MHT 201, Test 2 (3 exos, 30 mins)

exo. 1 - Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ les trois racines de l'équation : $X^3 - 31X + \lambda = 0$.

1. Donner (avec justification), en fonction de λ, les valeurs de $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, et $\alpha\beta\gamma$.
2. Calculer $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
3. Déterminer λ pour que la somme de deux racines de l'équation précédente soit égale à 5 (**Indication :** on pourra supposer par exemple $\alpha + \beta = 5$).

Corrigé : (1) Par définition, on a

$$\begin{aligned} X^3 - 31X + \lambda &= (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) \\ &= X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)X - \alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

Donc, par identification, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha+\beta=\gamma & = & 0 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha & = & -31 \\ \alpha\beta\gamma & = & -\lambda \end{array} \right.$$

(2) On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ &= 0^2 - 2\cdot(-31) \\ &= 62. \end{aligned}$$

d'où (2).
(3) Par symétrie, on peut supposer $\alpha + \beta = 5$. Donc d'après la question (1), on obtient $\gamma = -(\alpha+\beta) = -5$. On en déduit donc

$$\begin{aligned} -31 &= \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \\ &= (\alpha+\beta)\gamma + \alpha\beta \\ &= 5\cdot(-5) + \alpha\beta \\ &= -25 + \alpha\beta, \end{aligned}$$

d'où $\alpha\beta = -31 + 25 = -6$. En appliquant encore une fois le résultat de (1), on obtient $\lambda = -\alpha\beta\gamma = -30$. □

exo. 2 - Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X^4+1}{X^3-X} \qquad (1)$$

Corrigé : Calculons d'abord la partie entier de cette fraction rationnelle : en utilisant la division euclidienne de X^4+1 par X^3-X, on a

$$X^4+1 = X(X^3-X) + X^2 + 1.$$

Donc

$$\frac{X^4+1}{X^3-X} = X + \frac{X^2+1}{X^3-X}.$$

Comme dans $\mathbb{R}[X]$, on a la factorisation suivante : $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$. Donc, la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle (1) ci-dessus s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\frac{X^4+1}{X^3-X} = X + \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-1} \qquad (2)$$

avec a, b, c à déterminer. Calculons d'abord a. En multipliant par X dans l'identité (2) ci-dessus, on obtient

$$\frac{X^4+1}{X^2-1} = a + X\left(X + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-1}\right)$$

On remplace maintenant X par 0, on obtient immédiatement $a = -1$. Pour calculer b, on multiplie l'identié (1) par $X+1$, on a

$$\frac{X^4+1}{X^2-X} = b + (X+1)\left(X + \frac{a}{X} + \frac{c}{X-1}\right).$$

Puis en remplaçant X par -1, on a $b = 1$. De la même manière, on a $c = 1$. D'où finalement la décomposition suivante :

$$\frac{X^4+1}{X^3-X} = X + \frac{-1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1.} \qquad \square$$

exo. 3 -

1. Considérer le système d'équations homogène à coefficients dans $\mathbb{R}$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} -x+2y+3z+t & = & 0 \\ x+y-9z+2t & = & 0 \\ x+4y-15z+5t & = & 0 \end{array}\right. \qquad (E_0)$$

   (a) Notons V l'ensemble des solutions du système ci-dessus. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4 = \{(x,y,z,t)|x,y,z,t \in \mathbb{R}\}$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Résoudre ce système linéaire. Puis trouver une base de V sur $\mathbb{R}$, et calculer $\dim_{\mathbb{R}} V$.

