UNIVERSITE BORDEAUX I

MHT 201. Structures algébriques

DS n^0 1, le 10 mars 2011

Durée 1h30. Documents et calculettes interdits

Exercice 1. Trouver le pgcd des polynomes $X^5 + X^4 - X^3 - 2X - 1$ et $3X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X - 2$.

Exercice 2. Déterminer tous les polynômes de la forme $X^2 + aX + 1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ qui divisent le polynôme $X^4 + 3X^2 + 1$.

Exercice 3. Soient $f(X)$ et $g(X)$ deux polynômes non nuls dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes:

1) $f(X)$ et $g(X)$ ne sont pas premiers entre eux.

2) Il existent des polynômes $u(X)$ et $v(X)$ non nuls tels que $deg(u) < deg(g)$ et $deg(v) < deg(f)$ et $u(X)f(X) + v(X)g(X) = 0$.

Exercice 4. Soit n un entier $\geqslant 1$. Montrer que le polynôme

$$f(X) = 1 + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{C}[X]$$

n'a pas de racines de multiplicité $\geqslant 2$.

Exercice 5. Soit n un entier $\geqslant 1$ et soit

$$g(X) = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

a) Montrer que $g(1) = g(2) = \cdots = g(n) = 0$.

b) Montrer que $g(X) = \dfrac{(-1)^n (X-1)(X-2)\cdots(X-n)}{n!}$.

FIN