \in \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$. En particulier, on a

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}.$$

D'autre part, comme $f(e_i) \in \mathrm{Im}(f)$, et que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel, on en déduit $\mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} \subset \mathrm{Im}(f)$. D'où

$$\mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \mathrm{Im}(f).$$

Pour calculer $\mathrm{Im}(f)$. On considère donc la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -5 \\ -4 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

qui est ligne-équivalente à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 2 & 5 & 4 \\ -4 & -7 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \mathrm{Vect}\{(1, 5, -1), (0, 1, -2)\},$$

avec une famille de base donnée par $\{(1,5,-5),(0,1,-2)\}$. En particulier, le rang de f est 2.

(d) Comme on a la formule suivante :

$$\dim(\ker(f)) + \operatorname{rang}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3,$$

on obtient que l'espace $\ker(f)$ est de dimension 2.

(e) Le noyau de f est exactement l'ensemble des solutions du système linéaire suivant :

$$M\alpha = 0.$$

C'est-à-dire, le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ 3x + 5y - 7z = 0 \\ 4x - 5y - 6z = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve donc

$$\begin{cases} x = 13r/7 \\ y = 2r/7 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc on a

$$\ker(f) = \{(13r, 2r, 7r) \in \mathbb{R}^3 | r \in \mathbb{R}\}.$$

Finalement,

$$f^{-1}\left(\{f(e_1)\}\right) = e_1 + \ker(f) = \{(1 + 13r, 2r7r) \in \mathbb{R}^3 | r \in \mathbb{R}\}$$