2. Résoudre le système suivant en discutant selon les valeurs des paramètres a et b :

$$\left\{\begin{array}{ccc} -x+2y+3z+t & = & 1 \\ x+y-9z+at & = & 2 \\ x+4y-15z+5t & = & b \end{array}\right. \qquad (E)$$

Corrigé : (1) : Pour simplifier un peu les notations, on va utiliser les notations matricielle. Donc, notons

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -9 & 2 \\ 1 & 4 & -15 & 5 \end{pmatrix}$$

la matrice de type $(3,4)$ du système (E_0), et $\alpha = (x,y,z,t)'$.[1] Alors le système (E_0) s'écrit alors sous la forme

$$A \cdot \alpha = 0.$$

(1.a) Soient maintenant (x_i, y_i, z_i, t_i) $(i = 1, 2)$ deux éléments de V. Posons $\alpha_i := (x_i, y_i, z_i, t_i)'$. Alors (x_i, y_i, z_i, t_i) est solution de (E_0), ceci implique que $A\alpha_1 = A\alpha_2 = 0$. Donc $A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0$. Or $\alpha_1 + \alpha_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, t_1+t_2)'$, on en déduit que $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, t_1+t_2)$ est encore solution de (E_0), d'où

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, t_1+t_2) \in V.$$

De la même façon, on vérifie que, quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y,z,t) \in V$ une solution de (E_0), le produit scalaire

$$\lambda \cdot (x,y,z,t) := (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$$

1. Ici, pour $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, on désigne par

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)' := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

la *transport* de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

est encore solution de (E_0). C'est-à-dire, $\lambda\cdot(x,y,z,t) \in V$. Donc $V \subset \mathbb{R}^4$ est bien un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(1.b) Notons L_i la i-ième ligne du système (E_0). Donc si l'on calcule $L_1 + L_2$, on a

$$3y - 6z + 3t = 0, \qquad (L_4)$$

et la somme $L1 + L3$ nous donne

$$6y - 12z + 6t = 0 \qquad (L_5)$$

En plus, si l'on divise L_5 par 2, on obtient exactement L_4. Donc le système (E_0) équivaut au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x + 2y + 3z + t & = & 0 \\ 3y - 6z + 3t & = & 0. \end{array}\right. \qquad (E_0)$$

On obtient ainsi les solutions de (E_0) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 7r - s \\ y & = & 2r - s \\ z & = & r \in \mathbb{R} \\ t & = & s \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Donc $V = \{(7r - s, 2r - s, r, s) \mid \forall\, r, s \in \mathbb{R}\}$. Par suite, un élément v de V s'écrit alors sous la forme

$$v = (7r - s, 2r - s, r, s) = (7r, 2r, r, 0) + (-s, -s, 0, s) = r \cdot (7, 2, 1, 0) + s \cdot (-1, -1, 0, 1).$$

Il résulte alors de la définition que le système $\{(7, 2, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}$ est un générateur de V. Puis, on peut vérifier que ce système est aussi libre. Donc il nous donne une base de V sur $\mathbb{R}$. Finalement, on a $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$.

(2) Le système E équivaut au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x + 2y + 3z + t & = & 1 \\ y - 2z + \dfrac{a+1}{3}t & = & 1 \\ (4 - 2a)t & = & b - 5. \end{array}\right.$$

On a alors les cas à distinguer :

- Si $4 - 2a \neq 0$. On a alors $t = \dfrac{b-5}{4-2a}$, on en déduit donc les solutions de (E) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 + 7r + \dfrac{(2a+5)(5-b)}{6(a-2)} \\ y & = & 1 + 2r + \dfrac{(a+1)(5-b)}{6(a-2)} \\ z & = & r \in \mathbb{R} \\ t & = & \dfrac{5-b}{2a-4} \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

- Si $4 - 2a = 0$ mais $b - 5 \neq 0$, on obtient une équation contradictoire $0 \cdot t = b - 5 \neq 0$. Donc le système (E) n'admet pas de solution.
- Si $4 - 2a = 0$ et $b - 5 = 0$, donc (E) équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x + 2y + 3z + t & = & 1 \\ y - 2z + t & = & 1. \end{array}\right.$$

D'où les solutions de (E) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 7r - s - 1 \\ y & = & 2r - s + 1 \\ z & = & r \in \mathbb{R} \\ t & = & s \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$